

分类号 _____
UDC _____

密级 _____
编号 _____

兰州财经大学

LANZHOU UNIVERSITY OF FINANCE AND ECONOMICS

硕士学位论文

论文题目 基于混合次分数跳过程的几何亚
式期权模糊定价及统计模拟

研究生姓名: 庞秋月

指导教师姓名、职称: 郭精军、教授

学科、专业名称: 统计学、数理统计学

研究方向: 金融统计与风险管理

提交日期: 2024年6月3日

独创性声明

本人声明所呈交的论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意。

学位论文作者签名： 侯秋丹 签字日期： 2024.6.3

导师签名： 郭永利 签字日期： 2024.6.3

关于论文使用授权的说明

本人完全了解学校关于保留、使用学位论文的各项规定， 同意（选择“同意” / “不同意”）以下事项：

1. 学校有权保留本论文的复印件和磁盘，允许论文被查阅和借阅，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文；

2. 学校有权将本人的学位论文提交至清华大学“中国学术期刊（光盘版）电子杂志社”用于出版和编入 CNKI《中国知识资源总库》或其他同类数据库，传播本学位论文的全部或部分内容。

学位论文作者签名： 侯秋丹 签字日期： 2024.6.3

导师签名： 郭永利 签字日期： 2024.6.3

Geometric Asian Option Fuzzy Pricing and Statistical Simulation Based on Sub-mixed Fractional Brownian Motion with Jump

Candidate : Qiuyue Pang

Supervisor: Jingjun Guo

摘要

亚式期权作为一种典型的路径依赖型奇异期权,其定价方法的研究一直是金融学领域研究的热点问题之一。目前,已有文献很少同时考虑到金融市场的随机性、模糊性以及分形特征。但实际中,金融市场不仅具有随机性和分形特征,也具有模糊性。因此,本文考虑在模糊状态下用混合次分数跳过程研究几何亚式期权定价问题,从而更加全面地刻画金融资产的价格变动规律。本文主要研究内容如下:

第一,考虑到金融资产价格的长记忆性及跳跃现象,基于混合次分数布朗运动,结合泊松过程构建了几何亚式期权定价模型。首先,根据混合次分数Itô公式,得到混合次分数跳过程Itô公式及其股价所满足随机微分方程的解析解;其次,运用风险中性原理给出几何亚式看涨期权的定价公式;最后,通过数值实验讨论不同 Hurst 指数 H 和泊松强度 λ 下,股价、无风险利率及波动率等参数与期权价格的关系。

第二,进行 Monte Carlo 模拟和实证分析。本部分主要给出了混合次分数跳过程下,标的资产波动率参数估计表达式的推导过程。然后,根据标的资产的实际数据得到各参数估计值,进而进行 Monte Carlo 模拟及拟合效果分析,验证了该模型的合理性和实用性。

第三,进一步考虑金融市场模糊性,引入模糊集理论构建几何亚式模糊期权定价模型。首先,基于已建立的几何亚式期权定价模型,通过三角模糊数和多元扩张原理,得到几何亚式看涨模糊期权价格的区间端点,给出模糊定价公式;其次,数值模拟分析了置信度和 Hurst 指数对模糊价格的影响;最后,将本文所建立模型与经典 BS 模型进行对比。

结果表明,混合次分数跳过程模型下的模拟路径更接近真实路径,且在此模型下,结合模糊集理论得到的模糊价格区间也更为合理,更有助于金融投资者的决策。

关键词: 混合次分数跳过程 几何亚式期权 模糊集理论 风险中性原理 Monte Carlo 模拟

Abstract

As a typical path-dependent singular option, the pricing method of Asian option has always been one of the hot issues in the field of finance. At present, few literatures have considered randomness, fractal characteristics and fuzziness of financial markets at the same time. However, in practice, the financial market has not only randomness and fractal characteristics, but also fuzziness. Therefore, in this thesis, we consider using mixed sub-fractional process with jump to study the geometric Asian option pricing problem in fuzzy state, so as to describe the price change law of financial assets more comprehensively. The main research contents of this thesis are as follows:

Firstly, considering the long memory and jump phenomenon of financial asset prices, a geometric Asian option pricing model is constructed based on mixed sub-fractional Brownian motion and Poisson process. Firstly, by using the mixed sub-fractional Itô formula, the analytical solution of the stochastic differential equation satisfying the mixed sub-fractional jump process Itô formula and its stock price is obtained. Secondly, the pricing formula of geometric Asian call option is given based on the risk-neutral principle. Finally, the relationship between stock price, risk-free interest rate and volatility and option price is discussed by numerical experiments with different Hurst index H and Poisson intensity λ .

Secondly, Monte Carlo simulation and empirical analysis are carried out. This part mainly gives the derivation of expression for estimating the volatility parameter of the underlying asset. under the mixed fractional jump process. Then, the estimated values of each parameter are obtained according to actual data of the underlying asset., and the Monte Carlo

simulation and fitting effect analysis are carried out to verify the rationality and practicability of the model.

Thirdly, considering the fuzziness of financial market further, the geometric Asian fuzzy option pricing model is constructed by introducing fuzzy theory. Firstly, based on the established geometric Asian option pricing model, the range end points of the geometric Asian call fuzzy option price are obtained through the triangular fuzzy number and the multiple expansion principle, and the fuzzy pricing formula is given. Secondly, the influence of confidence and Hurst index on fuzzy price is analyzed by numerical simulation. Finally, the model established in this thesis is compared with the classical BS model.

The results show that the simulated path under the mixed fractional jump process model is closer to the real path. And under this model, the fuzzy price interval obtained by combining the fuzzy theory is more reasonable and more helpful to the decision of financial investors.

Keywords: Mixed sub-fractional process with jump; Geometric Asian options; Fuzzy theory; Risk-neutral principle; Monte Carlo simulation

目 录

1 绪论	1
1.1 研究背景.....	1
1.2 研究意义及目的.....	1
1.2.1 研究目的.....	1
1.2.2 研究意义.....	2
1.3 研究现状.....	3
1.3.1 期权定价的研究现状.....	3
1.3.2 模糊期权定价的研究现状.....	5
1.3.3 亚式期权的研究现状.....	6
1.3.4 文献述评.....	7
1.4 研究内容与安排.....	8
1.4.1 研究内容.....	8
1.4.2 结构安排.....	9
1.5 创新点.....	10
2 预备知识	11
2.1 亚式期权相关概念.....	11
2.1.1 亚式期权的定义.....	11
2.1.2 亚式期权的分类.....	11
2.2 BS 期权定价模型.....	12
2.3 混合次分数布朗运动及随机积分.....	12
2.4 伊藤引理.....	13
2.5 风险中性定价.....	13
2.6 模糊集理论.....	14
3 混合次分数跳过程下几何亚式期权定价	15
3.1 几何亚式看涨期权定价模型.....	15
3.1.1 模型假设.....	15

3.1.2 模型构建.....	15
3.2 灵敏度分析.....	19
3.2.1 几何亚式期权的希腊字母.....	19
3.2.2 不同 H 、 λ 下各参数与期权价格的关系	19
4 Monte Carlo 模拟和实证分析	24
4.1 数据选取.....	24
4.2 参数估计.....	25
4.3 Monte Carlo 模拟	28
4.4 拟合效果分析.....	31
5 混合次分数跳过程下几何亚式期权模糊定价	35
5.1 几何亚式看涨期权模糊定价模型.....	35
5.2 数值模拟.....	38
5.2.1 参数置信度 c 对模糊区间的影响.....	38
5.2.2 参数 Hurst 指数对模糊区间的影响.....	39
5.2.3 与经典 BS 模型进行对比.....	40
6 结论与展望	42
6.1 结论.....	42
6.2 展望.....	42
参考文献	44
附录	49
硕士期间完成的工作	53
致谢	54

1 绪论

1.1 研究背景

期权定价方法的研究一直是金融学领域研究的热点问题之一。期权作为金融衍生品之一，能很好地规避金融风险。因此，期权定价模型已成为对诸多金融问题进行定量分析的重要工具和方法。

期权主要分为两大类，一是常规期权，一是奇异期权。奇异期权，也称为新型期权，是比常规期权更复杂的衍生证券。相较于常规期权，在期权性质、行权有效期及标的资产等方面存在较大差异。奇异期权的交易方式和价格更灵活，结构更独特，同时管理风险能力也更强。奇异期权的定价模型及公式推导也比新型期权更加复杂，因而，其定价存在一定的难度和复杂度。亚式期权是典型的路径依赖型奇异期权，其回报是由到期日之前某一段特定时间内标的资产的执行价格与均价共同确定。由于平均值的采用降低了回报的波动，对于稳健的投资者来说具有很大的吸引力，这使其成为了金融衍生品市场上交易最为活跃的奇异期权之一。并且它具有很好的风险对冲功能和不易被人为操作等优势。因此，亚式期权定价一直是期权定价中的热点问题之一。

目前，关于几何亚式期权的大多数研究都是基于经典 BS 定价模型，研究方法有风险中性定价法、保险精算法以及热传导方程等。然而，BS 定价模型的条件过于理想化，导致存在着许多不足之处。本文从模型和参数两个角度出发进行改进，考虑了在模糊状态下，结合混合次分数跳过程，运用风险中性定价法研究几何亚式期权定价问题，从而更加全面且合理地刻画金融资产的价格变动规律。

1.2 研究意义及目的

1.2.1 研究目的

针对经典 BS 期权定价模型的不足，用混合次分数跳过程来刻画标的资产的

价格变化情况，采用风险中性原理得到几何亚式期权定价公式。然而，定价模型中包含许多参数，如波动率、无风险利率、Hurst 指数等。在经典 BS 模型中，假设波动率、无风险利率等为常数，这一假设太过于理想化，不符合金融实际。实际金融市场不仅是随机的，而且也是模糊的。研究发现，除标的资产价格外，标的资产价格的波动率和无风险利率等参数对期权定价结果也存在显著的影响。因此，如何对期权定价模型中参数进行合理估计非常重要。

本文旨在基于混合次分数布朗运动和泊松过程，运用随机分析和分形理论来研究几何亚式期权定价问题。在此基础上，引入模糊数来刻画参数的不确定性，从而构建了模糊定价模型，进而提高定价模型的精确度，使其更加贴合金融市场实际情况。

1.2.2 研究意义

亚式期权是一种典型的路径依赖型奇异期权，相较于常规期权，其定价模型和公式推导更加复杂。并且，本文又将模糊性和跳跃等因素考虑到定价模型中，为其定价增加了一定的复杂度和难度。因此，本文的亚式期权定价研究具有以下理论意义和现实意义。

从理论意义出发，拓展了亚式期权定价模型内容。由于 BS 模型中假设条件过于理想化，与实际金融市场严重不符，故本研究基于混合次分数跳过程得到几何亚式期权定价公式，并且考虑到金融市场的模糊性，得到了几何亚式期权模糊定价模型。该模型可以有效地改进现有模型的不足，使得结果更加准确，更加符合金融实际情况，同时拓展了亚式期权的定价研究，丰富了亚式期权定价理论。

从现实意义出发，对期权产品定价、风险管理和投资决策等具有重要的应用价值。通过得到的模糊模型研究亚式期权定价，投资者可以根据自己的置信度，来获得一个模糊价格区间。投资者可以利用这一区间作为未来亚式期权价格的预测，指导投资策略，从而帮助投资者做出合理的投资决策，降低金融风险。同时，有助于金融市场的发展与稳定，也对金融衍生品的丰富具有重要的现实意义。

1.3 研究现状

1.3.1 期权定价的研究现状

Black 和 Scholes(1973)(BS)首次采用几何布朗运动来刻画金融资产价格的波动,通过无套利原理得到了传统 BS 期权定价模型,此模型奠定了期权定价的基础。然而,BS 期权定价模型的假设条件过于理想化,不符合实际的金融市场。资产价格服从几何布朗运动的假设不仅无法刻画金融资产价格的长相依性和自相似性等分形特征,而且也无法体现其跳跃现象。此外,无风险利率、期望收益率、资产价格的波动率均为常数等假设,显然无法合理且准确地反映金融市场中期权价格的变化。以上表明,BS 期权定价模型不能合理地反映标的资产价格的变化过程。因此,学者们开始从基本模型和重要参数两个方面进行改进。

从模型改进的角度出发,一方面,由于几何布朗运动无法刻画金融资产价格的长相依性和自相似性等分形特征,因此,学者 Mandelbrot(1982)和 Peters(1994)以分形理论为基础,引入 Hurst 指数 H 作为度量分形特征的指标,从而刻画金融资产价格的波动。相比之下,具有度量分形特征的分数布朗运动、次分数布朗运动、混合分数布朗运动及混合次分数布朗运动等则能够很好地刻画资产价格的变动。因此,学者们采用以上类型的随机过程对期权定价进行了大量的研究。张亚茹等(2023)研究了混合双分数布朗运动下的永久美式回望期权定价。Xiao 等(2010)研究了分数布朗运动下的期权定价问题。Gu 等(2012)研究了分数布朗运动下带有交易费用的期权定价问题。程志勇等(2018)研究了混合次分数布朗运动下带有支付红利的欧式期权定价,并得到了其定价公式。王萌和宋瑞丽(2023)研究了混合次分数运动下的欧式障碍期权定价。余湄等(2021)利用鞅定价理论推导出时变混合次分数布朗运动下期权的显示解,推广了传统 BS 和分数布朗运动定价模型。安翔和郭精军(2021)建立了混合次分数布朗运动下带红利的永久美式回望期权定价模型。孙娇娇和董锋(2022)在假设标的资产服从分数布朗运动的基础上,研究了带有红利支付的脆弱期权定价问题。Cheng 等(2021)在混合分数跳过程下构建了脆弱期权定价模型;另一方面,几何布朗运动只能刻画较小的资产价格波

动,也就是说,对于具有较大资产价格波动的期权,其估计值会产生较大的误差。为了解决这一问题,学者们开始在基础模型中加入泊松过程来捕捉标的资产的不连续波动现象,从而出现了跳扩散模型(Merton, 1976)。跳扩散模型由连续和间断两部分构成,连续部分由高斯过程刻画,间断部分由泊松过程刻画。Scott(1997)在跳扩散模型下,运用傅里叶变换法得到了期权定价公式,并验证了跳跃扩散模型可以很好地解释标的资产价格大幅度波动的情形。Gukhal(2001)基于跳扩散模型,运用傅里叶变换法构建了美式期权定价模型。姚怡等(2019)基于跳扩散模型建立了亚式期权的定价模型。Makarov 等(2023)研究了带有系统风险的多资产跳扩散模型下的期权定价和投资组合优化。随着期权市场的发展,一些新型期权的出现,传统的离散跳跃模型已经满足不了。巢文和邹辉文(2017)采用双指数跳跃扩散模型刻画了死亡率的不对称跳跃,并结合风险中性定价法和 CIR 利率模型给出了不完全市场中的债券定价。宫晓莉等(2018)利用广义双指数分布驱动的双层跳跃扩散模型对股指期货波动进行了研究。

从参数改进的角度出发,经典 BS 模型中的参数假设为常数,但实际中,这些参数具有不确定性,不确定性又包括随机性和模糊性。因此,国内外学者从模糊性和随机性两个层面出发,来改进经典 BS 模型中参数为常数的不足。在随机性层面,学者们主要从波动率和无风险利率等重要参数出发,思想是将常量参数替换为随时间变化的函数变量。对于利率,早期学者们采用变化的短期利率代替无风险利率来改进 BS 期权定价模型,从而构建了短期随机利率期权定价模型(Grabbe, 1983; Hillard, 1991)。然而,该模型利率形式单一,Duffee(2002)采用多种利率的加权平均来代替无风险利率,构建了利率仿射模型,降低了模型的误差。对于波动率,从随机性层面出发,改进思路主要有两种:一是随机波动率模型(J.Hull & A.White, 1987; Steven Heston, 1993)。Peiris 等(2007)分析研究了随机波动率的结构,用波动率的动态趋势变化值刻画了波动率的整体变动;二是随机波动率跳扩散模型(Bates, 1996),该模型是将随机波动率模型和跳扩散模型组合起来对期权进行定价,更加充分地刻画了标的资产地价格变化规律。从模糊性层面出发,在期权定价中,大多数学者都将波动率和利率等参数视为模糊数,进而构建了模糊期权定价模型。期权定价模型中包含许多参数,如波动率、无风险

利率、Hurst 指数等。研究发现，除标的资产价格外，标的资产价格的波动率和无风险利率等参数对期权定价结果也存在显著的影响。因此，如何对期权定价模型中参数进行合理估计非常重要。在经典 BS 模型中，假设波动率、无风险利率等为常数，这一假设太过于理想化，不符合金融实际。实际金融市场不仅是随机的，而且也是模糊的。在真实的金融市场中，波动率、无风险利率等参数数据很难被准确记录。因此，引入模糊集理论到定价模型中，从而更好地反映金融数据的不确定性。Zadeh(1965)提出的模糊集理论是研究这类模糊问题的重要工具。Wu(2017)将模糊集理论引入到期权定价研究中。秦学志等(2019)基于分数布朗运动研究了欧式期权模糊定价。Liu 等(2021)运用随机分析、分形理论和模糊集理论，构建了次分数布朗运动下的欧式模糊期权定价模型，并分析了 Hurst 指数对欧式期权定价的影响。林先伟(2022)等研究了混合分数布朗运动下的欧式期权模糊定价。Xu 等(2023)研究了带跳混合加权分数布朗运动下的欧式期权定价。

1.3.2 模糊期权定价的研究现状

金融市场的不确定性不仅包括随机性，还有模糊性。一方面，可以说金融现象可能结果的概率所对应的风险是已知的，另一方面，也可以说是不知道的，且无法获得它们的唯一赋值。在非流动或不完备的金融市场中这种情况很常见。例如，期权价格可以通过概率论方法进行建模，并且这个参数信息可能不是完全不确定的，但它仍然可能受到某种程度的模糊和不确定的影响；在活跃且流动的金融市场中，一个交易日内资产的交易价格不是一个清晰的数字，而是更接近于一个置信区间。模糊集理论(FST)为期权定价提供了一种非概率不确定性的建模方法，如模糊测度(Cherubini, 1997)、模糊分布函数(Viertl & Hareter, 2004)、模糊数及模糊回归(Muzzioli & De Baets, 2016)等。一方面，随机过程理论为资产价格行为模型提供了一个坚实的分析和理论框架，期权定价已建立在概理论的基础上；另一方面，模糊工具是对概率论的一个合适的补充，因为它们允许在可用的信息中引入不同的不确定性风险来源，如模糊，不精确等。

