

分类号 _____
U D C _____

密级 _____ 公开
编号 _____ 10741

兰州财经大学

LANZHOU UNIVERSITY OF FINANCE AND ECONOMICS

博士学位论文

论文题目 基于 4/2 随机混合模型的欧式期权
定价及投资组合研究

研究生姓名: 马爱琴

指导教师姓名、职称: 郭精军、教授

学科、专业名称: 统计学、统计学

研究方向: 金融统计与风险管理

提交日期: 2024 年 6 月 3 日

原创性声明

本人声明所呈交的论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意。

学位论文作者签名： 马爱琴

签字日期： 2024.6.3

导师签名： 马爱琴

签字日期： 2024.6.3

关于论文使用授权声明

本人完全了解学校关于保留、使用学位论文的各项规定， 同意（选择“同意”/“不同意”）以下事项：

1. 学校有权保留本论文的复印件和磁盘，允许论文被查阅和借阅，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文；

2. 学校有权将本人的学位论文提交至清华大学“中国学术期刊（光盘版）电子杂志社”用于出版和编入CNKI《中国知识资源总库》或其他同类数据库，传播本学位论文的全部或部分內容。

学位论文作者签名： 马爱琴

签字日期： 2024.6.3

导师签名： 马爱琴

签字日期： 2024.6.3

Research on European Option Pricing and Portfolio Selection Based on 4/2 Stochastic Hybrid Models

Candidate : Aiqin Ma

Supervisor : Jingjun Guo

摘要

近年来,随着金融市场及金融全球化的加速发展,金融市场突发事件的发生愈加频繁,使得投资者面临的金融市场不确定性及投资风险随之增加.在此背景下,如何合理规避金融市场不确定性及投资风险显得尤为重要.期权和投资组合作为现代金融学理论研究的核心内容,可以较好地规避金融市场不确定性及投资风险.对于期权定价和投资组合而言,最为关键的是构建能够精确描述金融市场数据动态变化特征的模型.但现有关于描述金融基础资产价格趋势的模型存在对其动态变化特征考虑不全面的问题.此外,随着金融市场一体化的迅猛发展,利率不再是一个常数,并且研究发现利率的随机波动特征对期权定价及最优投资决策具有显著影响.因此,本文以金融基础资产价格的动态变动特征及市场利率随机性为切入点,构建符合金融市场特征的模型对期权定价及投资组合问题的研究具有重要的理论意义和应用价值.

本文的研究重点是基于金融市场基础资产价格的随机波动、尖峰、厚尾、跳跃扩散及市场利率的随机波动特征,构建了具有不同特征的4/2随机混合欧式期权定价模型,并基于50ETF期权数据检验4/2随机混合模型在欧式期权定价中的定价表现.此外,基于4/2随机混合模型在期权定价中的定价表现,构建了4/2-CIR跳扩散投资组合模型,获得了该模型下的最优投资策略及效用损失,并探讨了模型参数对最优风险敞口及效用损失的影响.具体内容及主要结论如下:

(1) 基于现有随机波动率及随机利率混合模型的不足,构建4/2-CIR随机混合模型对欧式期权定价问题展开研究.首先,综合考虑金融资产随机波动及市场利率随机性特征对期权定价结果的影响,构建了4/2-CIR随机混合模型.其次,获得了4/2-CIR随机混合模型下标的资产对数价格的特征函数及期权定价公式.最后,通过数值算例分析随机利率因子对模型定价结果的影响,并根据实际数据对模型参数进行校准,进而探讨模型的定价性能及精度.研究表明,利率随机性对期权定价结果具有显著影响,并且在4/2随机波动率模型中引入随机利率因子有助于提高已有4/2随机波动率模型的定价精度.

(2) 考虑到金融资产价格的动态变化特征对期权定价结果具有显著影响,提出了能够全面描述基础资产随机波动、尖峰、厚尾及跳跃等特征的4/2跳跃扩散随机混合模型.首先,在基础资产价格具有随机波动特征的前提下,将双指数扩散过程引入到描述基础资产价格动态变化特征的模型中,构建了4/2跳扩散随机混合模型.其次,获得了4/2跳扩散随机混合模型下相应的特征函数及欧式期权定价公式.最后,利用粒子群优化算法对模型参数进行估计,并基于4/2跳扩散模型下

欧式期权定价公式及参数估计值检验模型的定价性能和精度. 结果表明, 相较于已有4/2随机波动率模型、3/2随机波动率模型及Heston随机波动率模型, 本文所构建4/2跳扩散随机混合模型在欧式期权定价问题中的定价表现最优. 此外, 4/2跳扩散随机混合模型对实值期权及虚值期权的定价精度优于平值期权.

(3) 为全面描述基础资产动态变化特征及市场利率随机性特征, 提出了4/2-CIR跳扩散随机混合模型. 首先, 在等价鞅概率测度下, 基于基础资产价格的随机波动、尖峰、厚尾、跳跃及市场利率的随机性特征, 构建了4/2-CIR跳扩散随机混合模型. 其次, 获得了4/2-CIR跳扩散随机混合模型下标的对数价格的特征函数及欧式期权定价公式. 最后, 利用粒子群优化算法对模型参数进行估计, 并通过对比分析法检验4/2-CIR跳扩散随机混合模型的定价性能及优势. 研究表明, 4/2-CIR跳扩散随机混合模型不仅能够全面描述基础资产的动态变化特征和市场利率的随机波动特征, 而且能够反应基础资产与波动率之间的杠杆效应. 此外, 与4/2-CIR随机混合模型及4/2跳扩散随机混合模型相比, 4/2-CIR跳扩散模型在欧式期权定价中的定价性能最优.

(4) 在效用函数最大化准则下, 构建了股票指数满足4/2-CIR跳扩散过程的投资组合模型. 首先, 在幂效用函数下, 获得了基于4/2-CIR跳扩散投资组合模型所得HJB方程的最优解、最优投资策略及最优风险敞口. 其次, 证明了4/2-CIR跳扩散投资组合模型下HJB方程解及投资策略的最优性. 最后, 通过数值例子分析了模型参数对最优风险敞口及效用损失的影响, 并通过采用不同模型下投资策略所产生的损失大小, 分析基于4/2-CIR跳扩散投资组合模型所得投资策略的优势. 结果表明, 风险厌恶系数、投资期限及风险溢价因子对最优风险敞口具有显著影响. 此外, 风险溢价因子对短视损失具有显著影响. 并且与现有4/2随机波动率模型及4/2-CIR随机混合模型下的投资策略相比, 4/2-CIR跳扩散混合模型下的投资策略最优.

关键词: 4/2随机波动率模型 双指数分布 CIR随机利率 期权定价 HJB方程
最优投资组合策略 CRRA效用

Abstract

In recent years, with the accelerated development of the financial market and financial globalization, financial market emergencies occur more and more frequently, so that investors face the financial market uncertainty and investment risk increases. In this context, it is particularly important to rationally hedge against uncertainty and investment risks of financial markets. The option pricing and investment portfolio, as the core content of modern finance theory, can better avoid the uncertainty and investment risks of financial markets. For option pricing and investment portfolio, the most critical thing is to construct models that can accurately characterize the dynamics of financial market data. However, the existing models describing the price trends of the underlying financial assets suffer from incomplete consideration of their dynamic characteristics. In addition, with the rapid development of financial market integration, the interest rate is no longer a constant, and it has been found that the stochastic fluctuation characteristic of the interest rate has a significant impact on option pricing and optimal investment decisions. Therefore, this thesis takes the dynamic change characteristics of financial underlying asset prices and the stochastic characteristics of the interest rate as the entry point to construct a model that conforms to the characteristics of the financial market, which is of great theoretical significance and application value to the research of option pricing and portfolio problems.

The research focus of this thesis is to construct 4/2 stochastic hybrid European option pricing models with different characteristics based on the stochastic volatility, spikes, thick tails, jump diffusion of the underlying asset prices and stochastic fluctuation characteristic of the interest rate, and to test the pricing performance of the 4/2 stochastic hybrid models

in European option pricing based on the 50ETF option data. In addition, based on the pricing performance of 4/2 stochastic hybrid models in option pricing, a 4/2-CIR jump diffusion portfolio model is constructed, the optimal investment strategy and utility loss are obtained under the model, and the effects of the model parameters on the optimal risk exposure and utility loss are explored. The details and main conclusions are as follows:

(1) Based on the shortcomings of the existing stochastic volatility and stochastic interest rate hybrid models, a 4/2-CIR stochastic hybrid model is constructed to study the pricing of European options. Firstly, a 4/2-CIR stochastic hybrid model is constructed considering the influence of the stochastic characteristics of financial assets and interest rate on the option pricing results. Secondly, the characteristic function of the logarithmic price of the underlying asset and the European option pricing formula are obtained under the 4/2-CIR stochastic hybrid model. Finally, a numerical example is given to analyze the influence of interest rate factors on the pricing results of the model, and the model parameters are calibrated according to the actual data, and then the pricing performance and accuracy of the model are discussed. The results show that interest rate randomness has a significant impact on option pricing results, and the introduction of interest rate factors into the 4/2 stochastic volatility model can improve the pricing accuracy of the existing 4/2 stochastic volatility model.

(2) Considering that the dynamic characteristics of financial asset prices have a significant impact on the option pricing results, this thesis proposes a 4/2 jump diffusion stochastic hybrid model, which comprehensively describes the stochastic volatility, spikes, thick tails, and jumps characteristics of the underlying asset. Firstly, on the premise that the price of the underlying asset has the characteristic of stochastic fluctuation, the double exponential diffusion process is introduced into the

model describing the dynamic change characteristics of the underlying asset price, and the 4/2 jump diffusion stochastic hybrid model is constructed. Secondly, the corresponding characteristic function and the European option pricing formula are obtained under the 4/2 jump diffusion stochastic hybrid model. Finally, the model parameters are estimated by particle swarm optimization algorithm, and the pricing performance and accuracy are tested of the model based on the European option pricing formula and parameter estimates under the 4/2 jump diffusion stochastic hybrid model. The results show that compared with the existing 4/2 stochastic volatility model, 3/2 stochastic volatility model and Heston stochastic volatility model, the 4/2 jump diffusion stochastic hybrid model has the best pricing performance in the European option pricing problem. In addition, the 4/2 jump diffusion stochastic hybrid model has better pricing accuracy for in the money and out of the money option than at the money option.