现有的模糊期权定价方法大致可分为四类：一是模糊随机方法，也为主流的方法。是在标的资产服从随机过程的假设条件下，相关参数为模糊数而不是一个

确定的常数，从而建立模糊化的期权定价公式。该方法中，参数的不确定性用模糊数来表示，模糊数通常是三角模糊数或梯形模糊数(Liu & Zhi, 2021; Thavaneswaran et al., 2013)。然而，也有其他形式的模糊数，比如自适应模糊参数(Thiagarajah et al., 2007)、直觉模糊数(Wu et al., 2016; Ersen et al., 2022)、二型模糊数(Tolga, 2020; Wang et al., 2022)、高斯模糊数(Chen et al., 2019)；二是模糊测度法。模糊测度的应用一直是模糊期权定价的一个有效的研究方向，该方法是将模糊集理论与传统的期权定价模型叠加，通过模糊测度法将风险中性测度进行扭曲，从而得到模糊测度下的期权定价公式。最常见的模糊测度为 Sugeno 测度，它建立在参数 $\lambda \in [-1, \infty)$ 上(Sugeno et al., 1998)。后来，学者们对 Sugeno 测度进行了拓展并将其应用于期权定价(Cherubini & Mulinacci, 2021)；三是模糊收益方法(Collan et al., 2009)，专门用于评估实物期权。它依赖于使用模糊数对现金流的不确定性进行建模；四是模糊神经网络法(Hajizadeh, 2020)，也称为非参数方法。该方法嵌入了模糊控制器或模糊神经网络等工具，利用它们的学习能力从经验数据中获得对任何函数的良好逼近值，但是，要注意的是，该方法并不提供期权价格的封闭公式。

1.3.3 亚式期权的研究现状

亚式期权作为奇异期权的一种，其收益取决于标的资产在特定时期内的平均值。亚式期权在一定时期内对受大宗商品价格或平均汇率影响的公司有显著作用，具有较好的风险对冲功能、市场竞争力以及不易被人为操控等特点，因此吸引了许多学者的关注。

目前，针对几何亚式期权的定价问题，研究者们基于不同的随机过程模型，如分数布朗运动、次分数布朗运动、跳扩散及次分数跳扩散等，展开了一系列研究。孙玉东等(2012)研究了在分数布朗运动下具有固定敲定价格的几何亚式期权定价。沈明轩和何朝林(2013)基于分数布朗运动，研究了具有浮动敲定价格的几何平均亚式期权定价。Wang 等(2021)研究了次分数布朗运动下的亚式期权定价，得到了几何亚式期权及几何亚式幂期权定价公式。此外，鉴于金融资产价格可能出现大幅且频繁的异常波动，即“跳跃”现象。Park 等(2020)基于跳跃扩散 CIR 过

程,得到了亚式期权定价公式。Dhalluin 等(2005)基于跳扩散模型,利用 Itô 公式和对冲原理推导出连续情形下亚式期权定价公式。杨月和王永茂(2020)同时考虑了金融市场的分形特征和跳跃现象,将跳扩散过程与次分数布朗运动相结合,得到了次分数跳扩散模型下的几何亚式期权的定价公式。

另外,近年来引入模糊集理论进行亚式期权定价的研究也逐渐出现。对于几何亚式期权的研究,主要集中在布朗运动和跳扩散等随机过程方面。然而,仅用随机性来度量金融市场的不确定性显得单一,存在局限。因此,模糊集理论被引入到期权定价中,以刻画金融市场另一种不确定性来源——模糊性。模糊集理论可以更好地刻画金融市场中的不确定性和模糊性。一些学者结合随机性和模糊性,研究了在模糊环境下的亚式期权定价问题,以解决传统定价模型难以考虑的情况。王献东和何建敏(2020)同时考虑到了模糊性和随机性两个方面,把标的资产的波动视为一个模糊随机过程,研究了模糊随机不确定环境下亚式期权定价问题。Zhang 等(2015)在考虑金融市场不确定性的基础上,假设标的股票价格、无风险利率和波动率为模糊数,研究了模糊环境下几何亚式期权的定价问题,给出了几何亚式期权的模糊价格。

1.3.4 文献述评

综上所述,对亚式期权的大多数研究:

第一,很少有研究从混合次分数布朗运动和跳跃的组合模型角度出发研究亚式期权定价问题,大都是在次分数跳扩散组合模型或单一模型下进行研究的。研究发现,次分数布朗运动应用在期权定价中会出现套利现象,而混合次分数布朗运动在 Hurst 指数取值在 0.75 到 1 之间时,相当于布朗运动,从而消除了套利机会;

第二,只停留在考虑随机性方面。已有文献很少同时考虑到金融市场的随机性和模糊性。实际中金融市场不仅具有随机性,也具有模糊性,而模糊集理论可以很好的处理金融市场中的模糊现象。因此,本研究考虑在模糊状态下用混合次分数跳过程研究亚式期权定价问题,从而更加全面地刻画金融资产的价格变动规律。

1.4 研究内容与安排

1.4.1 研究内容

本文考虑在模糊状态下，用混合次分数跳过程研究几何亚式期权定价问题。主要研究内容如下：

(1) 考虑到金融资产价格的长记忆性、自相似性等分形特征及跳跃现象，基于混合次分数布朗运动和泊松过程，运用风险中性原理构建了几何亚式期权定价模型。首先，利用伊藤引理和次分数Itô公式，得到混合次分数跳过程Itô公式及其股价所满足随机微分方程的解析解；其次，运用风险中性原理给出几何亚式看涨期权的定价公式，并应用变量代换法导出几何亚式看涨期权定价公式的闭式解；最后，使用 R 软件分析了不同 Hurst 指数 H 和泊松强度 λ 下，股价、无风险利率及波动率等参数与期权价格的关系；

(2) 主要给出了混合次分数跳过程下波动率参数估计表达式的推导过程，并进行了 Monte Carlo 模拟和实证分析。根据实际数据得到各参数估计值，进而进行 Monte Carlo 模拟及拟合效果分析，验证模型的合理性和实用性；

(3) 进一步考虑金融市场的模糊性，引入模糊集理论构建几何亚式模糊期权定价模型。主要在模糊参数角度下，研究了模糊利率、模糊波动率、模糊股价及模糊泊松强度下的几何亚式期权定价问题。首先，基于已建立的几何亚式期权定价模型，引入三角模糊数和多元扩张原理，得到几何亚式看涨模糊期权价格的区间端点，给出模糊定价公式；其次，数值模拟分析了置信度 c 和 Hurst 指数对模糊价格的影响；最后，并将本文所建立模型与经典 BS 模型进行对比。

基于以上研究内容，论文的研究框架图如图 1.1 所示：

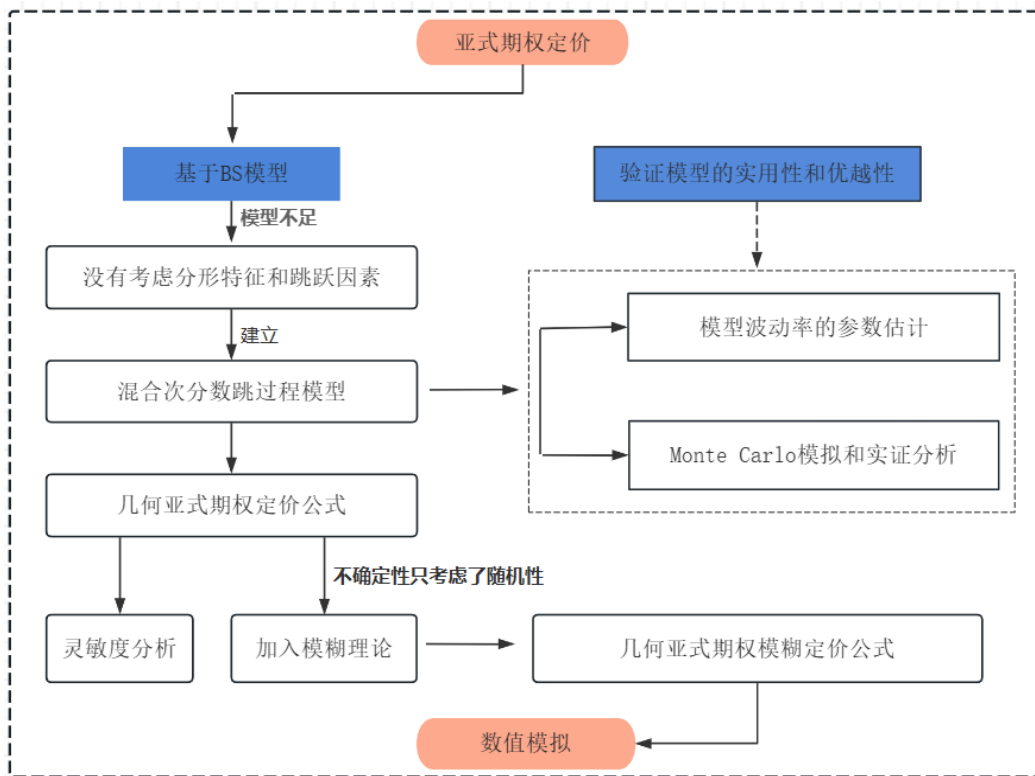


图 1.1 研究框架图

1.4.2 结构安排

第一部分为绪论。介绍了论文的研究背景、研究意义及目的、研究现状、研究内容与结构安排等。

第二部分为预备知识。介绍了亚式期权相关概念和经典 BS 期权定价模型、风险中性定价方法及模糊集理论的相关定理等。

第三部分为几何亚式期权定价模型。主要基于混合次分数跳过程，运用风险中性定价法构建了几何亚式期权定价公式，并分析了不同 Hurst 指数 H 和泊松强度 λ 下，几何亚式期权价格对各参数的敏感性。

第四部分为 Monte Carlo 模拟和实证分析。主要包括数据选取、参数估计、Monte Carlo 模拟以及拟合效果分析这四小部分。

第五部分几何亚式期权模糊定价模型。在几何亚式期权定价公式的基础上，引入模糊集理论，采用三角模糊数构建了几何亚式期权模糊定价模型。最后，数值模拟分析了置信度和 Hurst 指数对模糊价格的影响，并将本文所建立模型与经典 BS 模型进行对比。

第六部分为总结与展望。主要对本文的研究结果进行总结，提出建议，并对亚式期权的后续研究工作进行展望。

1.5 创新点

针对研究几何亚式期权现有文献的不足，本文的创新点主要有以下两点：

第一，采用混合次分数跳过程刻画标的资产的变化。研究发现，在实际金融市场中资产价格变化具有长相依性和自相似性等分形特征，并不是单纯的随机游走。而且，有时资产价格会因为金融危机和自然灾害的出现而发生大幅度的变化，金融市场中将此种现象称为间断性的跳跃。也就是说，金融资产价格的波动是不连续的。因此，本文采用混合次分数跳过程刻画标的资产的价格变化，更好地体现了金融市场的分形特征及跳跃现象，从而推导出了几何亚式期权定价模型以及模型波动率参数估计的表达式。

第二，从模糊参数角度出发，引入模糊数，构建几何亚式模糊期权定价。实际金融市场不仅是随机的，而且也是模糊的。对于亚式期权，已有文献很少同时考虑到金融市场的随机性和模糊性。因此，本文在混合次分数跳过程的基础上，引入模糊集理论到定价模型中，从而更好地反映了金融数据的不确定性，更加全面地考虑到金融市场的长记忆性、自相似性、跳跃现象、随机性及模糊性等特征，从而推导出了几何亚式期权模糊定价模型。

2 预备知识

2.1 亚式期权相关概念

下面介绍了亚式期权的定义及分类,给出了几何亚式期权固定敲定价格下的收益函数以及平均价格 A_T 的计算公式。

2.1.1 亚式期权的定义

亚式期权又称为均价期权,是奇异期权的一种。亚式期权的回报是由到期日之前某一段特定时间内标的资产的执行价格与均价共同确定。也就是说,亚式期权的收益取决于标的资产在特定时间内的平均值。

2.1.2 亚式期权的分类

根据执行价格,亚式期权可分为浮动敲定价格期权和固定敲定价格期权。固定敲定价格的看涨期权和看跌期权在到期日 T 时刻的收益分别为 $(A_T - K)_+$ 和 $(K - A_T)_+$,其中 K 是执行价格, A_T 是标的资产在预定时间内的平均价格。根据 A_T 计算方式的不同,亚式期权又可分为几何平均亚式期权和算数平均亚式期权^[36]。几何平均亚式期权中的 A_T 计算公式为:

$$A_T = \exp \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \ln S_t dt \right\}, \quad (2.1)$$

算数平均亚式期权中的 A_T 计算公式为:

$$A_T = \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt. \quad (2.2)$$

由于金融资产价格 S_t 服从对数正态分布,那么将容易得到,几何平均亚式期权中的 A_T 也满足对数正态分布,但无法知道算数平均亚式期权中的 A_T 所满足的分布,因为它并不符合对数正态分布,故无法直接得到解析解。学术界对算数平均亚式期权问题的处理方式有很多,包括二叉树、近似法及 Monte Carlo 模拟方法等。本文只讨论具有固定行权价的几何平均亚式期权。

2.2 BS 期权定价模型

下面给出了几何布朗运动下，几何平均亚式期权的看涨期权定价公式。

定义 2.1^[3] 假设某个亚式期权的标的资产的价格 S_t 在 t 时刻满足以下随机微分方程

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \quad (2.3)$$

其中， B_t 是标准布朗运动， μ 是标的资产的期望收益率， σ 是标的资产的波动率，则几何平均亚式看涨期权的价格为：

$$C(S_0, T) = S_0 e^{-\frac{1}{2}\mu T} \Phi(d_1) - K e^{-rT} \Phi(d_2). \quad (2.4)$$

其中

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \frac{1}{2}\mu T - \frac{1}{4}\sigma^2 T}{\sqrt{\frac{1}{2}\sigma^2 T}}, \quad (2.5)$$

$$d_1 = d_2 + \sqrt{\frac{1}{2}\sigma^2 T}. \quad (2.6)$$

2.3 混合次分数布朗运动及随机积分

下面介绍混合次分数布朗运动相关的概念及性质。

定义 2.2^[4] 在概率测度空间 (Ω, \mathcal{F}, Q) 上，由标准布朗运动 B_t 和次分数布朗运动 ξ_t^H 的线性组合所定义的随机过程称为混合次分数布朗运动，记作 $\{M_H(t; \alpha, \beta); t \in R_+\}$ ，即

$$M_H(t; \alpha, \beta) = \alpha B_t + \beta \xi_t^H, \quad \forall t \in R_+, \quad (2.8)$$

其中 $\alpha, \beta \in R$ 且不同时为零，Hurst 指数 $H \in (0, 1)$ ， B_t 和 ξ_t^H 相互独立。

有如下性质：

M_t^H 是一个具有长记忆性及尖峰厚尾等特征的连续中心高斯过程；

方差： $\forall t \in R_+$,

$$\text{Var}[M_t^H] = \alpha^2 t + \beta^2 (2 - 2^{2H-1}) t^{2H}. \quad (2.9)$$

协方差： $\forall t \in R_+$,

$$\text{Cov}(M_t^H, M_s^H) = \alpha^2(t \wedge s) + \beta^2 \left(t^{2H} + s^{2H} - \frac{1}{2}((t+s)^{2H} + |t-s|^{2H}) \right), \quad (2.10)$$

其中, $t \wedge s = \min(t, s)$;

对 $\forall t \in R_+$, 当 $H \in (0.75, 1)$, M_t^H 是一个半鞅;

M_t^H 的增量是非平稳的。

引理 2.1^[4](混合次分数Itô公式) 函数 $f(t, X_t)$ 具有连续的一阶偏导数及二阶偏导数, 则有混合次分数Itô公式:

$$df(t, X_t) = \frac{\partial f}{\partial x} dX_t + \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (\alpha^2 + 2\beta^2 H(2 - 2^{2H-1})t^{2H-1}) \right] dt. \quad (2.11)$$

2.4 伊藤引理

本研究所用的随机分析方法主要包括伊藤过程、伊藤引理以及Itô公式, 主要运用了以上方法对股价所满足的随机偏微分方程进行求解并得到其解析解。伊藤引理是日本数学家伊藤清在 1951 年提出的, 在随机分析中, 伊藤引理具有非常重要的位置。

引理 2.2^[28](伊藤引理) 假设随机过程 $X(t)$ 服从

$$dX(t) = \mu(X(t), t)dt + \sigma(X(t), t)dW(t), \quad (2.12)$$

且 $F(X(t), t)$ 关于 $X(t)$ 至少是二阶可微的, 关于 t 是一阶可微的, 则 $F(X(t), t)$ 是一个伊藤过程, 且有

$$\begin{aligned} dF(X(t), t) = & \left[\frac{\partial F}{\partial t} + \mu(X(t), t) \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(X(t), t) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right] dt \\ & + \sigma(X(t), t) \frac{\partial F}{\partial x} dW(t). \end{aligned} \quad (2.13)$$

2.5 风险中性定价

下面介绍风险中性定价原理。

定义 2.3^[28] 风险中性定价方法是常见的期权定价方法之一, 该方法假设在市场无套利的条件下, 金融衍生品的价值与投资者的风险态度无关, 金融衍生产品的当前价值等于其在到期日价值的数学期望按无风险利率折现。即在风险中性测度 Q 下, 金融衍生品在 t 时刻的期权价值 C_t 为

$$C_t = E_Q[e^{-r(T-t)}C_t], \quad (2.14)$$

E_Q 表示在风险中性测度 Q 下的数学期望, C_t 表示金融衍生品在 t 时刻的价值。

2.6 模糊集理论

模糊集理论是不确定理论的一部分,可以用来刻画金融市场中的一些不确定现象,因此,学者们常常将模糊数、隶属函数及模糊集合等理论用到期权定价模型参数的确定中。下面介绍本文所涉及的模糊数学的一些基本概念。

定义 2.3^[37] \tilde{a} 是 R 的模糊子集,若 \tilde{a} 满足以下条件,

- (1) \tilde{a} 是正规模糊集和凸模糊集;
- (2) \tilde{a} 的隶属函数是 $\mu_{\tilde{a}}$ 上半连续的;
- (3) \tilde{a} 的 c -截集 \tilde{a}_c 是有界的

则称 \tilde{a} 是模糊数。如果 \tilde{a} 是模糊数,则它的 c -截集 \tilde{a}_c 是一个有界闭区间,记为 $\tilde{a}_c = [(\tilde{a})_c^L, (\tilde{a})_c^U]$ 。

定义 2.4^[37] 设 $\tilde{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 是实数集 R 上的一个模糊集,其隶属函数为:

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} \frac{x - a_1}{a_2 - a_1}, & a_1 \leq x \leq a_2, \\ \frac{x - a_3}{a_2 - a_3}, & a_2 < x \leq a_3, \\ 0, & x < a_1, x > a_3. \end{cases}$$

则称 \tilde{a} 为三角模糊数。其中, a_1 代表最悲观的取值, a_2 代表最可能的取值, a_3 代表最乐观的取值。则有 \tilde{a} 的 c -截集为 $\tilde{a}_c = [(1 - c)a_1 + ca_2, (1 - c)a_3 + ca_2]$ 。

定义 2.5^[41] 记 F 为 R 上所有模糊子集的集合, $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是从 R^n 到 R 的实值函数, $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$ 是 R 上的 n 个模糊子集,根据扩张原理,则有模糊函数 $\tilde{f}: F_n \rightarrow F$ 的一个模糊函数。也就是说, $\tilde{f}(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n)$ 是 R 上的一个模糊集合,它的隶属函数则有如下定义:

$$\mu_{\tilde{f}(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n)}(r) = \sup_{f(x_1, x_2, \dots, x_n)=r} \{\min[\mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \dots, \mu_{\tilde{A}_n}(x_n)]\}. \quad (2.15)$$

3 混合次分数跳过程下几何亚式期权定价

3.1 几何亚式看涨期权定价模型

在风险中性测度 Q 下,本节通过混合次分数跳过程Itô公式及其解析解给出了混合次分数跳过程下具有固定敲定价格的几何亚式期权定价公式。

3.1.1 模型假设

- (1) 市场是无摩擦且连续的,即交易费用为零,无税收;
- (2) 股价遵循 Hurst 指数为 $[0.75,1)$ 的混合次分数跳过程,此时无套利;
- (3) 在期权到期之前,无风险利率 r 、期望收益率 u 、股价的波动率 σ 均为常数;
- (4) 期权只能在到期日执行;
- (5) 股票在期权有效期内支付的股息率为零

在风险中性测度下,股价满足下面的随机微分方程

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dX_t, \quad (3.1)$$

其中 $X_t = M_t^H + Q_t$, $Q_t = N_t - \lambda t$ 是补偿泊松过程, N_t 是强度为 λ 的泊松过程,且有 B_t 、 ξ_t^H 及 N_t 两两相互独立。

3.1.2 模型构建

下面以定理的形式给出混合次分数跳过程Itô公式及其股票所满足的随机微分方程的解析解,以及固定执行价格 K 和到期时间 T 下的几何亚式看涨期权定价表达式。

定理 3.1.1(混合次分数跳过程Itô公式) 假定函数 $f(t, X_t)$ 具有连续的一阶偏导数及二阶偏导数,则有混合次分数跳过程Itô公式

$$df(t, X_t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) dX_t + \left[\frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t) (\alpha^2 + \lambda + 2\beta^2 H(2 - 2^{2H-1}) t^{2H-1}) \right] dt. \quad (3.2)$$

证明 根据混合次分数Itô公式和 2.4 节, 有

$$\begin{aligned}
df(t, X_t) &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{\partial^2 f}{2\partial x^2}(t, X_t)(dX_t)^2 \\
&= \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{\partial^2 f}{2\partial x^2}(t, X_t) \\
&\quad ((\alpha^2 dt + \beta^2 d((2 - 2^{2H-1})t^{2H}) + d(\lambda t)) \\
&= \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{\partial^2 f}{2\partial x^2}(t, X_t) \\
&\quad ((\alpha^2 + 2\beta^2 H(2 - 2^{2H-1})t^{2H-1} + \lambda)dt \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) + \frac{1}{2}(\alpha^2 + 2\beta^2 H(2 - 2^{2H-1})t^{2H-1} + \right. \\
&\quad \left. \lambda) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t) \right) dt.
\end{aligned}$$

证毕。

定理 3.1.2 方程(3.1)的解是

$$S_t = S_0 \exp \left\{ rt - \frac{\sigma^2}{2} (\beta^2 (2 - 2^{2H-1}) t^{2H} + \lambda t + \alpha^2 t) + \sigma X_t \right\}. \quad (3.3)$$

证明 令

$$f(t, X_t) = S_0 \exp \left\{ rt - \frac{\sigma^2}{2} (\beta^2 (2 - 2^{2H-1}) t^{2H} + \lambda t + \alpha^2 t) + \sigma X_t \right\}.$$

则有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) &= f(t, X_t) \left(r - \frac{\sigma^2}{2} (\alpha^2 + 2\beta^2 H(2 - 2^{2H-1}) t^{2H-1} + \lambda) \right), \\
\frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) &= f(t, X_t) \sigma, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t) &= f(t, X_t) \sigma^2.
\end{aligned}$$

根据方程(3.2), 有

$$\begin{aligned}
df(t, X_t) &= f(t, X_t) \sigma dX_t + [f(t, X_t) (r - \frac{\sigma^2}{2} (\alpha^2 + 2\beta^2 H(2 - 2^{2H-1}) t^{2H-1} + \lambda)) \\
&\quad + \frac{1}{2} (\alpha^2 + 2\beta^2 H(2 - 2^{2H-1}) t^{2H-1} + \lambda) f(t, X_t) \sigma^2] dt \\
&= f(t, X_t) \sigma dX_t + r f(t, X_t) dt.
\end{aligned}$$

令

$$S_t = f(t, X_t),$$

则有

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d(X_t).$$

证毕。

定理 3.1.3(几何亚式看涨期权定价模型) 在风险中性测度下, 股价 S_t 满足方程(3.1), 则固定行权价为 K 、到期日为 T 的几何亚式看涨期权的价格 $C(S_0, T)$ 为

$$C(S_0, T) = S_0 e^A \Phi(d_1) - K e^{-rT} \Phi(d_2). \quad (3.4)$$

其中

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \frac{1}{2}rT - \frac{\lambda + \alpha^2}{4}\sigma^2 T - \frac{2 - 2^{2H-1}}{2(2H+1)}\beta^2 \sigma^2 T^{2H}}{\sqrt{\frac{\lambda + \alpha^2}{2}\sigma^2 T + \frac{2H+3-2^{2H}}{(2H+1)(H+1)}\beta^2 \sigma^2 T^{2H}}}, \quad (3.5)$$

$$d_1 = d_2 + \sqrt{\frac{\lambda + \alpha^2}{2}\sigma^2 T + \frac{2H+3-2^{2H}}{(2H+1)(H+1)}\beta^2 \sigma^2 T^{2H}}, \quad (3.6)$$

$$A = -\frac{1}{2}rT + \frac{(H-1)2^{2H-1}+1}{2(2H+1)(H+1)}\beta^2 \sigma^2 T^{2H}. \quad (3.7)$$

证明 令

$$J_T = \frac{1}{T} \int_0^T \ln S_t dt,$$

则有

$$A_T = \exp\{J_T\}.$$

由于股价 S_t 服从对数正态分布, 则在风险中性测度下, 随机变量 J_T 是高斯过程, 设 J_T 的均值和方差分别为 \hat{u} 和 $\hat{\sigma}^2$, 有

$$\begin{aligned} \hat{u} &= E(J_T) = \frac{1}{T} \int_0^T E(\ln S_t) dt \\ &= \ln S_0 + \frac{1}{T} \int_0^T rt dt - \frac{\sigma^2}{2T} \int_0^T (\beta^2(2 - 2^{2H-1})t^{2H} + \lambda t + \alpha^2 t) dt \\ &= \ln S_0 + \frac{1}{2} rT - \frac{\lambda + \alpha^2}{4} \sigma^2 T - \frac{2 - 2^{2H-1}}{2(2H+1)} \beta^2 \sigma^2 T^{2H}, \end{aligned}$$

其中

$$E(X_t) = E(\alpha B_t + \beta \xi_t^H + Q_t) = 0.$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= \text{Var}(J_T) = E((J_T - \hat{u})^2) \\ &= E\left(\frac{\sigma}{T} \int_0^T X_t dt\right)^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{T^2} \int_0^T \int_0^T E(X_s X_t) ds dt \\ &= \frac{\sigma^2}{T^2} \int_0^T \int_0^T [\text{Cov}(M_s, M_t) + E(Q_s Q_t)] ds dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sigma^2}{T^2} \int_0^T \int_0^T (\alpha^2 s + \beta^2 (t^{2H} + s^{2H} - \frac{1}{2}((t+s)^{2H} + |t-s|^{2H}) + \lambda s) ds dt \\
&= \frac{\lambda + \alpha^2}{2} \sigma^2 T + \frac{2H+3-2^{2H}}{(2H+1)(H+1)} \beta^2 \sigma^2 T^{2H},
\end{aligned}$$

其中, 规定 $s < t$, 且有

$$\begin{aligned}
E(X_s X_t) &= \text{Cov}(X_s, X_t) = \text{Cov}(M_s + Q_s, M_t + Q_t) \\
&= \text{Cov}(M_s, M_t) + E(Q_s Q_t)
\end{aligned}$$

$$E(Q_s Q_t) = E[(N_s - \lambda s)(N_t - \lambda t)] = E(N_s N_t) - \lambda^2 s t = \lambda s(\lambda t + 1) - \lambda^2 s t = \lambda s.$$

由于随机变量 $J_T = \ln A_T$ 服从正态分布, 因此随机变量 A_T 服从对数正态分布。

则几何亚式看涨期权价格为

$$C(S_0, T) = e^{-rT} E((A_T - K)_+) = e^{-rT} \int_D (e^x - K) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\hat{\sigma}} e^{-\frac{(x-\hat{u})^2}{2\hat{\sigma}^2}} dx,$$

$$D = \{x | e^x - K > 0\}.$$

令 $x = \hat{u} + \hat{\sigma}y$, 有 Y 服从标准正态分布。 $\Phi(\cdot)$ 和 $\varphi(\cdot)$ 分别表示标准正态累积分布函数和密度函数, 则有

$$\begin{aligned}
C(S_0, T) &= e^{-rT} \int_D (e^{\hat{u} + \hat{\sigma}y} - K) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\
&= e^{-rT + \hat{u} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2} \int_{-d_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\hat{\sigma})^2}{2}} dy \\
&= e^{-rT + \hat{u} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2} \int_{-d_2 - \hat{\sigma}}^{\infty} \varphi(y) dy - K e^{-rT} \Phi(d_2) \\
&= \exp \left\{ \ln S_0 - \frac{1}{2} rT - \frac{\lambda + \alpha^2}{4} \sigma^2 T + \frac{2H + 3 - 2^{2H}}{(2H + 1)(H + 1)} \beta^2 \sigma^2 T^{2H} \right\} \Phi(d_2 + \hat{\sigma}) \\
&\quad - K e^{-rT} \Phi(d_2) \\
&= S_0 \exp \left\{ -\frac{1}{2} rT + \frac{(H - 1)2^{2H-1} + 1}{2(2H + 1)(H + 1)} \beta^2 \sigma^2 T^{2H} \right\} \Phi(d_1) - K e^{-rT} \Phi(d_2) \\
&= S_0 e^A \Phi(d_1) - K e^{-rT} \Phi(d_2).
\end{aligned}$$

这里

$$D = \{x | e^x - K > 0\} = \{y | e^{\hat{u} + \hat{\sigma}y} > K\} = \left\{ y \mid y > \frac{1}{\hat{\sigma}} (\ln K - \hat{u}) \right\} = \{y | y > -d_2\}.$$

其中 d_1 、 d_2 和 A 分别由式(3.6)、(3.5)和(3.7)定义。证毕。

同理, 对于几何亚式看跌期权定价有如下推论。

推论 3.1.1 对于固定行权价为 K 、到期日为 T 几何亚式看跌期权定价几何亚

式看跌期权的价格 $P(S_0, T)$ 为

$$P(S_0, T) = Ke^{-rT} \Phi(-d_2) - S_0 e^A \Phi(-d_1), \quad (3.8)$$

其中 d_1 、 d_2 和 A 分别由式(3.6)、(3.5)和(3.7)定义。

3.2 灵敏度分析

期权价格公式中包含着许多参数，如股价，无风险利率，波动率等，这些参数对期权价格会产生较大的影响。对公式中的各参数分别取偏导就被记作不同的希腊字母。下面给出几何亚式期权的希腊字母，并讨论定价模型中各参数对期权价格的影响。

3.2.1 几何亚式期权的希腊字母

由公式(3.4)，通过求偏导可得几何亚式看涨期权 $C(S_0, T)$ 的希腊字母如下：

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial C}{\partial S_0} = e^A \Phi(d_1) + [S_0 e^A \Phi'(d_1) - Ke^{-rT} \Phi'(d_2)] \frac{\partial d_2}{\partial S_0}, \\ \Gamma &= \frac{\partial^2 C}{\partial S_0^2} = e^A \Phi'(d_1) \left(\frac{\partial d_1}{\partial S_0} + \frac{\partial d_2}{\partial S_0} \right) + [S_0 e^A \Phi''(d_1) - Ke^{-rT} \Phi''(d_2)] \frac{\partial d_2}{\partial S_0} \\ &\quad + [S_0 e^A - Ke^{-rT}] \Phi'(d_2) \frac{\partial^2 d_2}{\partial S_0^2}, \\ \rho &= \frac{\partial C}{\partial r} = \left[Ke^{-rT} \Phi(d_2) - \frac{1}{2} S_0 e^A \Phi(d_1) \right] T + [S_0 e^A \Phi'(d_1) - Ke^{-rT} \Phi'(d_2)] \frac{\partial d_2}{\partial r}, \\ \Theta &= \frac{\partial C}{\partial T} = S_0 e^A \left[-\frac{1}{2} r \Phi(d_1) + \Phi'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial T} \right] - Ke^{-rT} \left[\Phi'(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial T} - r \Phi(d_2) \right], \\ Vega &= \frac{\partial C}{\partial \sigma} = \frac{(H-1)2^{2H-1}+1}{(2H+1)(H+1)} \beta^2 T^{2H} S_0 \sigma e^A \Phi(d_1) + S_0 e^A \Phi'(d_1) \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial \sigma} + \\ &\quad [S_0 e^A \Phi'(d_1) - Ke^{-rT} \Phi'(d_2)] \frac{\partial d_2}{\partial \sigma}, \end{aligned}$$

同理可得几何亚式看跌期权的希腊字母，在此省略。

3.2.2 不同 H 、 λ 下各参数与期权价格的关系

本节基于定理 3.1.3 中的定价公式，通过数值实验讨论 Hurst 指数 H 、泊松强度 λ 以及其他参数对期权价格的影响。

考虑一种标的资产为股票的几何亚式看涨期权，其标的资产遵循混合次分数

跳过程。假设当前股价为 33 美元，到期 4 个月，股价波动率为 20%，无风险利率为 1.85%，执行价格为 25 美元，泊松强度为 5。

在 $\lambda = 5$ 的情况下，图 3.1 和图 3.2 分别给出了不同 H 下股价对看涨期权价格和看跌期权价格的影响。由图 3.1 可知，局部上，在同一 H 下看涨期权价格对股价的偏导数大于 0。所以，期权价格是股价的单调递增函数。在同一股价 S_0 下，随着 Hurst 指数 H 的增大，看涨期权价格减小；由图 3.2 可知，局部上，在同一 H 下看跌期权价格对股价的偏导数小于 0。所以，期权价格是股价的单调递减函数。在同一股价 S_0 下，随着 Hurst 指数 H 的增大，看涨期权价格减小。

在 $H=0.75$ 情况下，图 3.3 和图 3.4 分别给出了不同 λ 下股价对看涨期权价格和看跌期权价格的影响。由图 3.3 可知，局部上，在同一 λ 下，看涨期权价格是股价的单调递增函数。在同一股价 S_0 下，随着 λ 的增大，看涨期权价格增大；由图 3.4 可知，局部上，在同一 λ 下，看跌期权价格是股价的单调递减函数。在同一股价 S_0 下，随着 λ 的增大，看涨期权价格增大。

在 $\lambda = 5$ 的情况下，图 3.5 和图 3.6 分别给出了不同 H 下无风险利率对看涨期权价格和看跌期权价格的影响。在 $H=0.75$ 情况下，图 3.7 和图 3.8 分别给出了不同 λ 下无风险利率对看涨期权价格和看跌期权价格的影响。总的来看，无论是不同 H 下，还是不同 λ 下，看涨期权价格都是无风险利率的增函数，看跌期权价格都是无风险利率的减函数，并且对看跌期权的影响比看涨期权的更要明显。