(3) In order to describe the dynamic characteristics of underlying assets and the stochastic characteristics of market interest rates, a 4/2-CIR jump diffusion stochastic hybrid model is proposed. Firstly, under equivalent martingale probability measure, a 4/2-CIR jump diffusion stochastic hybrid model is constructed based on the random fluctuations, spikes, thick tails, jumps of the underlying asset prices and the stochastic characteristics of interest rate. Secondly, the characteristic function of logarithmic price and the European option pricing formula are derived under the 4/2-CIR jump diffusion stochastic hybrid model. Finally, the model parameters are estimated by particle swarm optimization algorithm, and the pricing performance and advantages are tested of the 4/2-CIR jump diffusion stochastic hybrid model by comparative analysis. The results show that the 4/2-CIR jump diffusion stochastic hybrid model can not only fully describe

the dynamic characteristics of the underlying asset and the stochastic fluctuation characteristic of the market interest rate, but also reflect the leverage effect between the underlying asset and volatility. In addition, compared with 4/2-CIR stochastic hybrid model and 4/2 jump diffusion stochastic hybrid model, 4/2-CIR jump diffusion stochastic hybrid model has the best pricing performance in European option pricing.

(4) Under the utility function maximization criterion, a portfolio model is constructed in which the stock index satisfies a 4/2-CIR jump diffusion process. Firstly, the optimal solution of the HJB equation, investment strategy and risk exposure are obtained based on the 4/2-CIR jump diffusion portfolio model under the power utility function. Secondly, the optimality of HJB equation solution and investment strategy are proved under 4/2-CIR jump diffusion portfolio model. Finally, the effects of model parameters on optimal risk exposure and utility loss are analyzed by numerical examples, and the advantages of investment strategies based on 4/2-CIR jump diffusion portfolio model are analyzed by using the loss size of investment strategies under different models. The results show that risk aversion coefficient, investment duration and risk premium factors have significant effects on optimal risk exposure. In addition, the risk premium factor has a significant impact on short-sighted losses. Compared with the existing 4/2 stochastic volatility model and 4/2-CIR stochastic hybrid model, the investment strategy is the best under 4/2-CIR jump diffusion stochastic hybrid model.

Keywords: 4/2 stochastic volatility model; Double exponential distribution; CIR interest rate; Option pricing; HJB equation; Optimal portfolio strategy; CRRA utility

目 录

1 绪论	1
1.1 研究背景与意义	1
1.1.1 研究背景	1
1.1.2 研究意义	3
1.2 国内外研究现状	5
1.2.1 基于随机利率模型的期权定价研究现状	5
1.2.2 基于随机波动率模型的期权定价研究现状	6
1.2.3 基于跳扩散模型的期权定价研究现状	9
1.2.4 基于随机混合模型的期权定价研究现状	10
1.2.5 金融市场最优投资组合研究现状	11
1.2.6 研究述评	13
1.3 研究内容	15
1.4 研究思路与研究方法	17
1.4.1 研究思路	17
1.4.2 研究方法	19
1.5 结构安排	19
1.6 创新之处	22
2 理论基础	24
2.1 金融数学相关理论	24
2.1.1 随机过程相关理论	24
2.1.2 随机分析相关理论	26
2.2 期权定价理论模型	28
2.2.1 Black-Scholes模型	28
2.2.2 CIR随机利率模型	29
2.2.3 随机波动率模型	30
2.2.4 跳扩散模型	32

2.3 投资组合相关理论	33
2.3.1 随机控制理论	33
2.3.2 动态规划原理与HJB方程	34
2.3.3 效用函数	35
3 基于4/2-CIR随机混合模型的欧式期权定价研究	37
3.1 4/2-CIR随机混合模型的构建	38
3.2 4/2-CIR随机混合模型欧式期权定价	38
3.2.1 基于4/2-CIR随机混合模型的对数资产价格特征函数	39
3.2.2 基于4/2-CIR随机混合模型的欧式期权定价公式	41
3.3 4/2-CIR随机混合模型参数的数值模拟与分析	43
3.3.1 4/2-CIR随机混合模型定价性能分析	43
3.3.2 4/2-CIR随机混合模型参数敏感性分析	44
3.4 4/2-CIR随机混合模型欧式期权定价实证分析	46
3.4.1 4/2-CIR随机混合模型参数估计	46
3.4.2 4/2-CIR随机混合模型欧式期权定价结果分析	47
3.4.3 4/2-CIR随机混合模型欧式期权定价误差分析	48
3.5 本章小结	49
4 基于4/2跳扩散随机混合模型的欧式期权定价研究	50
4.1 4/2跳扩散随机混合模型的构建	50
4.2 4/2跳扩散随机混合模型欧式期权定价	52
4.2.1 基于4/2跳扩散随机混合模型的对数资产价格特征函数	54
4.2.2 基于4/2跳扩散随机混合模型的欧式期权定价公式	61
4.3 4/2跳扩散随机混合模型欧式期权定价实证分析	62
4.3.1 标的资产价格描述性统计分析	63
4.3.2 4/2跳扩散随机混合模型参数估计	64
4.3.3 4/2跳扩散随机混合模型欧式期权定价结果分析	65
4.3.4 4/2跳扩散随机混合模型欧式期权定价误差分析	67
4.4 本章小结	69
5 基于4/2-CIR跳扩散随机混合模型的欧式期权定价研究	70
5.1 4/2-CIR跳扩散随机混合模型的构建	70

5.2	4/2-CIR跳扩散随机混合模型欧式期权定价	72
5.2.1	基于4/2-CIR跳扩散随机混合模型的对数资产价格特征函数	72
5.2.2	基于4/2-CIR跳扩散随机混合模型的欧式期权定价公式	79
5.3	4/2-CIR跳扩散随机混合模型欧式期权定价实证分析	79
5.3.1	4/2-CIR跳扩散随机混合模型参数估计	80
5.3.2	4/2-CIR跳扩散随机混合模型定价结果分析	80
5.3.3	4/2-CIR跳扩散随机混合模型定价误差分析	84
5.4	本章小结	85
6	基于4/2-CIR跳扩散随机混合模型的最优投资策略	87
6.1	幂效用函数下4/2-CIR跳扩散投资组合模型构建	87
6.2	基于4/2-CIR跳扩散投资组合模型的最优投资策略	91
6.3	基于4/2-CIR跳扩散投资组合模型的次优策略及效用损失	107
6.4	数值算例及分析	109
6.4.1	4/2-CIR跳扩散投资组合模型参数对最优风险敞口的影响	109
6.4.2	4/2-CIR跳扩散投资组合模型参数对效用损失的影响	111
6.5	本章小结	112
7	总结与展望	114
7.1	全文总结	114
7.2	研究展望	115
	参考文献	117
	攻读博士学位期间承担的科研任务及主要成果	125
	致谢	126

1 绪论

1.1 研究背景与研究意义

本章主要对研究的相关背景、意义、研究现状及研究内容等进行阐述。首先,详细介绍期权定价及投资组合的研究背景和意义,并对期权定价及投资组合的相关研究进展进行梳理。其次,介绍主要的研究内容、研究思路、研究方法和结构安排。最后,概括梳理文章的主要创新点。

1.1.1 研究背景

近年来,随着金融全球化的加速发展,金融市场中突发事件的发生愈加频繁,使得金融市场进入了一个前所未有的不稳定时期。由于金融市场的不确定性及突发事件引发的金融衍生品价格频繁波动现象,使得波动性风险管理需求日益迫切。期权作为一种重要的金融衍生品,是衍生品市场中重要的风险管理工具,可以较好地规避金融市场不确定性带来的风险。期权是指交易双方达成的关于未来买卖权利的标准化合约,它赋予期权持有者在未来某个确定的日期以事先商议好的价格买卖某种资产的权力,但不必承担买卖资产的义务。同时,期权持有者需预先向期权卖方支付一定数额的费用,称为期权价格。期权价格反应了投资者对未来市场的投资预期,对期权进行合理定价是期权定价研究的关键内容。此外,期权定价理论是金融学的基本理论,在实践中有着广泛的应用,不仅能用于指导期权投资决策、套期保值和套利交易,还被广泛应用于企业的资金管理、风险管理、融资决策和投资决策等问题中。

据统计,2020年全球期权市场交易品种共77种,成交量为212.65亿。2022年全球期权市场交易品种为86种,成交量为545.33亿。由此可见,全球期权市场交易范畴和数额日新月异。与欧美期权市场相比,国内期权市场的发展自2015年2月9日上证50ETF期权发布正式开始。上证50ETF期权上市以来深受个人投资者、投资机构和金融机构的青睐。目前,国内期权市场的规模与日俱增、品种也逐渐丰富。自2017年以来,国内6个期货交易所共上市白糖期权、铜期权、棉花期权、原油期权、工业硅期权以及合成橡胶期权等43个期权品种。截至2023年10月底,期权成交量同比增长258.64%,期权的持仓量同比增长84.05%。由此可见,期权在国内衍生品市场上已进入高速发展阶段。因此,如何对期权进行合理定价已成为金融机构和投资者最为关注的问题。

此外, 由于金融市场的迅猛发展, 使得金融市场及投资者面临的投资风险也随之增加, 而投资者如何对持有资产进行优化配置成为其规避投资风险的主要途径. Merton(1976)在投资资产仅由风险资产和无风险资产组成的假定下, 基于B-S模型对最优投资策略问题展开研究. 此后, 许多学者将其结果推广到一般化的情形. 但目前有关最优投资组合的研究存在对投资资产价格变化特征描述不够全面的问题, 这使得投资者不能准确了解持有资产的风险, 影响投资者的投资策略. 因此, 如何有效描述资产价格特征, 构建合理的投资组合优化模型, 为投资者提供最优投资策略, 已成为现代金融数学及投资者关注的热点问题.