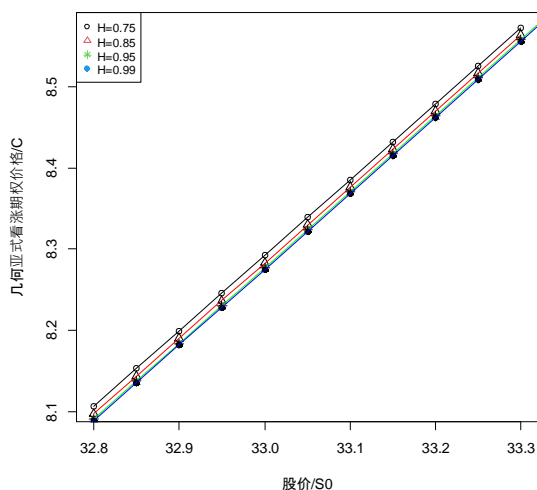


图 3.1 不同 H 值下股价 S_0 对看涨期权价格的影响

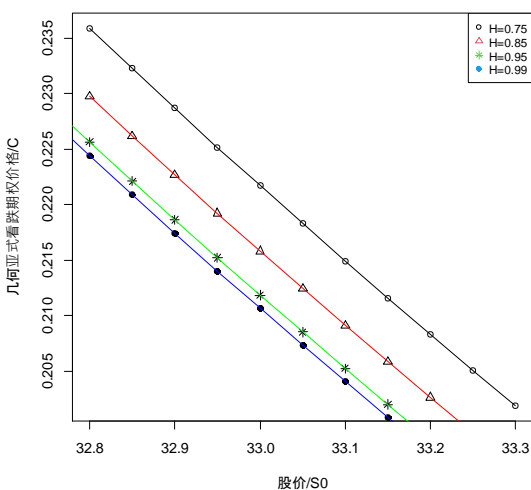


图 3.2 不同 H 值下股价 S_0 对看跌期权价格的影响

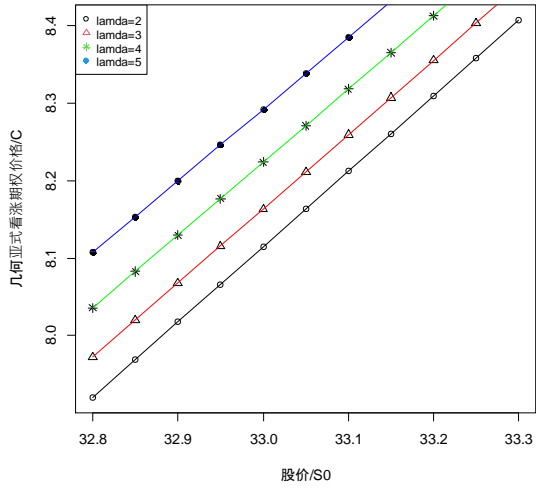


图 3.3 不同 λ 值下股价 S_0 对看涨期权价格的影响

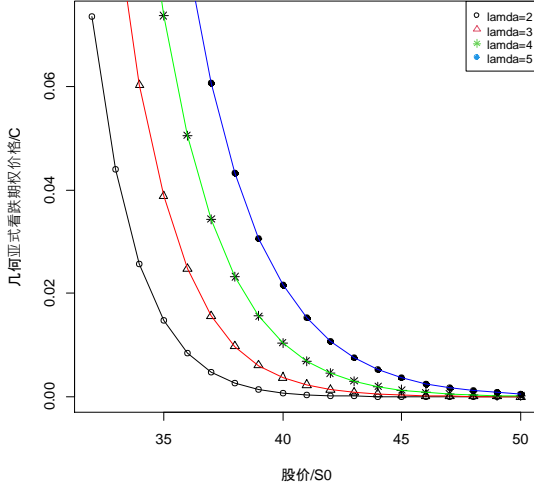


图 3.4 不同 λ 值下股价 S_0 对看涨期权价格的影响

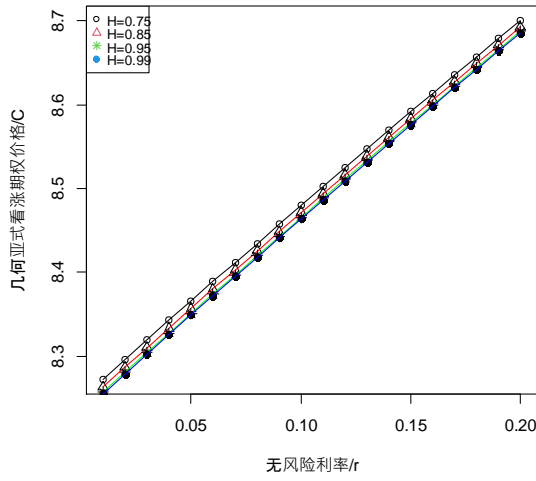


图 3.5 不同 H 值下无风险利率 r 对看涨期权价格的影响

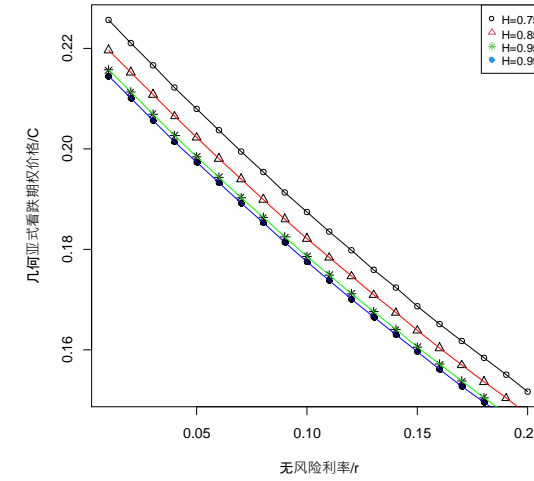


图 3.6 不同 H 值下无风险利率 r 对看涨期权价格的影响

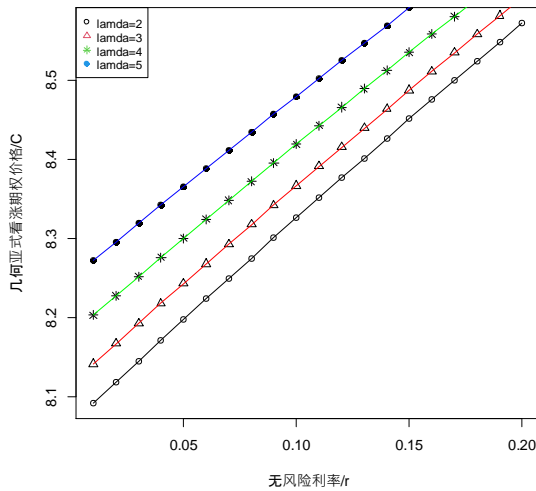


图 3.7 不同 λ 值下无风险利率 r 对看涨期权价格的影响

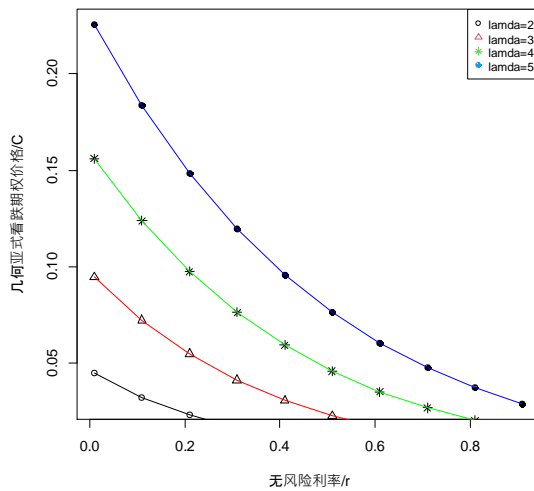


图 3.8 不同 λ 值下无风险利率 r 对看涨期权价格的影响

在 $\lambda = 5$ 的情况下，图 3.9 和图 3.10 分别给出了不同 H 下波动率对看涨期权价格和看跌期权价格的影响。在 $H=0.75$ 情况下，图 3.11 和图 3.12 分别给出了不同 λ 下波动率对看涨期权价格和看跌期权价格的影响。总的来看，无论是不同 H 下，还是不同 λ 下，看涨期权价格和跌期权价格均是波动率的增函数，且对看跌期权的影响和看涨期权的一致。

在 $\lambda = 5$ 的情况下，图 3.13 和图 3.14 分别给出了不同 H 下到期时间对看涨期权价格和看跌期权价格的影响。在 $H=0.75$ 情况下，图 3.15 和图 3.16 分别给出了不同 λ 下到期时间对看涨期权价格和看跌期权价格的影响。总的来看，无论是不同 H 下，还是不同 λ 下，看涨期权价格和看跌期权价格均是到期函数的增函数，且对看跌期权的影响和看涨期权的一致。

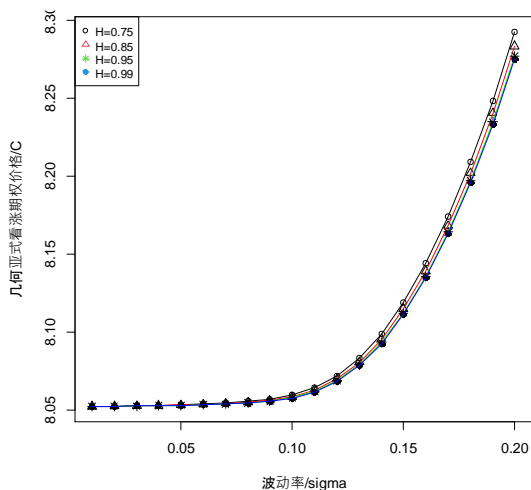


图 3.9 不同 H 值下波动率 σ 对看涨期权价格的影响

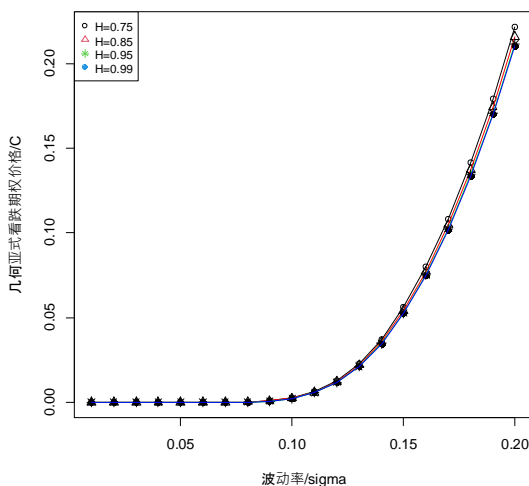


图 3.10 不同 H 值下波动率 σ 对看跌期权价格的影响

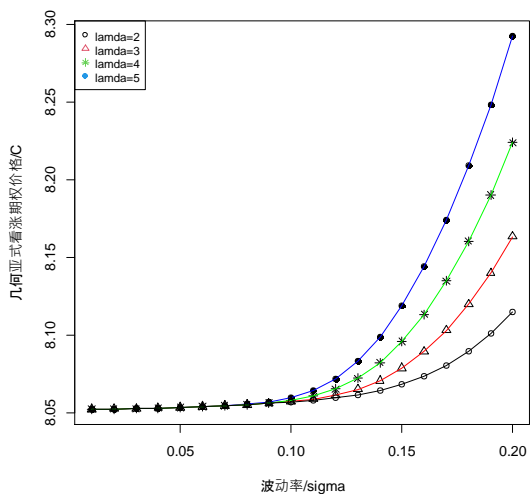


图 3.11 不同 λ 值下波动率 σ 对看涨期权价格的影响

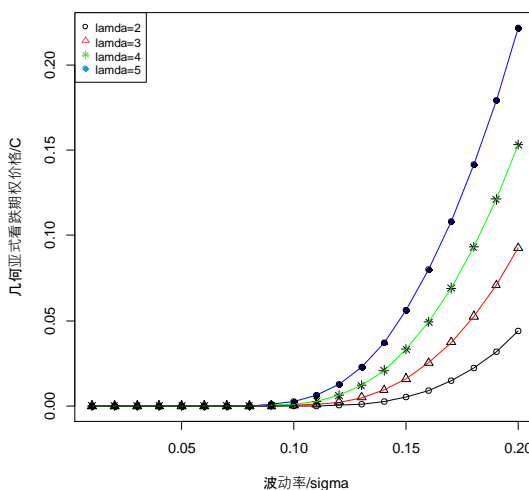


图 3.12 不同 λ 值下波动率 σ 对看跌期权价格的影响

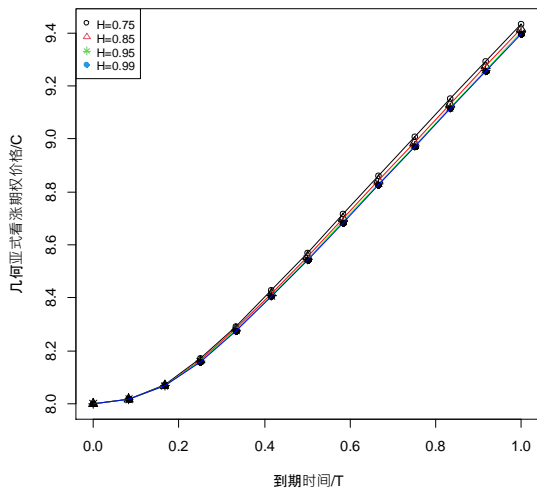


图 3.13 不同 H 值下到期时间 T 对看涨期权价格的影响

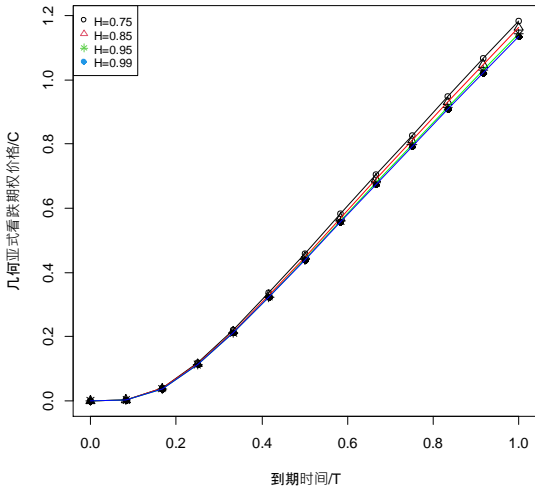


图 3.14 不同 H 值下到期时间 T 对看跌期权价格的影响

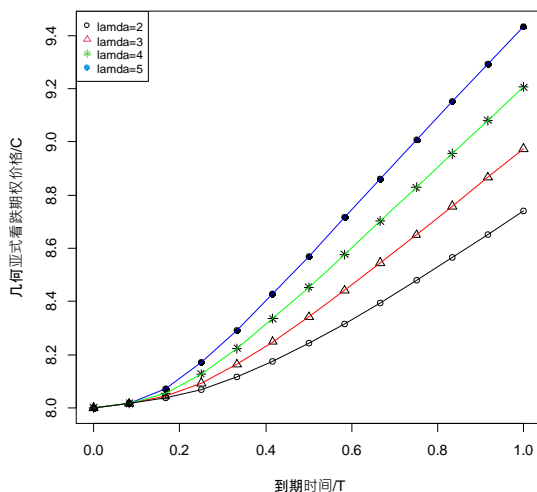


图 3.15 不同 λ 值下到期时间 T 对看涨期权价格的影响

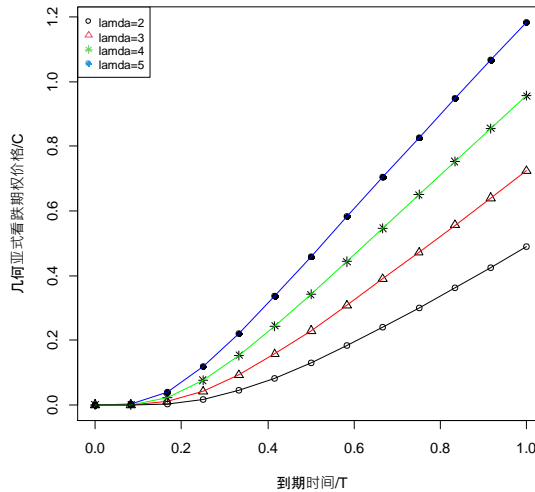


图 3.16 不同 λ 值下到期时间 T 对看跌期权价格的影响

此外，从上述所有图中可看出：

第一，在其他参数固定的情况下，随着 Hurst 指数 H 的增大，看涨期权价格和看跌期权价格均是 H 的减函数。此外， H 增大，期权价格减小，是符合实际情况的，这是因为当 H 增大时，保持金融市场原有趋势的惯性越大，标的资产的路径就越光滑，价格波动越小，从而降低标的资产带来的回报，导致期权价格下降。

第二，在其他参数固定的情况下，随着 λ 的增大，看涨期权的价格和看跌期权的价格均增大。也就是说，泊松强度 λ 与看涨看跌期权价格均成正比。泊松强度越大，标的资产的波动就越剧烈，即投资者面临的风险越大，从而带来高收益高回报，导致期权价格上升。

4 Monte Carlo 模拟和实证分析

基于以上混合次分数跳过程模型，本章中推导出了混合次分数跳过程下，标的资产波动率参数估计的表达式。然后，选取上证综指和深证成指作为标的资产，进行了 Monte Carlo 模拟和实证分析，从而验证用混合次分数跳过程模型刻画股价波动的合理性和优越性。

4.1 数据选取

本文选择上证综指(000001.SH)、深证成指(399001.SZ)作为研究对象，分别选取 2022 年 9 月 30 日至 2023 年 9 月 30 日共 243 个日度收盘价作为观测值，该数据来源于 Wind 数据库。图 4.1、4.2 分别给出了上证综指、深证成指的收盘价时序图。从图中可以看到两种资产价格都经历了多次跳跃，这表明采用带有跳跃的混合分数布朗运动来描述标的资产的运动是合适的。