众所周知, 期权价格与标的资产价格及其波动紧密相关, 对期权标的资产进行合理有效建模是期权定价的核心所在. 同时, 对金融资产价格进行合理有效建模也是投资者进行最优投资决策, 有效规避投资风险的重要手段. 对于金融资产价格的描述影响最为深远的是经典B-S定价模型, 但该模型在实际应用中存在一些不足: 如标的资产价格的波动率并不是一个常数, 而具有时变特征; 金融资产价格满足几何布朗运动的假设与实际金融市场数据的尖峰厚尾以及跳跃等非正态特征不相符; 此外, 研究发现随着金融市场一体化迅猛发展, 利率不再是一个常数, 而具有随机波动特征. 因此, 不少学者对原有数理模型进行了重新审视, 对模型中存在的问题发表了不同看法, 并对描述金融资产动态变化过程的模型进行改进, 以期构建更为符合金融市场数据特征的模型, 提高期权定价模型的定价精度, 并帮助投资者做出最优的投资决策.

目前, 针对金融时序数据表现出的时变波动率特征, 学者构建了一系列随机波动率模型, 主要有Hull-White随机波动率模型(Hull和White, 1987)、Stein-Stein随机波动率模型(Stein和Stein, 1991)、SABR随机波动率模型(Bartlett, 2006)、Heston随机波动率模型(Heston, 1993)、3/2随机波动率模型(Heston, 1997; Carr和Sun, 2007)、4/2随机波动率模型(Grasselli, 2017)及非放射随机波动率模型(Drimus, 2012)等. 其中, Heston随机波动率模型已被广泛应用于期权定价和投资组合优化问题的研究中. 但Heston随机波动率模型在实际应用中存在无法拟合波动较大样本路径的极端情况, 使得该模型下所得隐含波动率曲面趋于平缓. 于是, Heston(1997)提出了3/2随机波动率模型, 该模型虽然弥补了Heston随机波动率模型的不足, 但其产生的隐含波动率曲面较为陡峭, 仍旧表现出单因子模型的特征. 而Grasselli(2017)提出的4/2随机波动率模型对波动率微笑的拟合程度更高. 对于金融数据表现出的尖峰厚尾以及跳跃等非正态特征, 主要以分形布朗运动和跳扩散模型来描述. 相关研究发现, 分形布朗运动模

型在定价过程中会产生套利,这违反了风险中性定价原则.而跳扩散过程的平滑独立性和右连左极性,能够描述金融时序数据尖峰厚尾以及跳跃扩散等运动规律,已被广泛用于期权定价及最优投资组合的研究中.此外,随着金融市场的发展,利率不再是一个常数而具有一定波动性.针对利率随机性问题,最为典型的是由Vasicek(1997)和Cox等(1985)提出的Vasicek模型和Cox-Ingersoll-Ross(CIR)模型.研究发现,Vasicek模型下的利率会出现负值的情况,而CIR模型由于其Feller条件的设定使得所得利率均为正值.目前,国内市场利率仍未出现负值的情形,即对于国内市场而言,利用CIR模型描述利率的随机性特征更为合理.

综合来看,针对金融数据特征所构建的期权定价及投资组合模型在一定程度上均能改善经典B-S模型的不足.其中,对于基础资产价格波动率随机性问题的研究发现,具有双因子特征的4/2随机波动率模型对波动率的时变特征描述最为全面;跳扩散过程对基础资产的尖峰厚尾及跳跃等非正态特征的拟合程度较高;而CIR随机利率模型对于利率随机性的研究更为合理有效.因此,本文以4/2随机波动率模型为基准模型,分别以金融市场数据的尖峰、厚尾、跳跃等非正态特征及利率的随机波动特征为切入点,构建不同视角下符合实际市场特征的优化模型,并基于不同的定价模型对欧式期权进行定价研究.此外,基于期权定价研究结论,在市场由无风险资产、零息债券、风险资产及其衍生产品构成的假定下,构建了基础资产满足4/2-CIR跳扩散过程的最优投资组合模型,并基于此模型对完全市场情况下最优投资决策问题进行研究,并分析了主要参数对最优风险敞口和效用损失的影响.

1.1.2 研究意义

作为现代金融学理论研究的核心内容,期权定价与投资组合在风险管理及投资决策等问题中具有广泛的应用.随着全球经济一体化的发展,我国经济金融环境有了明显的变化,各种金融衍生产品应用而生.金融市场的不确定性及金融衍生产品交易品种、交易数量、交易金额等的不断变化,使得金融市场及投资者所面临的金融市场风险也日趋明显.期权及投资组合作为金融市场中主要的风险规避工具,能够合理规避市场风险,促进金融市场的发展和完善.由此可见,构建符合金融基础资产动态变化特征的模型,研究期权定价及最优投资问题的意义也就不言而喻了.此外,期权定价及最优投资组合策略的研究不仅能够促进衍生品定价和投资组合优化理论的完善,而且能够为投资者提供合理的投资决策.而对于期权定价及最优投资决策问题而言最为关键的是构建符合实际金融数据特征的

市场模型. 因此, 本研究不仅具有重要的理论意义而且具有显著的实践意义.

1.1.2.1 理论意义

(1) 准确分析标的资产动态变化特征, 选取合适的随机过程对基础资产进行建模, 能够为合理构建期权定价及投资组合模型提供依据. 利用统计学方法对标的资产变动特征进行分析, 有助于准确把握标的的数据的分布特征, 从而选择对标的资产拟合程度更优的随机过程进行建模. 目前, 用于对标的资产建模的随机过程较为单一, 无法同时满足标的资产的尖峰厚尾、跳跃及波动率随机性等特征. 因此, 准确分析标的资产动态变化特征, 能够为寻找全面描述标的资产尖峰厚尾、跳跃及波动率随机性等动态特征的随机过程奠定基础.

(2) 4/2-CIR随机混合模型、4/2跳扩散随机混合模型及4/2-CIR跳扩散随机混合模型的构建, 丰富和完善了期权定价模型理论研究. 在经济快速发展的背景下, 期权定价理论研究尤为重要, 寻找适合实际金融市场的定价模型是期权定价理论研究的主要内容, 而基础资产价格的分布特征对期权定价模型定价结果的准确性至关重要. 此外, 研究发现金融市场利率的随机性对期权定价结果具有显著影响, 故以基础资产价格变化特征及市场利率随机性特征为主要切入点, 以期权定价结果的合理、有效和精确性为主要目标, 构建符合金融市场的定价模型有助于完善期权定价理论研究.

(3) 以基础资产价格变动特征及市场利率随机性为主要依据, 构建合理的投资组合优化模型有助于完善投资组合模型的理论研究. 投资组合模型的合理构建, 是最优投资组合决策研究的主要内容, 而投资组合模型的优劣主要取决于对投资资产动态变化特征及市场利率随机性特征的有效刻画. 因此, 以基础资产价格动态变化特征及市场利率随机性特征为核心, 构建合理的投资组合动态模型能够丰富和完善投资组合模型的理论研究.

1.1.2.2 实践意义

(1) 对期权进行合理有效定价, 有助于规避金融市场不确定性风险, 促进金融市场的平稳运行. 作为衍生品市场重要的风险管理工具, 期权能够有效规避市场不确定性带来的风险. 期权定价的研究不仅仅是准确计算期权的价格, 更重要的是通过探讨标的资产和期权价格之间的关系, 对整个金融市场相关性和有效性进行研究. 此外, 期权的价格不仅与标的资产动态变化特征有关, 而且与市场利率的变动也息息相关. 研究标的资产的分布特征及市场利率随机性对期权定价的影响, 准确分析市场信息之间如何传递, 才能从整体上把握金融市场间的相关性, 促进金融市场的平稳运行.

(2) 合理高效的投资组合决策, 有助于投资者对持有资产进行优化配置, 规避投资者面临的投资风险. 随着金融市场的迅猛发展, 金融市场及投资者面临的投资风险随之增加. 投资者对持有资产进行优化配置是规避投资风险的主要途径, 而合理的投资组合模型是资产优化配置的关键. 因此, 构建合理的投资组合模型有助于投资者正确把握投资资产的变动趋势, 做出最优的投资决策, 从而规避投资者所面临的投资风险.

1.2 国内外研究现状

期权作为重要的金融衍生产品已成为规避风险的重要工具, 对其进行准确定价, 不仅能够促进期权市场的稳定发展, 而且对整个金融市场的发展也具有促进作用. 关于期权定价的研究, 最早可以追溯到1900年, 由Louis Bachelier在其博士论文中提出. 然而, 该模型假设标的资产价格遵循算数布朗运动, 这可能会导致股票价格为负值, 与实际情况不相符. 后来, Black等(1973)和Merton(1973)提出的B-S欧式期权定价公式在期权定价史上具有里程碑似的意义, 但B-S理论模型是在假设标的资产价格服从正态分布、波动率、利率为常数等条件下构建的. 而真实金融市场数据动态特征表明, 金融市场数据的波动率参数并不是确定的常数, 而是呈现出波动率微笑、波动聚集等特征, 不能直接用某个值来表示; 金融资产的收益率并不遵循正态分布, 而是呈现出尖峰厚尾、长相依性等分形特征, 并且尾部存在明显的跳跃现象. 此外, 随着金融市场的迅猛发展, 金融市场利率也呈现出不确定性, 不能用某个值来表示. 因此, 针对经典B-S模型的不足, 国内外学者对其进行了大量改进, 主要对经典模型中常数波动率、常数利率及基础资产价格服从正态分布等假设条件进行放松, 构建符合金融市场数据真实特征的模型. 基于此, 本文主要从基于随机利率模型的期权定价研究、基于随机波动率模型的期权定价研究、基于跳扩散模型的期权定价研究、基于随机混合模型的期权定价研究及金融市场投资组合研究等对现有期权定价及投资组合研究方面展开综述.

1.2.1 基于随机利率模型的期权定价研究现状

随着国家经济政策、金融市场状况等的不断变化, 利率不再是一个常数, 而具有一定的波动性, 即B-S模型中利率为常数的假设过于理想, 不符合市场真实情况. 针对利率的波动问题, 最为典型的有Vasicek(1977)提出的Vasicek模型和Cox等(1985)提出的CIR随机利率模型. Vasicek模型用于描述瞬时利率的动态

变化情况, CIR随机利率模型用于描述长期利率的均值回复性. 基于此, 学者们对随机利率模型下的期权定价问题进行了大量研究. 譬如, Haowen(2012)、郭精军和张亚芳(2017)、Zhang等(2018)、Fu等(2023)等对Vasicek随机利率模型下的欧式期权及亚式彩虹期权进行了研究. Beliaeva等(2008)、Liang等(2010)、吴桑等(2019)、Samimia和Mehrdoust(2024)、Guo(2019)等在Vasicek随机利率模型中分别引入跳扩散过程和Heston随机波动率过程, 对不同混合模型下的期权定价问题进行研究. 此外, 关于CIR随机利率模型下期权定价问题也有不少研究成果. 如, Maghsoodi(1996)在CIR随机利率基础上引入时间参数, 并得到了由布朗运动和时间参数驱动的微分方程的封闭路径唯一解. Hu和Zhou(2017)基于CIR过程提出了逆向仿真的概念, 解决了最小二乘蒙特卡罗方法在美式期权定价过程中的记忆需求问题. Najafi等(2018)对CIR随机利率模型下美式零息债券的看跌期权进行了评估, 并通过交易费用来消除分数布朗运动所产生的套利. Lv等(2023)基于不确定CIR随机利率模型, 获得了欧式脆弱期权的看涨和看跌公式, 并根据定价公式设计了相应的数值算法. 以上研究表明, Vasicek随机利率和CIR随机利率模型均能描述利率的随机变化特征, 但Vasicek模型下的利率会出现负值的情况, CIR随机利率模型由于其Feller条件的限制不会出现利率为负的情形受到了广泛的关注. 以上研究均表明随机利率在期权定价中起着至关重要的作用.

总体来看, 基于随机利率对期权定价的研究肯定了利率随机性对期权定价结果的影响, 提高了模型对经济市场利率的拟合程度, 改善了现有定价模型对期权的定价精度; 基于随机混模型对期权定价的研究表明除利率外, 标的资产动态趋势对期权定价结果仍具有显著影响, 这为期权定价模型的研究提供了新的方向, 即基于标的资产变动的不同特征构建期权定价模型.

在经典B-S模型中, 除利率为常数的假定不符合金融市场特征外, 标的资产波动率为常数的假定与金融市场数据波动率表现出的随机性特征相悖. 因此, 学者们基于随机波动率模型对期权定价问题进行大量研究.

1.2.2 基于随机波动率模型的期权定价研究现状

关于随机波动率模型下期权定价问题的探讨, 最具影响力的是由Heston(1993)提出的Heston随机波动率模型, 但研究发现该模型在实际市场中存在为了拟合陡峭的标的资产曲面而产生较大的方差波动率参数, 以及因无法拟合极端情况, 使得该模型所估计的期权隐含波动率曲面趋于平缓等问题. 为解决Heston随机波动率模型的缺陷, Heston(1997)提出了3/2随机波动率模型, 该模型弥补了Heston随机

波动率模型的不足, 但该模型所估计的期权隐含波动率曲面较为陡峭. 因此, 为了同时解决Heston随机波动率及3/2随机波动率模型的缺陷, Grasselli(2017) 提出的4/2随机波动率模型, 该模型具有双因子模型的特点, 并且同时解决了Heston随机波动率模型和3/2随机波动率模型的不足. 本文主要基于4/2随机波动率模型研究了标的资产价格具有尖峰厚尾、跳跃等特征及市场利率随机性特征下的欧式期权定价及最优投资组合问题, 对于4/2 随机波动率模型定价性能的研究主要通过对比分析Heston随机波动率及3/2随机波动率模型定价结果进行对比分析. 因此, 对随机波动率模型下期权定价的研究现状主要从Heston 随机波动率模型、3/2随机波动率模型及4/2随机波动率模型下的期权定价研究展开综述.

Heston随机波动率模型下期权定价研究. 自1993年Heston提出Heston随机波动率模型以来, 大量学者对此模型下的期权定价问题进行了深入探究. 如, 李静和周峤(2012)、Lee等(2016)、Fallah和Mehrdoust(2019)、Goard和Mazur(2013)及Lin和He(2022)分别基于Heston随机波动率模型对多资产期权、脆弱期权、美式期权及欧式期权问题进行研究, 并通过仿射变换、LSM算法及傅里叶变换等方法获得了相关期权的定价公式. 此外, 吴鑫育等(2019)在随机波动率模型基础上对上证50ETF期权进行研究, 发现随机波动率模型确实能够更加精确地刻画波动率微笑和波动率随机性特征. Shi等(2023)在多元粗糙随机波动率模型下, 证明了参数非线性分数型Riccati方程解的存在性、唯一性和正则性, 利用参数非线性分数型Riccati方程得到了资产对数价格的特征函数, 根据特征函数的快速傅里叶-余弦公式求解期权定价问题, 并通过数值算例检验了理论计算结果和该方法的有效性. 以上大量文献表明Heston随机波动率模型在期权定价中具有重要作用, 但在实际应用中此模型仍存在一些不足. 比如, 为了拟合陡峭的标的资产曲面产生较大的方差波动率参数, 使得估计参数不满足Feller条件; 此外, 由于Heston随机波动率模型对非常低的或即将消失的波动率样本赋予较大的权重, 无法拟合极端情况, 使得该模型所估计的期权隐含波动率曲面趋于平缓.

为解决Heston随机波动率模型的不足, Heston(1997)提出了3/2随机波动率模型. 该模型与Heston随机波动率模型相反, 其假设波动率服从逆CIR过程, 允许瞬时波动率出现峰值的极端路径, 该模型下所产生的隐含波动率曲面较为陡峭. 自3/2随机波动率模型提出以来引起了学者的广泛关注, 譬如Banbaldeaux(2012)利用Broadie-Kaya 算法对3/2 随机波动率模型进行精确估计, 并发现结合拟蒙特卡罗点集的条件蒙特卡罗技术能够使方差显著减少. Gudmundsson和Vyncke(2019)为解决由于3/2随机波动率模型特征函数的评估速度较慢, 使得具有有限差分梯

度的标准最小二乘校准不合理问题,推导出了紧致形式的特征函数的解析梯度,并提出了一种解析梯度的计算方法,提高了3/2随机波动率模型参数的校准速度. Goard(2015)、Yuen等(2015)、柳向东等(2015)、Zheng和Zeng(2016)等分别对3/2随机波动率模型下的利率衍生产品、方差互换衍生产品、VIX期权及时间依赖期权等问题进行研究. 该模型弥补了Heston随机波动率模型的不足,但实际市场中无论标的资产的波动如何变化,期权隐含波动率曲面的斜率既可能趋于平缓也可能较为陡峭,而Heston随机波动率模型与3/2随机波动率模型所产生的期权隐含波动率斜率只能描述一种情况.

为同时解决Heston随机波动率和3/2随机波动率模型的缺陷, Grasselli(2017)提出了Heston随机波动率模型和3/2随机波动率模型的混合随机波动率模型,称为4/2随机波动率模型,该模型具有双因子模型的特征,相比于Heston随机波动率及3/2随机波动率模型能够更好的拟合期权隐含波动率曲面变化特征. 目前,4/2随机波动率模型下关于定价问题的研究仍处于初级阶段. 主要有Zhu和Wang(2019)、王波等(2020)利用Lewis的基础变换及李对称的方法获得了4/2随机波动率模型所满足的偏微分方程,通过标普500指数数据估计了模型参数,并比较了4/2随机波动率模型、Heston随机波动率模型及3/2随机波动率模型的定价性能,发现4/2随机波动率模型在拟合度上优于Heston随机波动率模型和3/2随机波动率模型. Gnoatto等(2022)使用基准法对4/2随机波动率模型进行校准. Cheng等(2019)、Escobar-Anel和Gong(2020)、Cao等(2023)及Cretarola等(2024)分别对具有均值回复特征的4/2随机波动率模型的性质及此模型下的期权定价问题进行了深入探讨.

总体而言,对于随机波动率模型下期权定价问题的研究已有丰富的成果. Heston随机波动率模型的提出,为波动率随机性的研究提供了新的方向;3/2随机波动率模型的提出,不仅改善了Heston随机波动率模型的缺陷,而且肯定了对波动率随机性的研究;4/2随机波动率模型的提出,不仅同时解决了Heston随机波动率模型和3/2随机波动率模型的不足,而且为随机波动率模型下期权定价的研究指明了新的研究视角. 但由于金融资产价格变化特征较为丰富,在未来构建模型过程中需进一步完善,使其能够更为精确、有效的拟合真实市场特征.

此外,经典B-S模型假定标的资产价格服从正态分布,但研究发现金融市场数据具有尖峰、厚尾及跳跃等非正态特征. 因此,学者们针对基础资产的非正态特征,构建了跳扩散模型对期权定价问题进行研究.