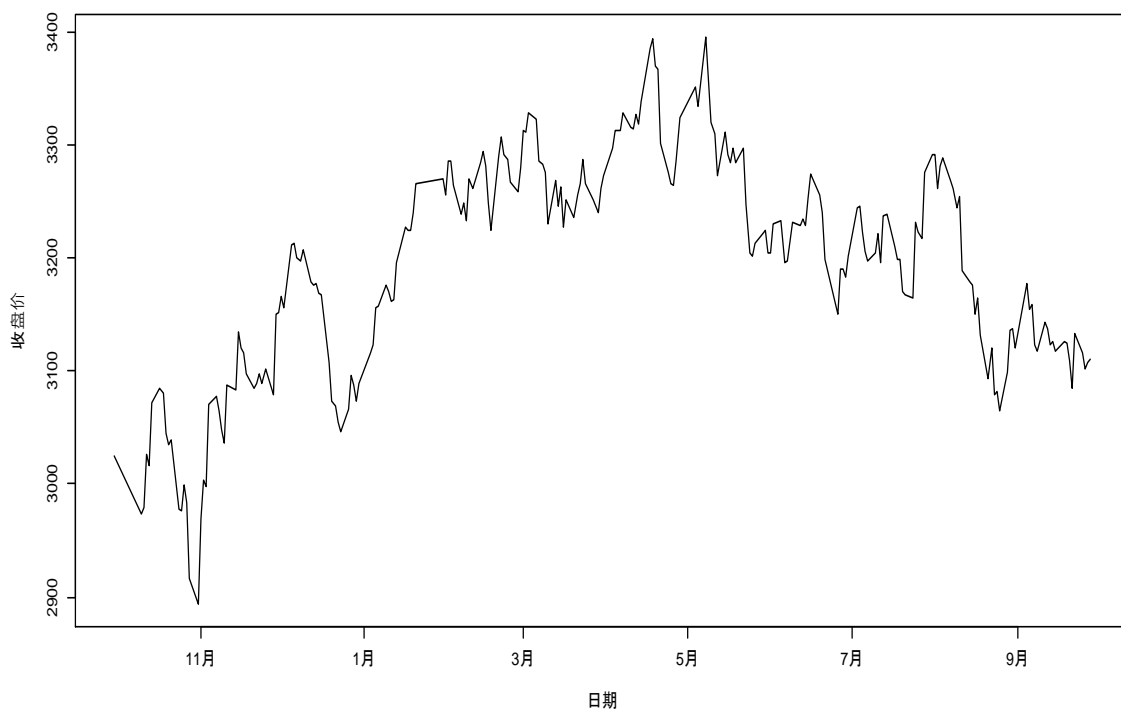


图 4.1 上证综指收盘价时序图

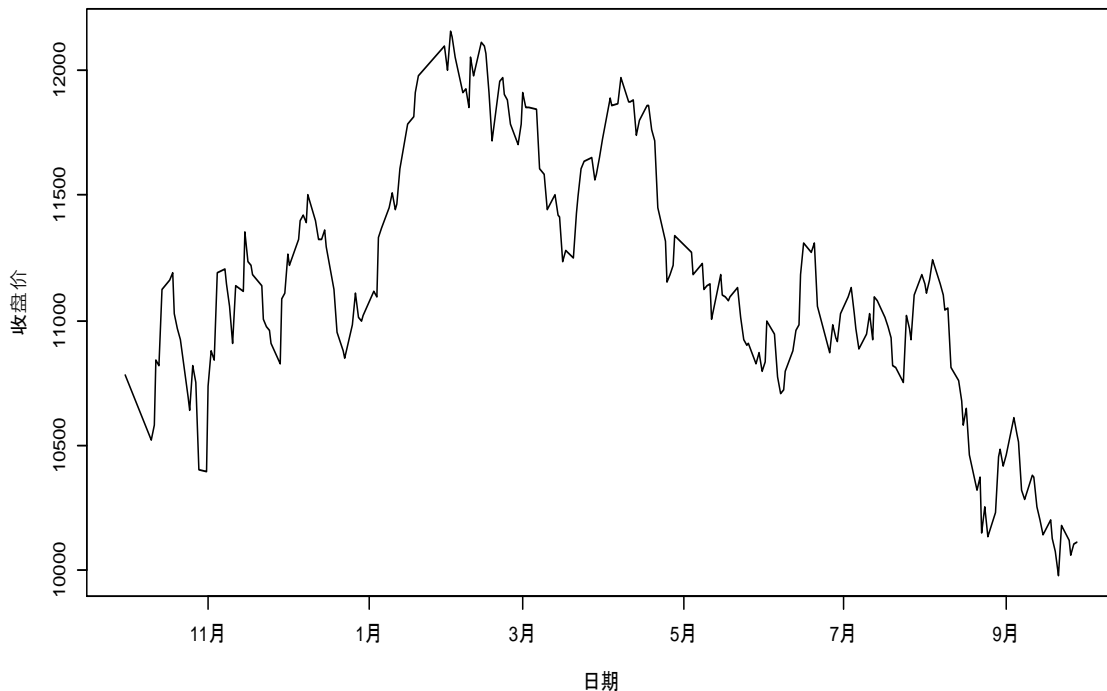


图 4.2 深证成指收盘价时序图

4.2 参数估计

本部分对模型中的一些未知参数进行了估计，得到了其参数估计的表达式。下面介绍了 Hurst 指数和波动率的参数估计。

(1) Hurst 指数的估计

本文使用重标极差分析法(R/S 分析法^[4])计算 Hurst 指数。考虑一个时间序列 $\{x_i, 1 \leq i \leq n\}$ ，则其均值序列为

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

则有

$$x_{k,n} = \sum_{i=1}^k x_i - \bar{x}_n, \quad 1 \leq k \leq n.$$

又

$$R_n = \max_{1 \leq k \leq n} (x_{k,n}) - \min_{1 \leq k \leq n} (x_{k,n}),$$

其标准差为

$$S_n = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2}.$$

参考文献[4], 则有

$$\frac{R_n}{S_n} = cn^H, \quad (4.1)$$

对方程(4.1)两边同时取对数, 则有

$$\ln\left(\frac{R_n}{S_n}\right) = \ln c + H \ln n, \quad (4.2)$$

此处, c 为常数。此时根据方程(4.2), 通过偏最小二乘回归分析可以得到 Hurst 指数的估计值。

通过以上原理, 在 R 语言中计算出所选上证综指和深证成指的收盘价序列的 Hurst 指数的值分别为 0.85 和 0.88。

(2) 波动率的估计

考虑到股票价格过程 $\{S_t, t \geq 0\}$ 满足方程(3.1), 方程如下:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dX_t,$$

此处, r 代表无风险利率, 是一个常数; σ 代表股票价格的波动率, 是一个非负常数; X_t 代表混合次分数跳过程, 其微分表达式如下:

$$dX_t = \varepsilon \sqrt{(\alpha^2 + 2\beta^2 H(2 - 2^{2H-1})t^{2H-1} + \lambda)dt}, \quad (4.3)$$

此处, $\varepsilon \sim N(0,1)$ 。

令 $G_t = \ln S_t$, 既有 G_t 服从正态分布。根据方程(3.1), (4.3) 以及定理 3.1.2, 则有

$$\begin{aligned} dG_t &= \frac{\partial G_t}{\partial t} dt + \frac{\partial G_t}{\partial S_t} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G_t}{\partial S_t^2} (dS_t)^2 \\ &= \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{1}{2} \frac{1}{S_t^2} (dS_t)^2 \\ &= \frac{1}{S_t} (rS_t dt + \sigma S_t dX_t) - \frac{1}{2} \sigma_t^2 (dX_t)^2, \end{aligned}$$

又

$$(dX_t)^2 = (\alpha^2 + 2\beta^2 H(2 - 2^{2H-1})t^{2H-1} + \lambda)dt.$$

则有

$$\begin{aligned} dG_t &= \left(r - \frac{1}{2} \sigma_t^2 (\alpha^2 + 2\beta^2 H(2 - 2^{2H-1})t^{2H-1} + \lambda) \right) dt + \\ &\quad \sigma_t \varepsilon \sqrt{(\alpha^2 + 2\beta^2 H(2 - 2^{2H-1})t^{2H-1} + \lambda)dt}. \end{aligned}$$

通过离散化，有

$$\begin{aligned}\Delta G_t &= \ln S_{t+\Delta t} - \ln S_t = \ln \frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} \\ &= \left(r - \frac{1}{2} \sigma_t^2 (\alpha^2 + 2\beta^2 H(2 - 2^{2H-1})t^{2H-1} + \lambda) \right) \Delta t + \\ &\quad \sigma_t \varepsilon \sqrt{(\alpha^2 + 2\beta^2 H(2 - 2^{2H-1})t^{2H-1} + \lambda) \Delta t}.\end{aligned}$$

容易得到

$$\begin{aligned}\frac{\ln \frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} - \left(r - \frac{1}{2} \sigma_t^2 (\alpha^2 + 2\beta^2 H(2 - 2^{2H-1})t^{2H-1} + \lambda) \right) \Delta t}{\sqrt{\sigma_t^2 (\alpha^2 + 2\beta^2 H(2 - 2^{2H-1})t^{2H-1} + \lambda) \Delta t}} &\sim N(0,1), \\ E \left(\ln \frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} \right) &= \left(r - \frac{1}{2} \sigma_t^2 (\alpha^2 + 2\beta^2 H(2 - 2^{2H-1})t^{2H-1} + \lambda) \right) \Delta t, \\ Var \left(\ln \frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} \right) &= \sigma_t^2 (\alpha^2 + 2\beta^2 H(2 - 2^{2H-1})t^{2H-1} + \lambda) \Delta t.\end{aligned}$$

则可解得

$$\sigma_t^2 = \frac{Var \left(\ln \frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} \right)}{(\alpha^2 + 2\beta^2 H(2 - 2^{2H-1})t^{2H-1} + \lambda) \Delta t} \quad (4.4)$$

当 $\Delta t = 1$ 时, $E \left(\ln \frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} \right)$ 和 $Var \left(\ln \frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} \right)$ 分别表示日收盘价对数收益率的均值和方差。

通过 R 语言计算得到上证综指的日收盘价对数收益率的均值和方差分别为:

$$E \left(\ln \frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} \right) = 0.00012, \quad Var \left(\ln \frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} \right) = 0.00007.$$

则

$$\sigma_t^2 = \frac{0.00007}{\alpha^2 + 2\beta^2 H(2 - 2^{2H-1})t^{2H-1} + \lambda}.$$

取上证综指 2022 年 9 月 30 日的收盘价 3024.39 作为初始值 S_0 , 其余参数取值为: $\alpha = \beta = 1$, $\lambda = 5$, $r = 0.0255$ 。

同理有, 深证成指的日收盘价对数收益率的均值和方差分别为:

$$E \left(\ln \frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} \right) = 0.00026, \quad Var \left(\ln \frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} \right) = 0.00012.$$

则

$$\sigma_t^2 = \frac{0.00012}{\alpha^2 + 2\beta^2 H(2 - 2^{2H-1})t^{2H-1} + \lambda}.$$

取深证成指 2022 年 9 月 30 日的收盘价 10778.61 作为初始值 S_0 ，其余参数取值为： $\alpha=\beta=1$ ， $\lambda=5$ ， $r=0.0255$ 。

4.3 Monte Carlo 模拟

根据方程(3.1)模拟指数价格变动的过程，步骤如下：

第一步：离散化上证综指价格的变化过程

$$\Delta S_t = S_{t+\Delta t} - S_t = rS_t\Delta t + \sigma_{t+\Delta t}\varepsilon_{t+\Delta t}S_t\sqrt{(\alpha^2 + 2\beta^2H(2 - 2^{2H-1})t^{2H-1} + \lambda)\Delta t},$$

取 $\Delta t = 1$ ，则有

$$S_{t, i} - S_{t, i-1} = rS_{t, i-1} + \sigma_i\varepsilon_iS_{t, i-1}\sqrt{(\alpha^2 + 2\beta^2H(2 - 2^{2H-1})(i - 1)^{2H-1} + \lambda)},$$

此处， ε_i 表示 i 时刻的标准正态随机变量， σ_i 表示 i 时刻的标准差。尤其，当 $i=1$ 时，有

$$S_{t, 1} = (r + 1)S_0 + \sigma_1\varepsilon_1S_0\sqrt{\alpha^2 + \lambda},$$

当 $i=2$ 时，有

$$S_{t, 2} = (r + 1)S_{t, 1} + \sigma_2\varepsilon_2S_{t, 1}\sqrt{\alpha^2 + 2\beta^2H(2 - 2^{2H-1}) + \lambda},$$

当 $i=3$ 时，有

$$S_{t, 3} = (r + 1)S_{t, 2} + \sigma_3\varepsilon_3S_{t, 2}\sqrt{\alpha^2 + 2\beta^2H(2 - 2^{2H-1})2^{2H-1} + \lambda},$$

⋮

当 $i=243$ 时，有

$$S_{t, 243} = (r + 1)S_{t, 242} + \sigma_{243}\varepsilon_{243}S_{t, 242}\sqrt{\alpha^2 + 2\beta^2H(2 - 2^{2H-1})(242)^{2H-1} + \lambda},$$

则通过迭代计算，最终会获得 243 个模拟值。

第二步：运用 R 语言进行模拟实验，每个指数随机模拟三次，然后比较真实路径与模拟路径。

(1)上证综指模拟结果如图 4.3, 4.4, 4.5 所示。图中，黑色的线代表上证综指的真实路径，红色、绿色和蓝色的线分别代表混合次分数跳过程下、几何布朗运动下和混合次分数布朗运动下的模拟路径。

从图 4.3-4.5 这三个图中，可以得到：从整体上看，每次模拟都是基于混合

次分数跳过程的模拟路径更加贴近股票价格的真实路径。也就是说，用混合次分数跳过程去拟合股票价格波动的效果明显优于传统的几何布朗运动以及混合次分数布朗运动。

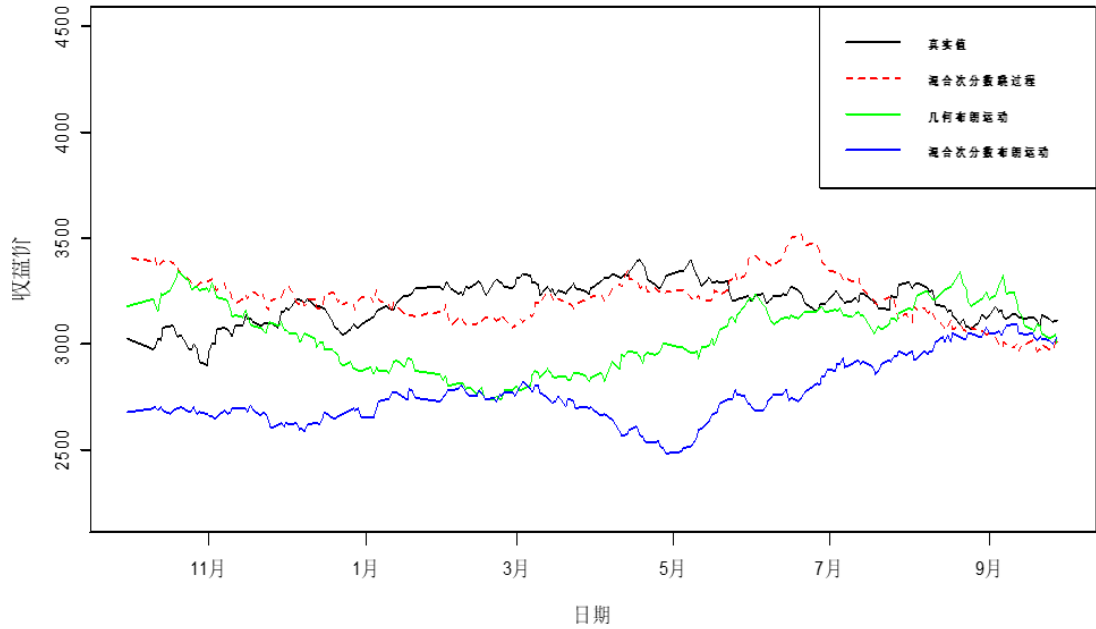


图 4.3 真实路径与第一次模拟路径

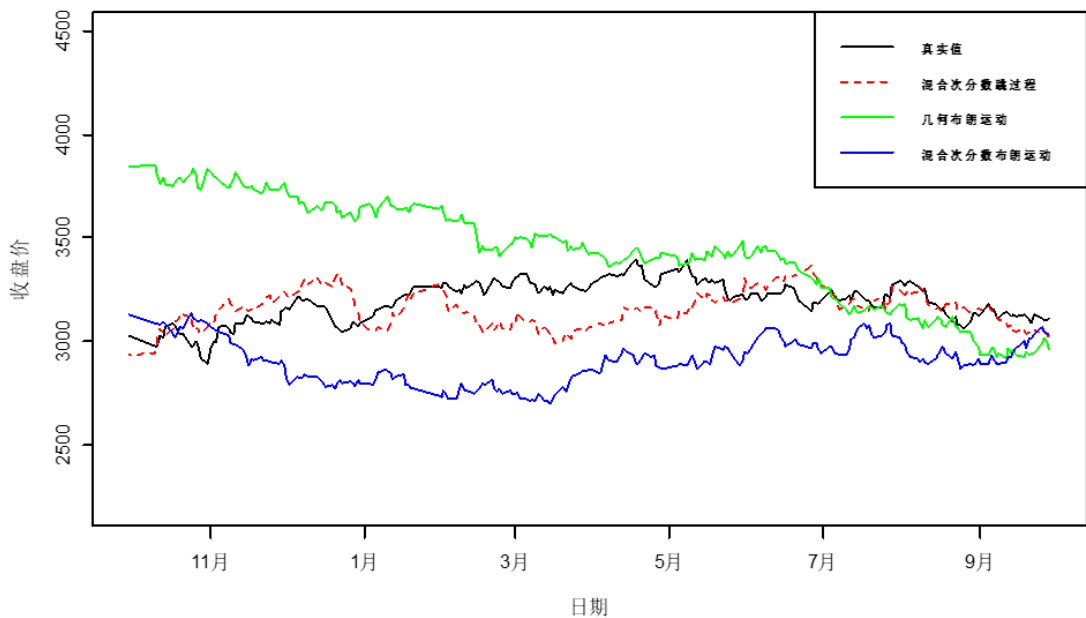


图 4.4 真实路径与第二次模拟路径

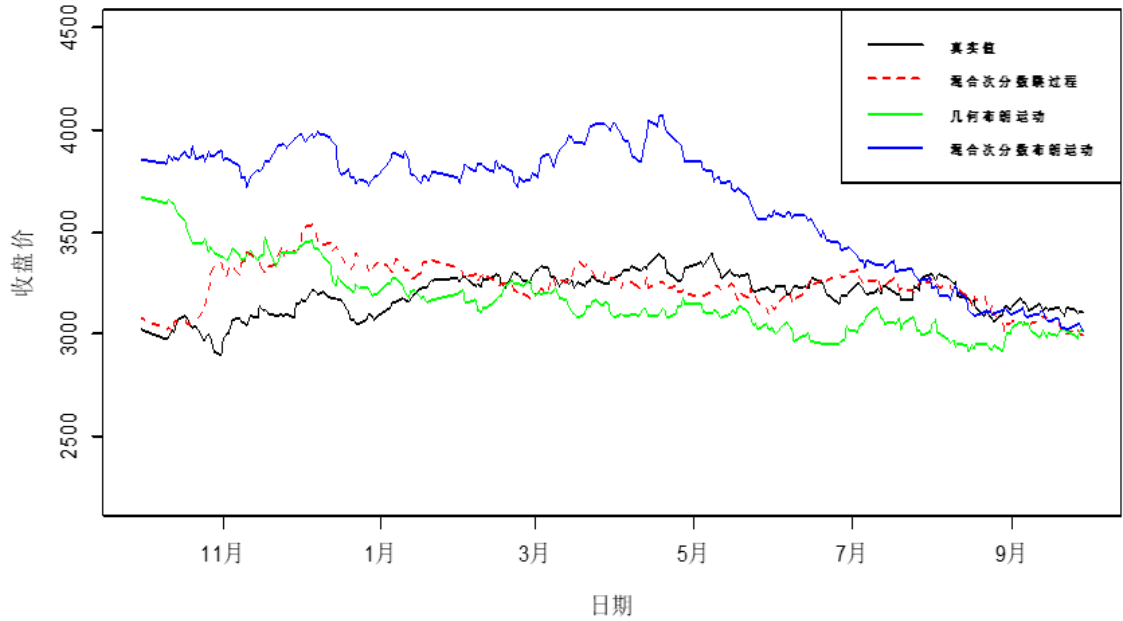


图 4.5 真实路径与第三次模拟路径

(2)深证成指模拟结果如图 4.6, 4.7, 4.8 所示。从图 4.6-4.8 这三个图中可以得出同(1)中的结论。总的来说,不管是上证综指还是深证成指,每次模拟的最优结果均是基于混合次分数跳过程,可见,相比其他两种随机过程,混合次分数跳过程刻画具有带跳和长记忆性的股票运动过程最合适、最合理、且拟合效果最好。