1.2.3 基于跳扩散模型的期权定价研究现状

研究发现金融市场收益率数据的变化并非连续的,特别是金融危机时期或者资产价格经历剧烈震荡的时期,收益率会产生跳跃现象.因此,为了更好地拟合金融市场数据的变化特征,有学者将跳过程引入到标的资产价格过程中,刻画市场交易过程中的跳跃特征.对于跳跃过程在定价中的研究,可追溯到Merton(1976)基于跳跃扩散过程刻画标的资产价格动态变化特征,提出了Merton跳扩散模型,并在此模型下得到了欧式期权定价公式的解析解.

基于跳过程进行定价研究的文献主要有Madan和Seneta(1990)提出的方差伽马模型、Carr等(2002)提出的CGMY模型以及Kou和Wang(2004)提出的双指数有限跳跃扩散模型等.无限跳跃过程以及有限跳跃过程均能够描述交易过程中产生的跳跃现象,但无限跳跃模型下很难得到期权的显示定价公式,而双指数有限跳跃扩散过程不仅能够捕获收益率序列的尖峰厚尾等非正态特征,而且能够描述期权定价过程中的波动率微笑特征,同时通过鞅等方法可以得到此模型下期权定价公式的显示解.因此,双指数跳跃扩散过程在期权定价的研究中得到了学者的广泛关注.如,邓国和和黄艳华(2011)、Liu等(2018)、安翔和郭精军(2022)、郭精军和彭波(2022)、Lin等(2024)分别基于双指数跳扩散过程及混合跳扩散过程对美式二值期权、复合期权、回望期权及欧式期权定价问题进行研究.林建伟和李慧敏(2020)在公司资产价格演化遵循双指数跳跃扩散模型的前提下,对具有破产重组的公司债券进行定价研究,得到了公司股票和债券的定价公式,并获得了最优息票满足的非线性方程及最佳破产边界的封闭解.此外,Cai等(2010)对双指数跳扩散过程的占位时及期权定价问题进行研究,并通过占位时的联合分布和双指数跳跃扩散过程的终端值得到了与占位时有关期权的解析解.周伟等(2013)在双指数分布的基础上结合有偏双指数分布构建了广义双指数分布,并从理论和应用两方面证明了新构建模型的有效性、可行性和优越性.对混合高斯跳扩散环境下具有交易费用的资产定价问题进行研究,并通过模拟分析验证定价模型的定价效果.研究了混合次分数跳扩散模型下回望期权的定价问题.

综上所述,基于跳跃扩散模型对期权定价问题的研究,为提高期权标的资产价格拟合程度,改善已有期权定价模型定价精度指出了明确方向.无限跳跃模型在有限时间内能够产生无数次跳跃,但在此模型下很难得到期权定价显示解,有限跳跃模型既能够刻画标的资产价格的尖峰厚尾及跳跃等特征,又能通过鞅等方法得到此模型下期权定价公式的显示解,有利于期权定价模型的理论及应用研究.

随着期权定价问题的深入研究,学者们综合考虑标的资产的尖峰、厚尾、跳

跃、波动率及利率随机性特征, 构建了不同特征下的随机混合模型对期权进行定价研究, 以期提高单个模型的期权定价精度.

1.2.4 基于随机混合模型的期权定价研究现状

综合考虑波动率及利率随机性特征进行期权定价的研究. 随着期权定价理论研究的深入, 大量学者将单一随机波动率模型与随机利率模型相结合, 以期提高模型的定价精度. 如, Ahlip和Rutkowski(2013)、Ahlip和Rutkowski(2016)分别基于Heston-CIR随机混合模型和MPT-CIR随机混合模型对外汇期权进行研究. He和Zhu(2018)、Guo(2021)、He和Chen(2021)、吴胤昊等(2022)及He和Lin(2023)等在Heston随机波动率模型基础上考虑不同随机利率模型对欧式期权进行定价研究, 并在不同随机混合模型下得到了欧式期权的封闭形式定价公式. 此外, Lv和Jiang(2024)将CIR随机利率与4/2随机波动率模型相结合, 通过傅里叶逆变换等方法获得了欧式外汇看涨期权的半解析定价公式, 并对市场数据进行校准证明了4/2-CIR模型对隐含波动率的拟合程度优于Heston-CIR混合模型.

随机波动率与跳跃扩散混合模型下的期权定价研究. 对于随机波动率模型与跳跃扩散模型相结合进行定价的研究已有不少, 譬如邓国和(2015)、Gong和Zhuang(2016)、柳向东和洪绍鹏(2023)、El-Khatib等(2024)等将Heston随机波动率模型与跳跃扩散模型相结合, 并基于Heston跳跃扩散随机混合模型对复合期权、欧式期权及奇异期权定价问题进行研究. Baldeaux和Badran(2014)对3/2随机波动率模型下具有跳跃特征的VIX期权和指数期权进行研究, 发现具有跳跃特征的3/2随机混合模型能够更好地拟合短期指数期权隐含波动率, 同时可以得到更贴合实际的VIX期权隐含波动率. Lin等(2017)及林炜等(2018)在4/2随机波动率模型的基础上将跳跃扩散及标的资产价格的正态调和稳态过程引入模型, 构建了具有杠杆效应的Lévy随机波动率模型, 推导出了此模型下的半显示期权定价及对冲策略公式, 并通过数值实验证明了模型的实用性. 此外, Huang和Guo(2022)、Huang等(2022)及Ye等(2023)研究了标的资产价格遵循非放射随机波动率和双指数跳跃扩散模型下的欧式脆弱期权定价、具有随机跳跃强度和波动率的双指数跳跃扩散模型下幂期权定价及随机波动率模型下具有弹性跳特征的VIX衍生产品定价问题.

基于随机利率与跳跃扩散混合模型的期权定价研究. 关于随机利率与跳跃扩散模型相结合的定价研究主要有, 邓国和和杨向群(2009)对CIR随机波动率和双指数跳跃扩散模型下的美式期权定价问题进行研究, 并通过随机分析方法

对美式看跌期权函数及最佳实施边界的性质进行了探讨. Deng(2015)在具有指数分布跳跃的CIR随机利率模型下,利用欧式看跌期权和百慕大期权相结合的双Geske-Johnson方法推导出了无违约零息债券的美式看跌期权的近似解,并利用多元傅里叶变换法得到了欧式看跌期权和百慕大期权的封闭解. 巢文和邹辉文(2017)、Chen和Hsu(2018)、Luo等(2019)等研究了CIR随机利率和跳跃扩散模型下的长寿债券定价问题、障碍期权期权定价问题及实物期权定价问题.

此外,Zhang等(2012)研究了具有模糊利率、模糊漂移、模糊波动率和模糊跳跃强度的欧式期权定价问题,给出了基于双指数跳跃扩散模型的欧式期权模糊定价公式. Scott(1997)、Ahlip等(2017)、Berthe等(2019)将Heston随机波动率模型、CIR随机利率模型及跳跃扩散模型相结合,并对Heston-CIR跳扩散模型下的期权定价问题进行研究,并获得了欧式货币看涨期权的半解析定价公式. Yang等(2021)、He和Chen(2022)及Ma等(2023)利用具有马尔可夫机制转换跳跃扩散Heston-CIR混合模型,研究了具有离散采样时间的波动率和方差互换定价问题、外汇期权定价问题及欧式期权定价问题. 此外,陈有杰等(2023)对具有随机利率、随机波动率和双指数跳跃扩散模型下的奇异期权进行定价研究,并通过鞅方法和傅里叶变换等方法得到了欧式封顶看涨期权和抵付型期权的显示定价公式.

总之,随机混合模型下期权定价研究结果表明,相比于单一随机模型而言,随机混合模型改善了单一随机模型的期权定价精度,这为期权定价理论的研究提供了新的方向.

1.2.5 金融市场最优投资组合研究现状

对于最优投资问题的研究最早可以追溯到Merton(1971),自此以后越来越多的学者开始关注此问题. 如Fleming和Zariphopoulou(1991)在市场仅由无风险资产和服从对数布朗运动的风险资产组成的假定下,对单一主体的最优消费投资问题进行研究,给出了值函数的渐近行为,但文中所得关于期望效用函数动态规划微分方程的解仅在双曲绝对风险厌恶(HARA)效用情况下可用. Vila和Ariphopoulou(1997)对于具有恒定机会和借贷约束的跨期消费和投资组合问题进行研究,在代理效用函数的一般假设下发现最优策略可以表示为当前财富的反馈函数. Dai等(2009)对具有比例交易成本和有限时间范围内常相对风险厌恶(CRRA)型投资者的连续时间最优消费投资问题,可基于奇异控制和最优停时之间的联系,得到分析自由边界的方法及相应值函数的正则性. Chang等(2011)针对资产收益率之间复杂的动态相关和演化关系,将含时网络与

随机矩阵理论相结合研究了最优投资策略问题,发现含时网络的引入能够获得更优的资产组合,并且随机矩阵理论的引入能够很好的降噪并提高资产收益.此外,Savku和Weber(2022)采用零和和非零和博弈的方法讨论了两个最优投资问题,并通过比较获得了制度转化对最优投资问题的影响. Wei等(2023)研究了完全市场下具有递归偏好的模糊厌恶型投资者的最优消费投资组合问题,发现模糊性厌恶对最优扩散风险和跳跃风险具有显著的影响. 上述最优投资策略的研究大多假定风险资产过程服从几何布朗运动,然而随着对资产价格变化特征的深入研究发现,几何布朗运动模型并不能精确刻画资产价格的真实走势,即此模型不能准确反映风险资产的变动趋势和风险程度,这会影响投资者做出合理的投资策略. 后来学者发现,用随机波动率模型刻画投资资产价格的变动趋势能够弥补恒定波动率对风险资产波动趋势描述不准确的问题,因此学者们基于随机波动率模型对最优投资问题展开研究.

目前,用于研究最优投资策略的随机波动率模型主要有Heston随机波动率模型(Heston, 1993)、3/2随机波动率模型(Heston, 1997)及4/2随机波动率模型(Grasselli, 2017). 其中, Heston随机波动率模型下的最优投资问题已有大量研究(Liu, 2007; Cerný和Kallsen, 2008; Egloff等, 2010; Li等, 2018). 此外,张初兵等(2012)、马娟等(2017)、谢超强等(2018)以及李丹萍等(2021)对Heston随机波动率模型下的养老金投资组合优化、资产负债管理及保险公司的保险投资策略等问题进行了研究. 但随着对Heston随机波动率模型的深入研究发现, Heston随机波动率模型无法拟合波动率过大的极端情况,而3/2随机波动率模型作为逆CIR过程,能够弥补Heston随机波动率的不足. 基于此,学者们在3/2随机波动率模型下对最优投资问题展开研究(Chacko和Viceira, 2005; Yang, 2021; Zeng和Taksar, 2013, 等). 后来,学者发现3/2随机波动率模型解决了Heston随机波动率模型的问题,但此模型无法拟合资产价格的低波动特征. 因此,为了同时解决了Heston随机波动率模型和3/2随机波动率模型的不足,Grasselli(2017)提出了具有双因子特征的4/2随机波动率模型. 现有基于4/2随机波动率模型对最优投资组合的研究主要基于均值-方差准则及效用函数最大化准则展开. 在均值方差框架下主要对4/2随机波动率模型下具有错误定价的最优投资(Yang等, 2021)、投资再保险(Zhang, 2021)以及资产负债管理(Zhang, 2021; Zhang, 2023)等问题进行研究. 在效用最大化准则下主要对4/2随机波动率模型下CRRA型投资者的最优投资问题进行研究(Cheng和Escobar-Anel, 2021; Hata和Yasuda, 2022; Wang等, 2023; Cheng和Escobar-Anel, 2023; Ma等, 2023). 此

外, Cheng和Escobar-Anel(2023)以及Zhang(2023)对4/2随机波动率模型下的稳健投资组合及资产负债管理问题进行了研究。

由于利率的随机变动能够影响投资者储蓄、消费和投资策略的分配, 故学者们将随机利率模型引入到最优投资组合策略的研究中。譬如Noh和Kim(2011)研究了无限时间内随机混合模型下的最优消费投资问题, 得到了最优消费投资策略的渐近解。Escobar等(2018)针对不完备和完备市场情况下基于随机利率与随机波动率混合模型的模糊厌恶投资问题进行研究, 发现在不完全市场中, 债券投资对利率模糊性较为敏感, 而波动率的模糊性对最优投资组合的影响不显著; 在完全市场中, 波动率模糊性与利率模糊性对最优投资组合均具有显著影响。孙景云和郭精军(2020)研究了随机利率和跳扩散混合模型下的最优投资问题。此外, Lin和Riedel(2021)对利率不确定情况下的连续时间消费投资策略进行研究, 发现当利率变动足够大时, 投资人将退出债券市场只投资风险资产。以上研究均表明市场利率的随机性对最优投资组合策略具有显著影响, 这说明在构建投资组合模型时应该考虑利率随机性对最优投资结果的影响。但通过分析发现现有基于随机混合模型下对最优投资组合策略的研究, 主要在Heston随机波动率模型的基础上引入随机利率模型, 而Heston随机波动率模型并不能全面描述风险资产的价格波动趋势。

综上所述, 最优投资组合的现有研究成果, 为构建更优的最优投资组合模型提供了强有力的支撑。风险资产服从随机波动率模型的假设, 有助于投资者对资产做出合理判断, 做出最优的投资组合策略; 随机利率模型的引入, 有利于投资者对市场做出有效预判, 进而做出最优的投资组合决策, 及时规避市场风险; 随机利率和随机波动率模型的结合, 能够预先帮助投资者对市场及持有资产的变动情况做出有效判断, 从而做出最优的投资组合策略, 规避投资交易过程中的风险。但由于对基础资产变动特征的研究仍在不断探索中, 在未来刻画基础资产变动特征模型的研究中需要进一步改善, 使其具备合理、全面和高效性特征。

1.2.6 研究述评

通过文献梳理发现, 国内外学者对基础资产价格服从随机波动率模型、跳跃扩散模型及随机利率模型的期权定价及投资组合问题进行了深入研究, 并取得了丰硕的研究成果, 但对于同时考虑基础资产动态变化特征以及市场利率随机性的期权定价及其投资组合研究, 仍存在需要进一步深入探讨的问题。首先, 随机波动率模型下的期权定价问题中, 目前主要基于Heston随机波动率模型展开, 而

对于对标的资产波动特征拟合程度更优的4/2随机波动率下期权定价及投资组合问题的研究仍处在探索阶段;其次,根据Heston随机波动率模型的扩展研究表明,在4/2随机波动率模型基础上考虑标的资产价格的尖峰厚尾及跳跃等特征能够进一步提高4/2随机波动率模型的定价效果,而现有文献对本部分的研究主要针对正态跳跃过程展开,对于具有双指数跳扩散过程的4/2随机波动率模型下期权定价问题尚未展开研究;最后,市场利率的随机性对期权定价结果存在显著影响,而4/2随机波动率与随机利率模型相结合对期权定价及投资组合问题的研究也有待进一步探讨.具体包括:

(1) 对于基于随机利率与随机波动率混合模型的期权定价而言,现有的随机混合模型主要是在Heston模型的基础上引入Vasicek或CIR利率模型,描述基础资产的波动率及利率随机性特征,虽然相关研究均取得了一定的研究成果,但Heston模型所得期权隐含波动率曲面趋于平缓,使得与实际期权隐含波动率曲面特征不相符.相比于Heston模型而言,4/2随机波动率模型能够较好的拟合金融市场基础资产的随机波动特征,且该模型下所得期权隐含波动率曲面符合实际期权市场特征.此外,相比于Vasicek随机利率而言,CIR随机利率模型由于Feller条件的限制不会出现利率为负的情况,且目前国内还未出现利率为负值的情况.因此,将4/2随机波动率及CIR随机利率模型相结合,构建4/2-CIR随机混合模型对我国衍生品进行定价,能够改善现有随机混合模型的定价精度.

(2) 已有基于4/2随机波动率模型及跳跃扩散混合模型对期权进行定价的相关研究中,大多在4/2随机波动率模型中引入简单跳扩散过程,但简单跳扩散过程中的跳跃幅度为正态分布的假设并不能描述金融基础资产数据跳跃的非对称性.鉴于此,部分学者用双指数分布来刻画金融基础资产数据跳跃的非对称性,并取得了较好的成果.虽然双指数跳扩散过程和4/2随机波动率模型能够更高的刻画金融市场基础数据的动态变化特征,但目前将双指数跳扩散过程与4/2随机波动率模型相结合的情形并不常见.此外,已有文献已证明通过鞅等方法可以获得双指数跳跃扩散模型下期权定价公式的显示解.因此,在4/2随机波动率模型中引入双指数跳跃扩散模型对期权进行定价研究显得十分必要.

(3) 目前,基于4/2随机混合模型的期权定价研究分别围绕标的资产价格动态变动特征或市场利率随机性特征展开,但根据已有随机混合模型的研究发现,同时考虑基础资产的变动特征及市场利率的随机性特征,能够进一步改善期权定价模型的定价精度.因此,为构建更为合理高效的期权定价模型,改善现有定价模型的定价精度,提高期权对冲风险的能力,有必要在4/2随机波动率模型的基础上同

时考虑标的资产尖峰厚尾、跳跃及利率随机性特征构建符合实际的期权定价模型。

(4) 对于最优投资组合策略的研究, 最为关键的是对投资资产进行有效的刻画, 使得投资者合理预判投资资产的风险做出最优的投资决策。现有投资组合模型中主要通过随机微分方程来刻画投资资产的动态变化趋势, 但已有假定风险资产满足4/2随机波动率模型的最优投资问题仅考虑了波动率随机性, 存在对其非对称跳跃特征刻画不全面的问题。此外, 关于随机利率对最优投资问题的影响问题主要围绕Heston随机波动率模型展开, 而Heston随机波动率模型对市场波动率的描述不够全面。因此, 为提高风险资产模型对金融市场数据的拟合程度, 构建风险资产价格满足4/2-CIR跳扩散随机混合过程的投资组合模型对最优投资策略的研究尤为重要。

基于此, 本文以具有双因子特征的4/2随机波动率模型为基准, 分别考虑标的资产价格的随机波动、尖峰厚尾、跳跃扩散等特征及市场利率随机性特征, 构建不同视角下基于4/2随机波动率的随机混合期权定价模型, 并通过数值算例及实证分析研究各视角下模型的定价效果。此外, 基于4/2随机混合模型在期权定价研究中的结果, 在效用最大化准则下, 构建了风险资产满足4/2-CIR跳扩散过程的投资组合模型, 并分析了模型主要参数对最优风险敞口和效用损失的影响。

1.3 研究内容

根据期权定价及投资组合在现代金融学理论研究中的重要性及其研究现状, 本文主要内容为不同随机混合模型下期权定价及投资组合的研究。由于目前相关期权定价及最优投资组合的研究, 存在对基础资产动态变化特征描述不全面及对市场利率随机性特征考虑不周全等不足。在此背景下, 基于基础资产动态变化特征及市场利率随机性特征构建符合金融市场数据的优化模型, 改善现有期权定价模型的定价精度, 完善投资组合理论研究体系。此外, 对于定价模型及投资组合模型进行数值及实证分析, 探讨各模型的定价性能及对投资决策的影响。本文的主要研究内容分为如下几个方面:

(1) CIR随机利率及4/2随机波动率混合模型下欧式期权定价研究。本部分内容主要包括模型构建、特征函数及定价公式的求解、数值分析及实证分析等。首先, 在利率满足CIR过程及标的资产动态变化过程遵循4/2随机波动率模型的假设下, 构建了4/2-CIR随机混合模型。其次, 根据Itô引理、傅里叶变换及欧拉变换等

获得了4/2-CIR随机混合模型下标的对数资产价格的特征函数及欧式期权定价公式. 再次, 通过数值算例分析利率随机性特征对模型定价结果的影响及模型主要参数对期权定价结果的影响. 最后, 根据市场实际数据检验模型的定价性能及定价精度, 并分析本文所构建模型与经典B-S模型及基准4/2随机波动率模型在实际市场中的定价差异.