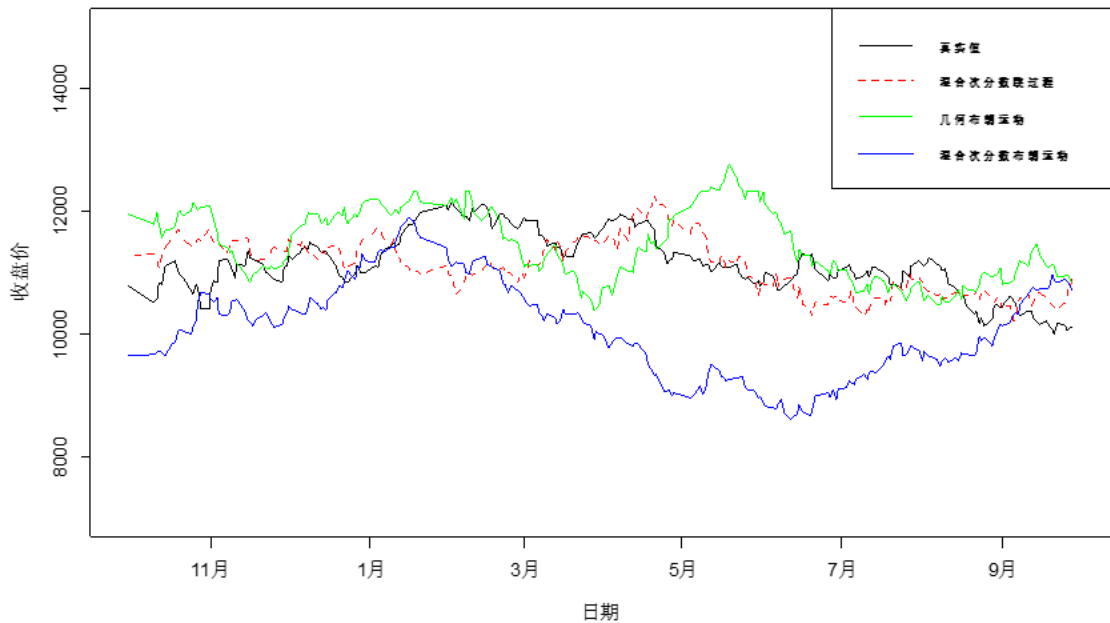


图 4.6 真实路径与第一次模拟路径

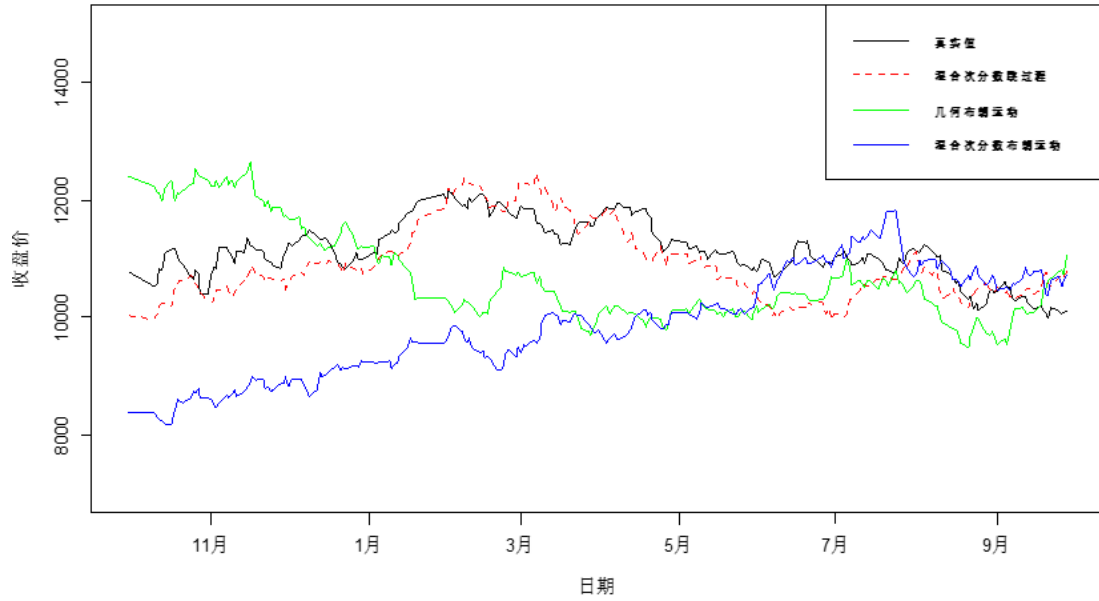


图 4.7 真实路径与第二次模拟路径

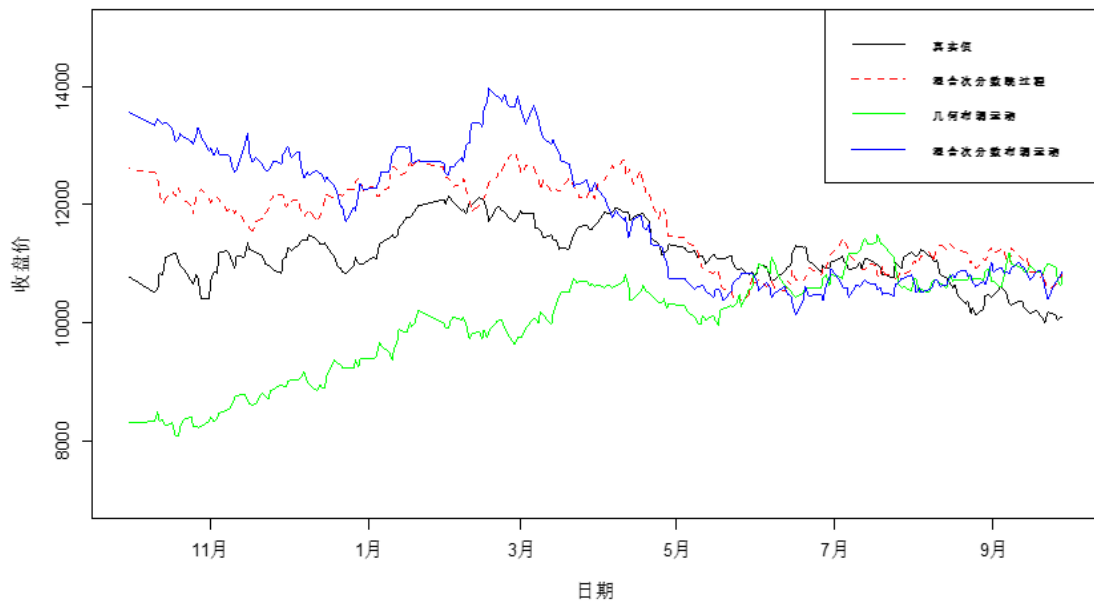


图 4.8 真实路径与第三次模拟路径

4.4 拟合效果分析

最后，对不同模型的拟合效果进行误差分析。采用平均绝对误差(MAE) 以及均方根误差(RMSE) 这 2 个指标对不同模型的拟合效果进行评价。指标的定义如下：

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\hat{S}_i - S_i|,$$

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{S}_i - S_i)^2}.$$

其中, S_i 表示股票的真实价格, \hat{S}_i 表示模拟价格, n 表示样本量。

(1) 上证综指模拟价格与真实价格的描述性统计如表 4.1、4.2、4.3 所列, 误差分析的具体结果如表 4.4 所列。

表 4.1 第一次模拟值的描述性统计分析

第一次模拟值	均值	最大值	最小值	中位数
真实值	3192.336	3395	2893.48	3204.75
混合次分数 跳过程	3175.934	3489.729	2998.012	3189.926
几何布朗运动	2983.029	3450.706	2703.983	3026.510
混合次分数 布朗运动	2602.946	3239.717	2505.657	2600.802

表 4.2 第二次模拟值的描述性统计分析

第二次模拟值	均值	最大值	最小值	中位数
真实值	3192.336	3395	2893.48	3204.75
混合次分数 跳过程	3278.389	3450.122	2997.923	3303.123
几何布朗运动	3538.209	3889.497	2989.102	3466.689
混合次分数 布朗运动	3388.867	3629.109	2728.293	2739.028

表 4.3 第三次模拟值的描述性统计分析

第三次模拟值	均值	最大值	最小值	中位数
真实值	3192.336	3395	2893.48	3204.75
混合次分数 跳过程	3187.410	3547.122	2992.339	3191.171
几何布朗运动	3273.344	3675.367	3070.977	3266.869
混合次分数 布朗运动	3732.253	4031.177	2095.576	3712.028

表 4.4 不同模拟路径的误差分析

评价指标	模拟次数	MAE	RMSE
几何布朗运动	第一次	478.9790	526.8636
	第二次	456.9086	502.4689
	第三次	336.1521	356.3577
混合次分数 布朗运动	第一次	612.8037	695.4572
	第二次	665.0386	611.8637
	第三次	531.0074	571.3042
混合次分数 跳过程	第一次	121.4158	148.5055
	第二次	108.9634	136.5607
	第三次	103.8302	139.0524

从上证综指的三次模拟值的描述性统计结果可以看出，与其余 2 个模型相比，混合次分数跳过程模型下股价模拟值的均值、中位数、最大值以及最小值等都比较接近真实值。这说明混合次分数跳过程模型的整体拟合效果是最佳的。其次，从模型的稳定来看，混合次分数跳过程模型下的三次模拟结果相差不大，说明模型稳定性较好。并且，从模拟的结果来看，模型稳定性表现最差的是混合次分数布朗运动。

(2)深证成指模拟价格与真实价格的描述性统计如表 4.5、4.6、4.7 所列，误差分析的具体结果如表 4.8 所列。

从深证成指的三次模拟值的描述性统计结果可以看出，混合次分数跳过程模型下，描述性统计值整体最接近真实值，几何布朗运动模型次之，混合次分数布朗运动模型拟合效果最差。从模型的稳定来看，混合次分数跳过程模型的稳定性较好，混合次分数布朗运动和几何布朗运动模型的稳定性较差。

表 4.5 第一次模拟值的描述性统计分析

第一次模拟值	均值	最大值	最小值	中位数
真实值	11140.49	12158.19	9981.67	11108.5
混合次分数 跳过程	10590.84	12009.27	10478.84	11090.57
几何布朗运动	11973.71	12899.83	10632.55	11012.24
混合次分数 布朗运动	9994.62	11595.42	9049.056	9795.42

表 4.6 第二次模拟值的描述性统计分析

第二次模拟值	均值	最大值	最小值	中位数
真实值	11140.49	12158.19	9981.67	11108.5
混合次分数 跳过程	11031.26	12233.71	9847.68	11288.4
几何布朗运动	10039.21	12638.98	9184.92	10473.562
混合次分数 布朗运动	9566.264	11839.39	8050.962	9646.474

表 4.7 第三次模拟值的描述性统计分析

第三次模拟值	均值	最大值	最小值	中位数
真实值	11140.49	12158.19	9981.67	11108.51
混合次分数 跳过程	11311.45	12983.22	10021.88	11091.37
几何布朗运动	9887.236	11154.53	8118.837	9862.718
混合次分数 布朗运动	11627.76	13927.46	10042.47	11222.71

表 4.8 不同模拟路径的误差分析

评价指标	模拟次数	MAE	RMSE
几何布朗运动	第一次	752.7155	923.2921
	第二次	1198.7210	1597.3030
	第三次	1026.2987	14998.0276
混合次分数 布朗运动	第一次	1186.043	1287.338
	第二次	1952.4550	2367.380
	第三次	1012.9378	1297.3767
混合次分数 跳过程	第一次	624.0502	726.8400
	第二次	556.0205	709.1090
	第三次	724.0670	851.7735

从表 4.4 和 4.8 可以看出，三次模拟都是混合次分数跳过程模型的 MAE 和 RMSE 最小，由此也可以得出，相对于其他两个模型，混合次分数跳过程模型的拟合效果最好且最接近真实值。总的来说，对于不同的研究对象，不管是模型的稳定性还是拟合效果，都是混合次分数跳过程模型表现的最好。

5 混合次分数跳过程下几何亚式期权模糊定价

金融市场的不确定性不仅包括随机性，还有模糊性。但以上研究的内容只是基于随机性，没有考虑到模糊性。因此，本章考虑在模糊利率、模糊波动率、模糊股票价格以及模糊泊松强度下，基于第3章得到的期权定价公式，构建几何亚式模糊期权定价公式。

5.1 几何亚式看涨期权模糊定价模型

下面以定理的形式给出几何亚式看涨期权模糊价格及其模糊价格 c -截集 $(\tilde{C})_c$ 的区间端点。

定理 5.1.1 考虑模糊利率 \tilde{r} ，模糊波动率 $\tilde{\sigma}$ ，模糊股价 \tilde{S}_0 ，模糊泊松强度 $\tilde{\lambda}$ ，则固定行权价为 K 、到期日为 T 的几何亚式看涨期权模糊价格 $\tilde{C}(S_0, T)$ 为

$$\tilde{C}(S_0, T) = f(\tilde{S}_0, T, t, H, K, \tilde{r}, \tilde{\sigma}, \tilde{\lambda}) = \tilde{S}_0 e^{\tilde{A}} \Phi(\tilde{d}_1) - K e^{-\tilde{r}T} \Phi(\tilde{d}_2). \quad (5.1)$$

其中

$$\tilde{d}_2 = \frac{\ln\left(\frac{\tilde{S}_0}{K}\right) + \frac{1}{2}\tilde{r}T - \frac{\tilde{\lambda} + \alpha^2}{4}\tilde{\sigma}^2 T - \frac{2 - 2^{2H-1}}{2(2H+1)}\beta^2 \tilde{\sigma}^2 T^{2H}}{\sqrt{\frac{\tilde{\lambda} + \alpha^2}{2}\tilde{\sigma}^2 T + \frac{2H+3-2^{2H}}{(2H+1)(H+1)}\beta^2 \tilde{\sigma}^2 T^{2H}}}, \quad (5.2)$$

$$\tilde{d}_1 = \tilde{d}_2 + \sqrt{\frac{\tilde{\lambda} + \alpha^2}{2}\tilde{\sigma}^2 T + \frac{2H+3-2^{2H}}{(2H+1)(H+1)}\beta^2 \tilde{\sigma}^2 T^{2H}}, \quad (5.3)$$

$$\tilde{A} = -\frac{1}{2}\tilde{r}T + \frac{(H-1)2^{2H-1}+1}{2(2H+1)(H+1)}\beta^2 \tilde{\sigma}^2 T^{2H}. \quad (5.4)$$

定理 5.1.2 假设 \tilde{r} ， $\tilde{\sigma}$ ， \tilde{S}_0 和 $\tilde{\lambda}$ 都是三角模糊数，且有 $\tilde{r} = (r_1, r_2, r_3)$ ， $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ ， $\tilde{S}_0 = (S_1, S_2, S_3)$ ， $\tilde{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ ，则几何亚式看涨期权模糊价格 c -截集 $(\tilde{C})_c$ 的区间端点分别为

$$\tilde{C}_c^L = (\tilde{S}_0)_c^L e^{\tilde{A}_c^L} \Phi(\tilde{d}_1^+(c)) - K e^{-\tilde{r}_c^L T} \Phi(\tilde{d}_2^+(c)), \quad (5.5)$$

$$\tilde{C}_c^U = (\tilde{S}_0)_c^U e^{\tilde{A}_c^U} \Phi(\tilde{d}_1^-(c)) - K e^{-\tilde{r}_c^U T} \Phi(\tilde{d}_2^-(c)). \quad (5.6)$$

其中

$$\tilde{d}_2^+(c) = \frac{\ln\left(\frac{(\tilde{S}_0)_c^L}{K}\right) + \frac{1}{2}\tilde{r}_c^L T - \frac{\tilde{\lambda}_c^L + \alpha^2}{4}(\tilde{\sigma}_c^L)^2 T - \frac{2-2^{2H-1}}{2(2H+1)}\beta^2(\tilde{\sigma}_c^L)^2 T^{2H}}{\sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_c^L + \alpha^2}{2}(\tilde{\sigma}_c^L)^2 T + \frac{2H+3-2^{2H}}{(2H+1)(H+1)}\beta^2(\tilde{\sigma}_c^L)^2 T^{2H}}}, \quad (5.7)$$

$$\tilde{d}_1^+(c) = \tilde{d}_2^+(c) + \sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_c^L + \alpha^2}{2}(\tilde{\sigma}_c^L)^2 T + \frac{2H+3-2^{2H}}{(2H+1)(H+1)}\beta^2(\tilde{\sigma}_c^L)^2 T^{2H}}, \quad (5.8)$$

$$\tilde{d}_2^-(c) = \frac{\ln\left(\frac{(\tilde{S}_0)_c^U}{K}\right) + \frac{1}{2}\tilde{r}_c^U T - \frac{\tilde{\lambda}_c^U + \alpha^2}{4}(\tilde{\sigma}_c^U)^2 T - \frac{2-2^{2H-1}}{2(2H+1)}\beta^2(\tilde{\sigma}_c^U)^2 T^{2H}}{\sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_c^U + \alpha^2}{2}(\tilde{\sigma}_c^U)^2 T + \frac{2H+3-2^{2H}}{(2H+1)(H+1)}\beta^2(\tilde{\sigma}_c^U)^2 T^{2H}}}, \quad (5.9)$$

$$\tilde{d}_1^-(c) = \tilde{d}_2^-(c) + \sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_c^U + \alpha^2}{2}(\tilde{\sigma}_c^U)^2 T + \frac{2H+3-2^{2H}}{(2H+1)(H+1)}\beta^2(\tilde{\sigma}_c^U)^2 T^{2H}}, \quad (5.10)$$

$$\tilde{A}_c^L = -\frac{1}{2}\tilde{r}_c^L T + \frac{(H-1)2^{2H-1}+1}{2(2H+1)(H+1)}\beta^2(\tilde{\sigma}_c^L)^2 T^{2H}, \quad (5.11)$$

$$\tilde{A}_c^U = -\frac{1}{2}\tilde{r}_c^U T + \frac{(H-1)2^{2H-1}+1}{2(2H+1)(H+1)}\beta^2(\tilde{\sigma}_c^U)^2 T^{2H}. \quad (5.12)$$

证明 模糊数 \tilde{r} , $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\lambda}$, \tilde{S}_0 的 c -截集分别为 $\tilde{r}_c = [\tilde{r}_c^L, \tilde{r}_c^U]$, $\tilde{\sigma}_c = [\tilde{\sigma}_c^L, \tilde{\sigma}_c^U]$, $\tilde{\lambda}_c =$