(2) 4/2随机波动率及双指数跳扩散随机混合模型下欧式期权定价研究. 本章内容主要包括理论模型的构建、定价公式的求解及实证分析等. 首先, 根据金融市场基础资产价格的尖峰厚尾、波动率随机性及跳跃扩散等特征, 构建了4/2跳扩散随机混合模型. 其次, 利用Itô引理、泊松过程的性质及傅里叶变换等方法获得了标的对数资产的特征函数及该模型下的欧式期权定价公式. 再次, 对基础资产价格及其对数收益率数据进行描述性统计分析, 探讨上证50ETF期权标的资产价格的动态变化特征及文章所构建模型的适用性. 最后, 基于市场数据对比分析4/2跳扩散随机混合模型、4/2随机波动率模型、3/2随机波动率模型及Heston随机波动率模型在真实市场中的定价表现, 并检验4/2跳扩散随机混合模型在期权市场中的定价精度.

(3) 基于4/2-CIR跳扩散随机混合模型的欧式期权定价研究. 本章主要基于第三四章的研究内容, 综合考虑基础资产的动态变化特征及市场利率随机性特征构建符合金融市场数据特征的优化模型进行定价研究. 首先, 在利率满足CIR过程、标的资产价格满足4/2跳扩散过程的假设下, 构建了具有杠杆效应的4/2-CIR跳扩散随机混合模型. 其次, 利用Itô引理、双指数跳扩散过程及CIR过程的性质及傅里叶变换等方法, 获得了4/2-CIR跳扩散随机混合模型下标的对数资产的特征函数及欧式期权定价公式. 最后, 基于市场数据对比分析4/2-CIR随机混合模型、4/2跳扩散随机混合模型及4/2-CIR跳扩散随机混合模型在欧式期权定价中的定价表现, 获得最优的欧式期权定价模型, 为最优投资组合问题的研究提供理论基础.

(4) 基于4/2-CIR跳扩散随机混合模型的最优投资组合研究. 本章的主要内容有4/2-CIR跳扩散投资组合模型的构建、最优问题的求解及参数的敏感性分析等. 首先, 基于随机混合模型在期权定价研究中的表现, 本章在市场由银行存款、利率未定权益、股票指数及衍生产品等资产组成的前提下, 构建了4/2-CIR跳扩散投资组合模型. 其次, 根据动态规划及随机控制理论获得了该模型下的最优投资策略、最优风险敞口敞口、次优风险敞口及效用损失等. 最后, 通过数值算例分析模型参数对最优风险敞口及效用损失的影响.

1.4 研究思路与研究方法

1.4.1 研究思路

在我国金融市场不断发展和完善的背景下,准确分析金融资产价格变动特征,是投资者把握金融市场发展趋势的重要手段,也是合理构建期权定价及投资组合模型的基础.此外,构建符合金融资产实际发展趋势的市场模型,研究金融衍生品定价及最优投资问题,可以有效地规避投资者在交易过程中所面临的资金运作风险.故本文以金融基础资产动态变动特征及市场利率随机性为主要切入点,构建符合金融资产实际发展趋势的市场模型,对期权定价及最优投资问题进行研究,并根据实际市场数据分析模型的定价性能及模型参数对最优风险敞口和效用损失的影响.具体来讲:首先,以标的资产价格波动的随机性和市场利率的随机性为主要依据,构建基于4/2-CIR的随机混合模型对欧式期权进行定价研究.通过数值分析的方法分析利率随机性对期权定价模型定价结果的影响,并根据实际数据对模型参数进行校准分析模型的定价性能.其次,在标的资产波动率具有随机性的前提下,以标的资产价格的尖峰厚尾及跳跃等特征为核心,构建4/2跳扩散随机混合模型对欧式期权定价问题进行研究.在此基础上,根据实际市场数据对模型参数进行校准,并对模型的定价性能进行深入探讨.再次,充分考虑标的资产动态变化特征及市场利率随机性对期权价格的影响,构建4/2-CIR跳扩散随机混合模型对欧式期权进行定价研究.根据市场实际数据对模型参数进行估计,并将此模型的定价性能与前两个视角下模型的定价性能进行对比,分析不同模型在欧式期权定价问题中的定价性能.最后,依据基础资产变动特征及市场利率随机性特征,在效用函数最大化准则下构建最优投资组合模型,根据动态规划原理及随机控制理论获得该模型下投资组合的最优问题,并通过数值例子分析了模型参数对最优风险敞口和效用损失的影响.本文的技术路线图如下:

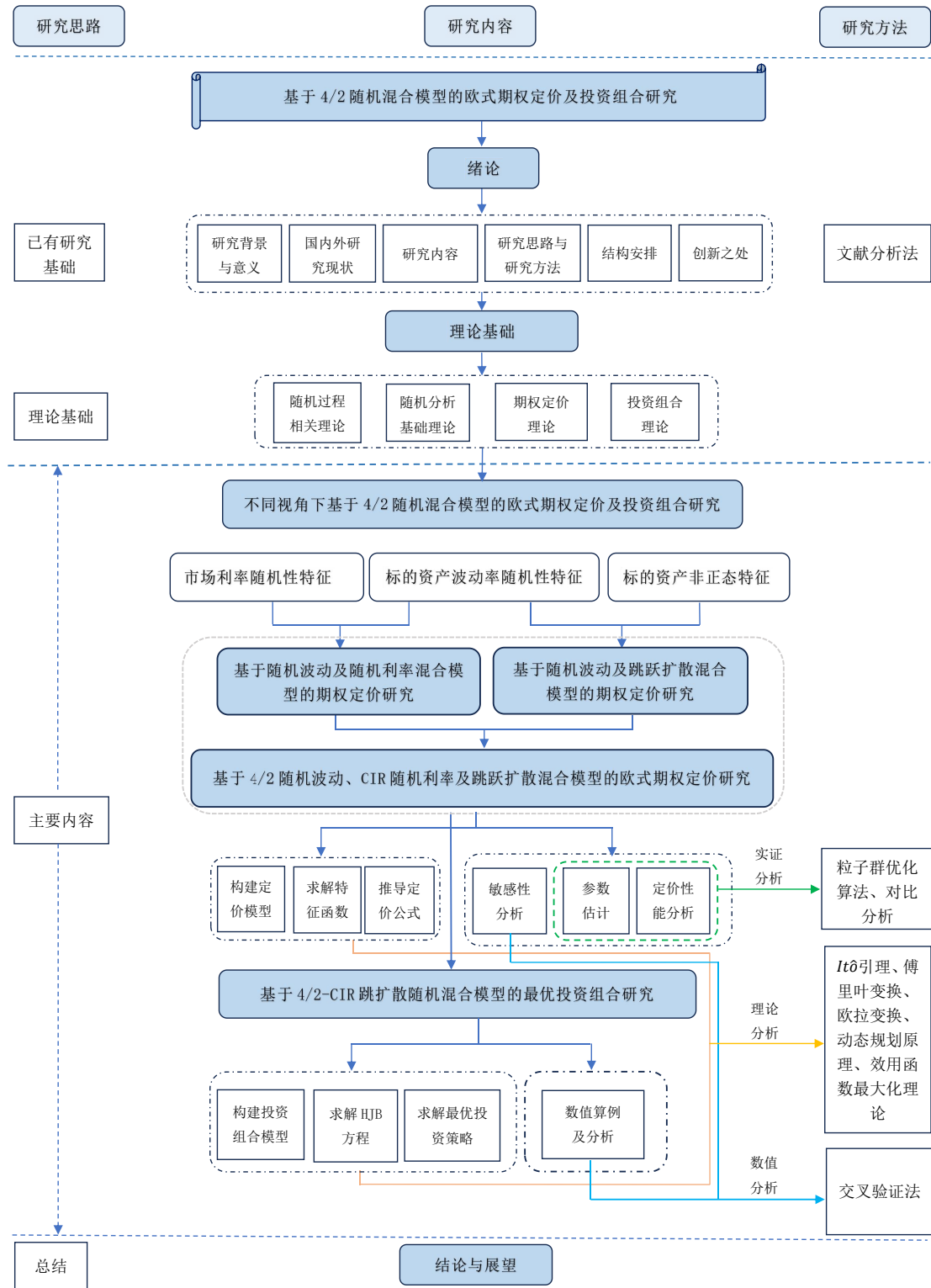


图 1.1 技术路线图

1.4.2 研究方法

基于金融市场基础资产动态变动及市场利率随机性特征对期权定价和最优投资组合的研究,不仅需要从模型构建方面进行理论探讨,而且需要结合金融市场实际数据进行实证检验.本文遵循从简单到复杂的研究策略,主要以文献分析法、理论分析、数值分析和实证分析相结合的研究方法对期权定价及最优投资问题展开讨论.

(1) 文献分析法.对国内外相关文献进行梳理总结,充分了解并总结学者们基于基础资产动态变化特征及市场利率随机性特征对期权定价及最优投资组合问题的研究进展,全面掌握已有期权定价及投资组合模型的优缺点,并找到本文研究的主要切入点,进而提出本文的研究思路.