$[\tilde{\lambda}_c^L, \tilde{\lambda}_c^U]$, $(\tilde{S}_0)_c = [(\tilde{S}_0)_c^L, (\tilde{S}_0)_c^U]$ 。则 \tilde{C}_c^L 和 \tilde{C}_c^U 分别表示如下

$$\tilde{C}_c^L = \min_{\tilde{r}_c^L \leq r \leq \tilde{r}_c^U, \tilde{\sigma}_c^L \leq \sigma \leq \tilde{\sigma}_c^U, (\tilde{S}_0)_c^L \leq S_0 \leq (\tilde{S}_0)_c^U, \tilde{\lambda}_c^L \leq \lambda \leq \tilde{\lambda}_c^U} C(S_0, T),$$

$$\tilde{C}_c^U = \max_{\tilde{r}_c^L \leq r \leq \tilde{r}_c^U, \tilde{\sigma}_c^L \leq \sigma \leq \tilde{\sigma}_c^U, (\tilde{S}_0)_c^L \leq S_0 \leq (\tilde{S}_0)_c^U, \tilde{\lambda}_c^L \leq \lambda \leq \tilde{\lambda}_c^U} C(S_0, T).$$

由(3.4)式可知,

$$\frac{\partial C}{\partial S_0} = e^A \Phi(d_1) + [S_0 e^A \Phi'(d_1) - K e^{-rT} \Phi'(d_2)] \frac{\partial d_2}{\partial S_0},$$

其中

$$\Phi(d_1) > 0, \Phi(d_2) > 0,$$

$$\Phi'(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(d_1)^2}{2}} > 0, \Phi'(d_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(d_2)^2}{2}} > 0, \frac{\partial d_2}{\partial S_0} = \frac{1}{|\tilde{\sigma}| S_0} > 0.$$

因为 $d_1 > d_2$, $\Phi(d_1) > \Phi(d_2)$, 结合 $C(S_0, T)$ 实际意义有 $C(S_0, T) > 0$, 在 $e^{-\frac{(d_1)^2}{2}} > e^{-\frac{(d_2)^2}{2}}$ 的情况下, 有

$$S_0 e^A \Phi'(d_1) - K e^{-rT} \Phi'(d_2) > 0,$$

则有

$$\frac{\partial C}{\partial S_0} = e^A \Phi(d_1) + [S_0 e^A \Phi'(d_1) - K e^{-rT} \Phi'(d_2)] \frac{\partial d_2}{\partial S_0} > 0,$$

$$\frac{\partial C}{\partial \sigma} = B S_0 \sigma e^A \Phi(d_1) + S_0 e^A \Phi'(d_1) \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial \sigma} + [S_0 e^A \Phi'(d_1) - K e^{-rT} \Phi'(d_2)] \frac{\partial d_2}{\partial \sigma} > 0,$$

$$\text{其中 } B = \frac{(H-1)2^{2H-1}+1}{(2H+1)(H+1)} \beta^2 T^{2H}.$$

同理，在 $\frac{\Phi'(d_1)-\Phi'(d_2)}{\Phi(d_1)-\Phi(d_2)} > \hat{\sigma}$ 的情况下，有

$$\frac{\partial C}{\partial r} = [K e^{-rT} \Phi(d_2) - \frac{1}{2} S_0 e^A \Phi(d_1)] T + [S_0 e^A \Phi'(d_1) - K e^{-rT} \Phi'(d_2)] \frac{\partial d_2}{\partial r} > 0,$$

同理，在 $\frac{\sigma^2}{\hat{\sigma}} > -d_2$ 的情况下，有

$$\frac{\partial C}{\partial \lambda} = [S_0 e^A \Phi'(d_1) - K e^{-rT} \Phi'(d_2)] \frac{\partial d_2}{\partial \lambda} + S_0 e^A \Phi'(d_1) \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial \lambda} > 0,$$

其中， d_1 、 d_2 的关系有两种情况，当 d_1 、 d_2 同号时，则必有 $d_2 < d_1 < 0$ ，当 d_1 、 d_2 异号时，则必有 $0 < d_1 < |d_2|$ 。此时， $C(S_0, T)$ 是 r 、 S_0 、 σ 和 λ 的单调递增函数，则有

$$\tilde{C}_c^L = f((\tilde{S}_0)_c^L, T, t, H, K, \tilde{r}_c^L, \tilde{\sigma}_c^L, \tilde{\lambda}_c^L),$$

$$\tilde{C}_c^U = f((\tilde{S}_0)_c^U, T, t, H, K, \tilde{r}_c^U, \tilde{\sigma}_c^U, \tilde{\lambda}_c^U).$$

即

$$\tilde{C}_c^L = (\tilde{S}_0)_c^L e^{\tilde{A}_c^L} \Phi(\tilde{d}_1^+(c)) - K e^{-\tilde{r}_c^L T} \Phi(\tilde{d}_2^+(c)),$$

$$\tilde{C}_c^U = (\tilde{S}_0)_c^U e^{\tilde{A}_c^U} \Phi(\tilde{d}_1^-(c)) - K e^{-\tilde{r}_c^U T} \Phi(\tilde{d}_2^-(c)).$$

证毕。

同理，几何亚式看跌期权模糊定价有如下推论。

推论 5.1.1 几何亚式看跌期权模糊价格 \tilde{P} 的 c -截集 $(\tilde{P})_c$ 的区间端点分别为：

$$\tilde{P}_c^L = K e^{-\tilde{r}_c^L T} \Phi(-\tilde{d}_2^+(c)) - (\tilde{S}_0)_c^L e^{\tilde{A}_c^L} \Phi(-\tilde{d}_1^+(c)), \quad (5.13)$$

$$\tilde{P}_c^U = K e^{-\tilde{r}_c^U T} \Phi(-\tilde{d}_2^-(c)) - (\tilde{S}_0)_c^U e^{\tilde{A}_c^U} \Phi(-\tilde{d}_1^-(c)). \quad (5.14)$$

其中， $\tilde{d}_2^+(c)$ 、 $\tilde{d}_1^+(c)$ 、 $\tilde{d}_2^-(c)$ 、 $\tilde{d}_1^-(c)$ 、 \tilde{A}_c^L 和 \tilde{A}_c^U 分别由式(5.7)、(5.8)、(5.9)、(5.10)、(5.11)和(5.12)定义。

5.2 数值模拟

本节中，给出了本文所提几何亚式期权模糊定价模型的数值结果。考虑一种标的资产为股票的几何亚式看涨期权。期权价为 25 美元，到期 4 个月。假设当前股价在 33 美元左右，股价波动率在 20%左右，无风险利率在 1.85%左右，泊松过程强度 λ 在 5 左右。假设 $t = 0$, $H=0.8$, $T= 1/3$, 模糊利率 \tilde{r} 、模糊波动率 $\tilde{\sigma}$ 、模糊股价 \tilde{S}_0 及模糊泊松强度 $\tilde{\lambda}$ 都为三角模糊数： $\tilde{r}=(0.018, 0.0185, 0.019)$, $\tilde{\sigma}=(0.19, 0.2, 0.21)$, $\tilde{S}_0=(32.8, 33, 33.3)$, $\tilde{\lambda}=(4, 5, 6)$ 。利用上面的模糊期权定价公式，可以得到如下结果。

5.2.1 参数置信度 c 对模糊区间的影响

在不同的置信度 c 下，几何亚式看涨期权的模糊价格，如表 5.1 所列。

表 5.1 不同置信度下的几何亚式看涨模糊价格

c	\tilde{C}_c	c	\tilde{C}_c
1.00	[15.5997, 15.5997]	0.95	[15.5892, 15.6141]
0.99	[15.5976, 15.6026]	0.94	[15.5872, 15.6169]
0.98	[15.5955, 15.6054]	0.93	[15.5851, 15.6198]
0.97	[15.5934, 15.6083]	0.92	[15.5830, 15.6227]
0.96	[15.5913, 15.6112]	0.91	[15.5809, 15.6256]

对于 $c= 0.95$ ，表示看涨期权价格处于闭区间[15.5892, 15.6141]，置信度为 0.95。从另一个角度看，如果投资者对置信度 0.95 感到满意，投资者就可从闭区间[15.5892, 15.6141]中获取任何值作为其以后使用的期权价格。

模糊价格 $(\tilde{C}_t)_c$ 的可能均值和可能下半方差如下：

$$\bar{M}(\tilde{C}_t) = \int_0^1 c[\tilde{C}_c^L + \tilde{C}_c^U] dc = 15.6135$$

$$LSVar(\tilde{C}_t) = 2 \int_0^1 c([\bar{M}(\tilde{C}_t) - \tilde{C}_c^L]^2) dc = 0.009$$

这意味着亚式期权价格的平均水平为 15.6135 美元，风险为 0.009 美元。

从表 5.1 可以看出，随着置信度 c 的逐渐增大，模糊价格区间的长度逐渐减

小，模糊价格越来越高。换句话说，从可能性均值的角度看，模糊性带来的不确定性提高了亚式期权的价格。

5.2.2 参数 Hurst 指数对模糊区间的影响

当 $c = 0.95$ 时，Hurst 指数对看涨看跌期权模糊价格的影响如图 5.1、5.2 所示，表 5.2 所列。

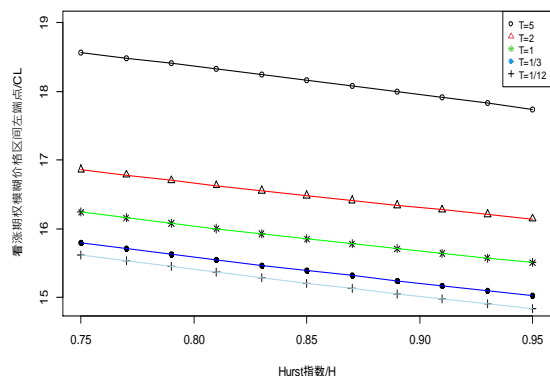


图 5.1 $c=0.95$ 时， T 、 H 对模糊价格区间左端点的影响

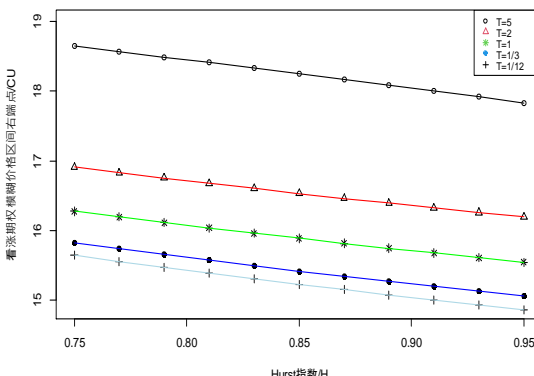


图 5.2 $c=0.95$ 时， T 、 H 对模糊价格区间右端点的影响

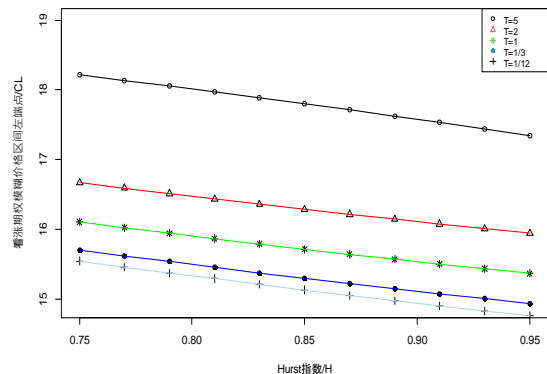


图 5.3 $c=0.5$ 时， T 、 H 对模糊价格区间左端点的影响

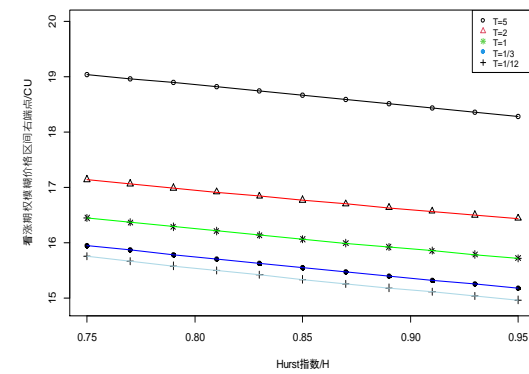


图 5.4 $c=0.5$ 时， T 、 H 对模糊价格区间右端点的影响

由于在混合次分数跳过程下的几何亚式模糊期权价格公式十分复杂，很难准确地判断出关于 H 的单调性，所以讨论了在不同 T 下，期权价格关于 H 的单调性。

从图 5.1 和 5.2 中可以看出，Hurst 指数对看涨期权模糊价格区间的左端点和右端点的影响一致，且两个图形几乎一样，这说明左端点和右端点相差很近，即期权的模糊价格区间长度很小。这是在置信度很高的情况下，而在置信度较低的

情况下，列如当 $c=0.5$ 时，模糊价格的左右区间端点是相差较大的(如图 5.3、5.4 所示)，与 5.2.1 中的结论相符。此外，从两个图中均可以看出，五条曲线几乎平行，这表明在不同的执行时间 T 下，期权价格关于 H 的下降速度是相似的。

表 5.2 中分别列举了 T 取 1/12、1/3、1、2 和 5 等五种情况下期权价格关于 H 的变化。结果发现：从局部上看，控制 T 不变时，期权价格关于 H 单调递减；控制 H 不变时，期权价格关于 T 单调递增。

表 5.2 T 、 H 对几何亚式看涨价格的影响

H	\tilde{C}_c		
	$T=1/12$	$T=1/3$	$T=1$
0.75	[15.6222, 15.6431]	[15.7978, 15.8225]	[16.2408, 16.2751]
0.80	[15.4088, 15.4297]	[15.5892, 15.6141]	[16.0409, 16.0755]
0.85	[15.2071, 15.2280]	[15.3924, 15.4173]	[15.8526, 15.8876]
0.90	[15.0371, 15.0162]	[15.2062, 15.2312]	[15.6752, 15.7104]
0.95	[14.8352, 14.8561]	[15.0299, 15.0550]	[15.5076, 15.5431]

续表 5.2 T 、 H 对几何亚式看涨价格的影响

H	\tilde{C}_c	
	$T=2$	$T=5$
0.75	[16.8617, 16.9092]	[18.5642, 18.6466]
0.80	[16.6670, 16.7151]	[18.3654, 18.4501]
0.85	[16.4831, 16.5318]	[18.1643, 18.2515]
0.90	[16.3091, 16.3583]	[17.9563, 18.0465]
0.95	[16.1443, 16.1942]	[17.7352, 17.8288]

5.2.3 与经典 BS 模型进行对比

将本文提出的 FAOP 定价模型与传统 BS 模型进行对比，给出不同置信度 c 下，两种模型的看涨期权模糊定价区间，如表 5.3 所列。

同 5.2.1 节，可以得到 BS 模型下模糊价格 $(\tilde{C}_t)_c$ 的可能均值和可能下半方差如下：

$$\bar{M}(\tilde{C}_t) = \int_0^1 c[\tilde{C}_c^L + \tilde{C}_c^U] dc = 15.4585$$

$$LSVar(\tilde{C}_t) = 2 \int_0^1 c([\bar{M}(\tilde{C}_t) - \tilde{C}_c^L]^2) dc = 0.006$$

这意味着亚式期权价格的平均水平为 15.4585 美元，风险为 0.006 美元。

表 5.3 不同模型下的几何亚式看涨期权模糊价格

c	$\tilde{C}_c(\text{FAOP})$	$\tilde{C}_c(\text{BS})$
1.00	[15.5997, 15.5997]	[15.4454, 15.4454]
0.99	[15.5976, 15.6026]	[15.4438, 15.4478]
0.98	[15.5955, 15.6054]	[15.4422, 15.4502]
0.97	[15.5934, 15.6083]	[15.4406, 15.4526]
0.96	[15.5913, 15.6112]	[15.4390, 15.4550]
0.95	[15.5892, 15.6141]	[15.4574, 15.4374]
0.94	[15.5872, 15.6169]	[15.4358, 15.4598]
0.93	[15.5851, 15.6198]	[15.4341, 15.4622]
0.92	[15.5830, 15.6227]	[15.4325, 15.4646]
0.91	[15.5809, 15.6256]	[15.4309, 15.4670]

从两个模型各自模糊价格的可能均值看，FAOP 模型的可能均值是 15.6135，而不带跳的 BS 模型的可能均值是 15.4585，显然，带跳的 FAOP 模型的可能均值略大于不带跳的 BS 模型。从两个模型各自模糊价格的可能下半方差看，FAOP 模型的可能下半方差也略大于 BS 模型。这是因为 FAOP 模型考虑到了金融市场中股价跳跃因素所带来的风险，从而使得可能均值和可能下半方差略大一点。

从表 5.3 中，FAOP 模型得到的模糊价格集中在 15.5997-15.6256 之间，表明模型比较稳定。从本文提出的定价模型出发，如果投资者对置信度 0.99 感到满意，则可在闭区间 [15.5976, 15.6026] 上任取一值作为决策价格，如果市场价格低于 15.5976，则说明期权价格被低估，则可以买入期权。如果市场价格高于 15.6026，则认为价格被高估，可以卖出期权。因此，通过考虑模糊性因素，在模糊状态下定价能够更好地帮助投资者进行风险管理、降低投资风险以及提高决策效率。此外，综合考虑随机性和模糊性，更全面地刻画了金融市场的不确定性，从而更好地反映了实际市场的情况，提高了定价的准确性。

6 结论与展望

6.1 结论

金融市场的不确定性不仅包括随机性，还有模糊性。随机性可以通过随机分析来解决，而模糊性则可以通过模糊集理论来处理。因此，本文采用混合次分数跳过程这一随机过程来刻画标的资产的随机性，采用三角模糊数来刻画定价公式中参数的模糊性，以几何平均亚式看涨期权为例，结合随机分析和模糊集理论，研究了模糊随机不确定性环境下的几何亚式期权定价问题。主要结果如下：

(1) 考虑到金融资产价格的长记忆性及跳跃现象，基于混合次分数布朗运动，结合泊松过程，推导了几何亚式期权定价公式的表达式。通过灵敏度分析，得到了几何亚式看涨期权价格和看跌期权价格均是 Hurst 指数 H 的减函数，几何亚式看涨期权价格和看跌期权价格均是泊松强度 λ 的增函数。

(2) 推导了混合次分数跳过程下标的资产波动率参数估计的表达式。通过 Monte Carlo 模拟和实证分析，验证了混合次分数跳过程模型的合理性。

(3) 引入模糊集理论，推导了几何亚式期权模糊定价公式的表达式。通过数值模拟，分析了参数置信度和 Hurst 指数对模糊区间的影响，同时给出了不同置信度下几何亚式期权价格的模糊区间。数值模拟表明：置信度 c 增大会导致模糊价格区间的长度减小，模糊价格升高。换句话说，模糊性带来的不确定性提高了几何亚式期权的价值；Hurst 指数 H 的增大会导致模糊价格的降低。当 H 增大时，保持金融市场原有趋势的惯性越大，标的资产的路径就越光滑，价格波动越小，从而降低标的资产带来的回报，导致期权价格下降；模糊几何亚式期权定价模型具有一定的合理性和准确性，使用此模糊模型，可以帮助投资者选择一个具有可接受置信度的几何亚式期权价格，以供日后使用。

6.2 展望

本文在探究几何亚式期权定价的问题中，将混合次分数布朗运动、泊松过程与模糊集理论结合起来，对几何亚式期权进行模糊定价，旨在改进模型，提升模

型的精度，使模型更加贴合金融市场的实际情况。首先，为简化模型，本文考虑的是简单的泊松过程来刻画跳跃现象，进一步也可以考虑较为复杂的复合泊松过程；此外，本文的研究对象仅为几何亚式期权，进一步也可以将本文提出的模型及方法应用到其他的奇异期权，如亚式幂期权、回望期权、价差期权等等。

参考文献

- [1]Bates D S. Jumps and stochastic volatility: Exchange rate processes implicit in deutsche mark options[J]. *The Review of Financial Studies*, 1996, 9(1): 69-107.
- [2]Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. *Journal of Political Economy*, 1973, 81(3): 637-654.
- [3]Brealey R, Myers S, Allen F. Principles of corporate inance[M]. New York: McGraw-Hill/Irwin, 2013.
- [4]Charle E, Mounir Z. On the sub-mixed fractional Brownian motion[J]. *Applied Mathematics: A Journal of Chinese Uni-versities*, 2015, 30(1): 27-43.
- [5]Chen H M, Hu C F, Yeh W C. Option pricing and the Greeks under Gaussian fuzzy environments[J]. *Soft Computing*, 2019, 23: 13351-13374.
- [6]Cherubini U, Mulinacci S. Extensions and distortions of λ -fuzzy measures[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2021, 412: 27-40.
- [7]Dhalluin Y, Forsythpa A, Labahn G. A semi-Lagrangian approach for American Asian options under diffusion[J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2005, 27(1): 315-320.
- [8]Duffee G R. Term premia and interest rate forecasts in affine models[J]. *The Journal of Finance*, 2002, 57(1): 405-443.
- [9]Ersen H Y, Tas O, Ugurlu U. Solar energy investment valuation with intuitionistic Fuzzy trinomial lattice real option model[J]. *IEEE Transactions on Engineering Management*, 2022, 23-36.
- [10]Grabbe J O. The pricing of call and put options on foreign exchange[J]. *Journal of International Money and Finance*, 1983, 2(3): 239-253.
- [11]Guerrero B A ,Clark P S. Option pricing under a generalized Black-Scholes model with stochastic interest rates, stochastic strings, and lévy jumps[J]. *Mathematics*, 2023, 12(1): 6-10.
- [12]Gu H, Liang J R, Zhang Y X. Time-changed geometric fractional Brownian motion

- and option pricing with transaction costs[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2012, 391(15): 3971-3977.
- [13]Gukhal C R. Analytical valuation of American options on jump-diffusion processes[J]. *Mathematical Finance*, 2001, 11(1): 97-115.
- [14]Hajizadeh E. Developing an optimized artificial intelligence model for S&P 500 option pricing: A hybrid GARCH model[J]. *International Journal of Financial Engineering*, 2020, 7(03): 2050025.
- [15]Heston S L. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options[J]. *The review of financial studies*, 1993, 6(2): 327-343.
- [16]Hilliard J E, Madura J, Tucker A L. Currency option pricing with stochastic domestic and foreign interest rates[J]. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 1991, 26(2): 139-151.
- [17]Hull J, White A. The pricing of options on assets with stochastic volatilities[J]. *The journal of finance*, 1987, 42(2): 281-300.
- [18]Lingling X , Hongjie Z , Lee F W. Pricing of arithmetic average Asian option by combining variance reduction and Quasi-Monte Carlo method[J]. *Mathematics*, 2023, 11(3): 594-594.
- [19]Liu B, Zhi L. Fuzzy simulation of European option pricing using sub-fractional Brownian motion[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2021, 153: 111442.
- [20]Mandelbrot B B. *The fractal geometry of nature*[M]. New York: WH freeman, 1982.
- [21]Merton R C. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous[J]. *Journal of Financial Economics*, 1976, 3(1-2): 125-144.
- [22]Muzzioli S, De Baets B. Fuzzy approaches to option price modeling[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2016, 25(2): 392-401.
- [23]Park J J, Jang H J, Jang J. Pricing arithmetic Asian options under jump diffusion CIR processes [J]. *Finance Research Letters*, 2020, 34:101269.

- [24]Peiris S, Thavaneswaran A. An introduction to volatility models with indices[J]. Applied mathematics letters, 2007, 20(2): 177-182.
- [25]Peters E E. Fractal market analysis: applying chaos theory to investment and economics[M]. John Wiley & Sons, 1994: 239-251.
- [26]Makarov R N. Option pricing and portfolio optimization under a multi-asset jump-diffusion model with systemic risk[J]. Risks, 2023, 11(12): 217.
- [27]Scott L O. Pricing stock options in a jump-diffusion model with stochastic volatility and interest rates: Applications of Fourier inversion methods[J]. Mathematical Finance, 1997, 7(4): 413-426.
- [28]Shreve S E. Stochastic calculus for finance II: continuous-time models[M]. New York: springer, 2004.
- [29]Sugeno M, Narukawa Y, Murofushi T. Choquet integral and fuzzy measures on locally compact space[J]. Fuzzy sets and Systems, 1998, 99(2): 205-211.
- [30]Thavaneswaran A, Appadoo S S, Frank J. Binary option pricing using fuzzy numbers[J]. Applied Mathematics Letters, 2013, 26(1): 65-72.
- [31]Thiagarajah K, Appadoo S S, Thavaneswaran A. Option valuation model with adaptive fuzzy numbers[J]. Computers & Mathematics with applications, 2007, 53(5): 831-841.
- [32]Tolga A C. Real options valuation of an IoT based healthcare device with interval Type-2 fuzzy numbers[J]. Socio-Economic Planning Sciences, 2020, 69: 100693.
- [33]Tudor C. Some properties of the sub-fractional Brownian motion[J]. Stochastics An International Journal of Probability and Stochastic Processes, 2007, 79(5): 431-448.
- [34]Viertl R, Hareter D. Fuzzy information and stochastics [J]. Iranian Journal of Fuzzy Systems, 2004, 1(1): 43-56.
- [35]Wang T, Zhao P, Song A. Power option pricing based on time-fractional model and triangular interval type-2 fuzzy numbers[J]. Complexity, 2022, 2022.
- [36]Wang W, Cai G, Tao X. Pricing geometric Asian power options in the sub-fractional

- Brownian motion environment [J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2021, 145: 110754.
- [37]Wu H C. Using fuzzy sets theory and Black-Scholes formula to generate pricing boundaries of European options[J]. *Applied Mathematics & Co-mputation*, 2017, 185(1): 136-146.
- [38]Wu L, Liu J, Wang J, et al. Pricing for a basket of LCDS under fuzzy environments[J]. *SpringerPlus*, 2016, 5(1): 1-12.
- [39]Xiao W L, Zhang W G, Zhang X L, et al. Pricing currency options in a fractional Brownian motion with jumps[J]. *Economic Modelling*, 2010, 27(5): 935-942.
- [40]Xu F, Yang J X. Pricing European Options under a fuzzy mixed weighted fractional Brownian motion model with jumps[J]. *Fractal and Fractional*, 2023, 7(12): 859.
- [41]Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. *Information and control*, 1965, 8(3): 338-353.
- [42]Zhang W G , Xiao W L , Kong W T, et al. Fuzzy pricing of geometric Asian options and its algorithm[J]. *Applied Soft Computing Journal*, 2015, 28: 360-367.
- [43]安翔, 郭精军. 混合次分数布朗运动下永久美式回望期权的定价[J]. *应用数学*, 2021, 34(04): 820-828.
- [44]巢文, 邹辉文. 基于双指数跳跃扩散模型的长寿债券定价研究[J]. *中国管理科学*, 2017, 25(09): 46-52.
- [45]程志勇, 郭精军, 张亚芳. 次分数布朗运动下支付红利的欧式期权定价[J]. *应用概率统计*, 2018, 34(01): 37-48.
- [46]宫晓莉, 熊熊, 庄新田. 广义双指数分布的跳跃扩散模型下股指期货波动研究[J]. *管理科学*, 2018, 31(03): 149-159.
- [47]林先伟, 秦学志, 尚勤. 混合分数布朗运动下欧式期权模糊定价研究[J]. *运筹与管理*, 2022, 31(07): 173-178.
- [48]秦学志, 林先伟, 王文华. 基于长记忆性特征的欧式期权模糊定价研究[J]. *系统工程理论与实践*, 2019, 39(12): 3073-3083.
- [49]沈明轩, 何朝林. 分数布朗运动环境中几何平均亚式期权的定价[J]. *山东大学学报 (理学版)*, 2013, 48(3): 48-52.
- [50]孙娇娇, 董锋. 分数布朗运动环境下带红利支付的脆弱期权定价模型[J]. 系

- 统工程, 2022, 40(06): 136-147.
- [51]孙玉东, 师义民, 谭伟. 分数布朗运动环境下亚式期权定价的新方法[J]. 工程数学学报, 2012, 29(2): 173-178.
- [52]王献东, 何建敏. 模糊随机不确定环境下考虑决策者主观判断的亚式期权定价[J]. 中国管理科学, 2020, 28(09): 33-44.
- [53]王萌, 宋瑞丽. 基于混合次分数布朗运动环境下的欧式障碍期权定价[J]. 数学的实践与认识, 2023, 53(12): 100-113.
- [54]张亚茹, 夏莉, 张典秋. 混合双分数布朗运动下的永久美式回望期权定价[J]. 山东大学学报(理学版): 2023, 1-10.
- [55]杨月, 王永茂. 带跳次分数布朗运动下亚式期权定价[J]. 数学的实践与认识, 2020, 50(13): 131-140.
- [56]姚怡, 李帅芳, 许威. 跳扩散模型下亚式期权定价的柳树法研究[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2018, 46(12): 1761-1769.
- [57]余湄, 程志勇, 邓军等. 一个新的期权定价方法: 基于混合次分数布朗运动的新视角[J]. 系统工程理论与实践, 2021, 41(11): 2761-2776.

附录

一、灵敏度分析

不同 Hurst 指数下，股价 S0 和几何亚式看涨期权价格 C 的关系

```

T <- 1/3
t <- 0
H <- 0.75
sigma <- 0.2
alpha <- 1
beta <- 1
lambda <- 5
S0 <- seq(32.8,33.3,0.05)
r <- 0.0185
K <- 25
w1 <- ((H-1)*2^(2*H-1)+1)/(2*(2*H+1)*(H+1))
w2 <- (2*H+3-2^(2*H))/(2*(2*H+1)*(H+1))
w3 <- (2-2^(2*H-1))/(2*(2*H+1))
A <- -0.5*r*T+w1*beta^2*sigma^2*T^(2*H)
d2<-(log(S0/K)+0.5*r*T-0.25*(lambda+alpha^2)*sigma^2*T-
w3*beta^2*sigma^2*T^(2*H)
)/(sqrt(0.5*(lambda+alpha^2)*sigma^2*T+w2*beta^2*sigma^2*T^(2*H)))
d1 <- d2+sqrt(0.5*(lambda+alpha^2)*sigma^2*T+w2*beta^2*sigma^2*T^(2*H))
C <- S0*exp(A)*pnorm(d1)-K*exp(-r*T)*pnorm(d2)
plot(S0,C,xlab = "股价/S0",ylab = "几何亚式看涨期权价格",pch=1)
lines(S0,C,lwd=1,col='black')
#####H <- 0.85
H <- 0.85
w1 <- ((H-1)*2^(2*H-1)+1)/(2*(2*H+1)*(H+1))

```

```

w2 <- (2*H+3-2^(2*H))/(2*(2*H+1)*(H+1))
w3 <- (2-2^(2*H-1))/(2*(2*H+1))
A <- -0.5*r*T+w1*beta^2*sigma^2*T^(2*H)
d2<-(log(S0/K)+0.5*r*T-0.25*(lambda+alpha^2)*sigma^2*T-
w3*beta^2*sigma^2*T^(2*H)
)/(sqrt(0.5*(lambda+alpha^2)*sigma^2*T+w2*beta^2*sigma^2*T^(2*H)))
d1 <- d2+sqrt(0.5*(lambda+alpha^2)*sigma^2*T+w2*beta^2*sigma^2*T^(2*H))
C <- S0*exp(A)*pnorm(d1)-K*exp(-r*T)*pnorm(d2)
points(S0,C,pch=2)
lines(S0,C,lwd=1,col='red')
#####H <- 0.95
H <- 0.95
w1 <- ((H-1)*2^(2*H-1)+1)/(2*(2*H+1)*(H+1))
w2 <- (2*H+3-2^(2*H))/(2*(2*H+1)*(H+1))
w3 <- (2-2^(2*H-1))/(2*(2*H+1))
A <- -0.5*r*T+w1*beta^2*sigma^2*T^(2*H)
d2<-(log(S0/K)+0.5*r*T-0.25*(lambda+alpha^2)*sigma^2*T-
w3*beta^2*sigma^2*T^(2*H)
)/(sqrt(0.5*(lambda+alpha^2)*sigma^2*T+w2*beta^2*sigma^2*T^(2*H)))
d1 <- d2+sqrt(0.5*(lambda+alpha^2)*sigma^2*T+w2*beta^2*sigma^2*T^(2*H))
C <- S0*exp(A)*pnorm(d1)-K*exp(-r*T)*pnorm(d2)
points(S0,C,pch =8)
lines(S0,C,lwd=1,col='green')
#####H <- 0.99
H <- 0.99
w1 <- ((H-1)*2^(2*H-1)+1)/(2*(2*H+1)*(H+1))
w2 <- (2*H+3-2^(2*H))/(2*(2*H+1)*(H+1))
w3 <- (2-2^(2*H-1))/(2*(2*H+1))

```

```

A <- -0.5*r*T+w1*beta^2*sigma^2*T^(2*H)
d2<-(log(S0/K)+0.5*r*T-0.25*(lambda+alpha^2)*sigma^2*T-
w3*beta^2*sigma^2*T^(2*H)
)/(sqrt(0.5*(lambda+alpha^2)*sigma^2*T+w2*beta^2*sigma^2*T^(2*H)))
d1 <- d2+sqrt(0.5*(lambda+alpha^2)*sigma^2*T+w2*beta^2*sigma^2*T^(2*H))
C <- S0*exp(A)*pnorm(d1)-K*exp(-r*T)*pnorm(d2)
points(S0,C,pch =19)
lines(S0,C,lwd=1,col='blue')
legend("topleft",legend=c("H=0.75","H=0.85","H=0.95","H=0.99"),pch=c(1,2,8,19),c
ex=0.8,col=c(1:4))

```

二、路径模拟

```

alpha=1
beta=1
lamda=5
r=0.0255
H=0.85
S0=3024.39
t=seq(from=1,to=243,by=1)
sigma=numeric(243)
epsilon=numeric(243)
for(i in 1:243)
{
  sigma[i]=sqrt(0.00007/(alpha^2+lamda+2*H*beta^2*(2-2^(2*H-1))*t[i]^(2*H-1)))
  epsilon[i]=rnorm(1)
}
S=numeric(243)
S[1]=(r+1)*S0+epsilon[1]*sigma[1]*S0*sqrt(alpha^2+lamda)
for(i in 2:243)

```

```
{  
    S[i]=(r+1)*S0+epsilon[i]*sigma[i]*S0*sqrt(alpha^2+lamda+2*H*beta^2*(2-  
2^(2*H-1))*t[i-1]^(2*H-1))  
    S0=S[i]  
}  
lines(date,S,lwd=1,col='black',lty=2)
```

硕士期间完成的工作

论文成果与获得的奖项

[1]庞秋月,汪育兵.基于混合次分数跳过程的亚式期权模糊定价[J].兰州文理学院学报(自然科学版),2024,38(01):9-16.

[2]胡羽琪,庞秋月,王龙.“双循环”下西部地区经济增长动力何在[J].中国外资,2023,(16):93-95.

[3]获得第九届全国大学生统计建模比赛研究生组国家级二等奖.

[4]获得第八届全国大学生统计建模研究生组省级三等奖.

[5]获得山东省研究生黄河流域生态与经济平衡建模大赛省级三等奖.

参与的项目

[1]国家自然科学基金地区科学基金项目(项目编号:72361016):《基于集成框架的欧式期权价格预测及应用》

[2]优秀研究生“创星之星”项目(项目编号:2022CXZX-700)《模糊环境下基于广义分数布朗运动的欧式期权定价》。

[3]优秀研究生“创星之星”项目(项目编号:2022CXZX-696)《基于深度学习在混合次分数布朗运动下期权定价的优化研究》。

致 谢

青葱三年，落笔为终。行文至此，意味着自己的研究生生涯即将结束。东逝流水，叶落知秋。三年时光匆匆而过，如白驹过隙，回头一望，皆是回忆。有喜悦、有满足、有期待、有悲伤、有迷茫、更有感恩。

涓涓师恩，铭记于心。首先，我要感谢我的导师郭精军教授对我的谆谆教诲和支持。正所谓，一朝沐杏雨，一生念师恩，从论文的选题到最终成文，谢谢老师您的悉心指导和朝督暮责，使我顺利完成毕业论文，三年的求学之路，不论是传道授业还是生活琐事，感谢您的体谅与包容。在此，也衷心地感谢统计与数据科学学院的所有老师们，愿老师们身体健康，工作顺利，万事如意！

同窗数载，知己难忘。其次，我要感谢一直陪伴我的朋友们。还记得，我们一起分享喜悦、一起扛过低谷、一起监督学习、一起探讨未来，无数个相互鼓励和陪伴的日子，都将是我最珍贵的回忆。愿我的朋友们，既有前程可奔赴，亦有岁月可回头，也愿未来的我们，关关难过关关过，前路漫漫亦灿灿！

父爱如山，母爱似水。最后，我要特别感谢我的父亲母亲，谢谢他们的无微不至的关爱和坚定不移的支持。是他们不计回报的付出才让我能够往更高的地方去看更繁华的世界。是他们在迷茫无措的时候给予我无限的温暖、关怀以及建议，让我能够一直自信乐观，后无顾忌地做自己想做的事。在以后的日子里，愿我的父亲母亲，椿萱并茂、岁岁无虞、长安常安！

言辞有尽，而敬谢无穷也！感谢这三年遇到的一切！山水相逢，终有一别，愿你我，以梦为马，不负韶华！