(2) 理论分析法.构建符合实际金融市场特征的优化模型在期权定价理论和投资组合理论研究中具有举足轻重的地位.在期权定价研究中,本文在已有随机波动率模型、随机利率模型、跳跃扩散模型及随机混合模型的基础上,基于不同视角构建了相应的期权定价模型,并利用Itô引理、傅里叶变换及欧拉变换等方法,获得了不同模型下期权标的对数资产的特征函数及欧式期权定价公式;在最优投资组合研究中,基于期权定价研究结果,构建了符合真实市场资产价格变动特征的随机混合投资组合模型,并根据最优化理论及动态规划原理获得了该模型下的投资组合问题的最优解.

(3) 数值分析与实证分析相结合的方法.基于期权定价及投资组合的理论研究,通过交叉验证法,研究利率随机性对模型定价结果的影响、期权模型参数对定价结果的影响及投资组合模型参数对最优风险敞口及效用损失的影响.此外,实证分析部分利用粒子群优化算法对期权定价模型参数进行估计,并通过对比分析的方法,检验不同条件下相关模型在欧式期权市场中的定价表现.

1.5 结构安排

根据研究内容将全文分为七个章节,各章节具体内容如下:

第一章是绪论.首先,介绍本文的研究背景和研究意义,详细分析本研究主题的必要性和重要性;其次,分别将随机波动率模型下的期权定价研究现状、跳跃扩散模型下的期权定价研究现状、随机利率模型下的期权定价研究现状、随机混合模型下期权定价研究现状及金融市场投资组合研究现状进行详细梳理、归纳和总结,明确期权定价及投资组合已有研究成果及可拓展空间;再次,根据文献

梳理结果,提出本文的研究内容、研究思路、研究方法及结构安排;最后,概括并提炼本文研究的创新之处。

第二章为相关概念与理论基础.首先,介绍金融数学基础工具,包括随机分析基础理论及随机过程基本概念.其次,对期权定价的基础模型展开讨论,并分析现有期权定价模型的优缺点.主要对经典B-S模型、随机波动率模型、跳跃扩散模型及随机利率模型进行介绍.最后,介绍金融市场投资组合相关理论,如随机控制问题、动态规划原理、Hamilton-Jacobi-Bellman(HJB)方程及效用函数等.本部分内容后续为期权定价及投资组合的研究提供了理论支撑。

第三章是基于4/2-CIR随机混合模型的欧式期权定价研究.金融市场中影响资产定价的因素有许多,但利率和资产波动率是最为重要的因素.因此,本章将资产波动率随机性和市场利率随机性相结合,构建了4/2-CIR随机混合模型,获得了该模型下欧式期权定价公式,并分析模型参数对期权定价结果的影响.此外,基于市场实际数据对模型参数进行校准,并通过实证分析验证模型的合理性、有效性及精确度。

第四章是基于4/2跳扩散随机混合模型的欧式期权定价研究.首先,在标的资产价格具有随机波动的前提下,将跳跃扩散过程引入到描述标的资产动态变化特征的模型中,并基于此构建4/2跳跃扩散随机混合欧式期权定价模型.其次,通过傅里叶变换等方法获得了新模型下的欧式期权定价公式.再次,对真实的市场数据进行描述性统计分析,探讨所选数据的动态变化特征,分析新模型的适用性和合理性.最后,根据市场真实数据对模型参数进行校准,分析模型的定价性能和定价精度。

第五章是4/2-CIR跳扩散随机混合模型下的欧式期权定价研究.基于第三章和第四章的研究发现,标的资产价格的动态变化特征和市场利率的随机性均能影响期权的定价结果.因此,本章将第三章和第四章的模型进行推广,构建既能全面描述标的资产价格动态变化特征,又能合理反应市场利率随机性的4/2-CIR跳跃扩散随机混合定价模型,并获得了此模型下的欧式期权定价公式及其特征函数.此外,利用优化算法对模型参数进行估计,并将新模型与第三章和第四章的模型进行对比,分析新模型的定价性能及优势。

第六章是4/2-CIR跳扩散随机混合模型下的最优投资组合研究.基于有关4/2随机混合模型在期权定价中的优良表现,本章综合考虑金融资产动态变化及市场利率随机性特征,构建了符合实际金融资产动态变动特征的最优投资组合模型.根据动态规划原理及随机控制理论获得了幂效用函数下的最优风险敞口、

最优投资策略及效用损失等,并通过数值算例分析了模型参数对最优风险敞口及效用损失的影响.

第七章为总结与展望.对本文的重要研究结论进行总结,并对未来的研究进行展望.

1.6 创新之处

本文在已有期权定价及投资组合的研究基础上,基于随机分析、期权定价及投资组合理论的最新研究成果,将随机波动率期权定价模型、随机利率期权定价模型、跳跃扩散期权定价模型及随机混合期权定价模型进行扩展,分别构建了不同视角下的优化模型,并通过实际市场数据检验了模型在欧式期权定价问题中的定价性能.此外,通过数值例子分析模型参数对期权定价结果及投资策略的影响.

本文的主要创新点如下:

一是基于基础资产随机波动、尖峰、厚尾、跳跃及市场利率随机性等特征,分别构建了4/2-CIR随机混合模型、4/2跳扩散随机混合模型及4/2-CIR跳扩散随机混合模型.其中,4/2-CIR随机混合模型主要围绕基础资产波动率及利率随机性特征展开,该模型不仅同时解决了Heston随机波动率模型下期权隐含波动率曲面过于平坦及3/2随机波动率模型下期权隐含波动率曲面过于陡峭的问题,而且对市场利率随机性特征进行了全面描述,弥补了现有随机波动和随机利率混合模型的不足;4/2跳扩散随机混合模型主要考虑了基础资产动态变化特征对期权定价结果的影响,相比于传统的随机波动及跳跃扩散混合模型,该模型不仅描述了基础资产的尖峰、厚尾及随机波动特征,而且精确刻画了基础资产的非对称跳跃特征;4/2-CIR跳扩散随机混合定价模型综合考虑了基础资产的动态变动特征及市场利率的随机性特征,该模型的构建更加全面的考虑了影响期权价格的因素.

二是构建了符合实际金融市场特征的投资组合模型,获得了该模型下的最优投资策略.已有关于同时考虑随机波动率、随机利率、尖峰、厚尾及跳跃扩散特征对最优投资组合问题的研究,大多基于Heston随机波动率和3/2随机波动率模型展开,但Heston随机波动率及3/2随机波动率对基础资产的刻画较为片面.相对而言,具有双因子特征的4/2随机波动率模型对基础资产波动率随机性特征的刻画较为全面.此外,已有基于4/2随机波动率模型下的最优投资组合问题仅从基础模型出发,并未考虑基础资产的尖峰、厚尾、非对称跳跃及市场利率的随机性特征.因此,本文在假定风险资满足4/2-CIR跳扩散模型的假定下,构建了4/2-CIR跳扩散随机混合投资组合模型.

三是本文所构建4/2-CIR随机混合模型、4/2跳扩散随机混合模型及4/2-CIR跳扩散随机混合模型均提高了已有随机波动率模型的定价精度.其中,具有杠杆效应的4/2-CIR跳扩散随机混合模型在欧式期权定价中的表现最优.该结论不仅说明基于金融基础资产价格动态变动特征及市场利率随机性特征构建期权定价模

型的合理和有效性, 而且为投资组合模型的构建提供了新的研究思路. 此外, 采用不同投资组合模型所得投资策略时效用损失的大小表明, 4/2-CIR跳扩散投资组合模型下的投资策略优于4/2随机波动率及4/2-CIR随机混合模型下的投资策略. 该结论不仅表明本文基于4/2-CIR跳扩散随机混合模型进行投资决策的合理性, 并且证明了基于此模型所得投资策略的最优性.

2 理论基础

本章主要介绍随机过程、随机分析、期权定价模型及投资组合等基础理论,为后续期权定价及投资组合的研究提供理论支撑.

2.1 金融数学相关理论

2.1.1 随机过程相关理论

随机过程在金融市场数据特征的描述中具有至关重要的作用. 因此, 为提高对金融市场基础资产价格趋势的拟合程度, 本小节将描述基础资产价格趋势过程中所需随机过程及相关过程的概念进行介绍. 主要包括随机过程、鞅过程、布朗运动、Itô过程、Lévy过程、泊松过程及跳过程等的基本概念.

定义 2.1(Choe, 2016; 随机过程) 设 $I \in \mathbb{R}$ 是一实数集, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 为一概率空间. 若对于 $\forall t \in I$, $X(\omega, t)$ 都是定义在样本空间上的一个随机变量, 则称这一随机变量族为随机过程, 记为 $\{X(\omega, t), t \in I\}$, 简记为 $\{X(t), t \in I\}$ 或 $\{X_t\}_{t \in I}$, 其中, I 称为参数集、指标集或时间集.

定义 2.2(Choe, 2016; 鞅) 假定随机过程 $\{X_t\}_{t \in I}$ 是关于 $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$ 适应的, 并且对于 $\forall t$, X_t 是可积的, 即 $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$

- (1) 若对于 $\forall s \leq t$, 有 $X_s = \mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s]$, 则称 $\{X_t\}_{t \in I}$ 是一个鞅;
- (2) 若对于 $\forall s \leq t$, 有 $X_s \leq \mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s]$, 则称 $\{X_t\}_{t \in I}$ 是一个下鞅;
- (3) 若对于 $\forall s \leq t$, 有 $X_s \geq \mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s]$, 则称 $\{X_t\}_{t \in I}$ 是一个上鞅.

定义 2.3(Choe, 2016; Yan, 2018; 布朗运动) 假定 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是一随机过程, 若满足以下条件

- (1) $X_0 = 0$;
- (2) 对所有的 $0 \leq s \leq t$, 增量 $X_t - X_s$ 服从均值为0, 方差为 $t - s$ 的正态分布;
- (3) 对于 $\forall t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, 增量 $X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ 相互独立, 则称 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为布朗运动.

定义 2.4(Shreve, 2004; Itô过程) 假定 $\{W_t\}_{t \geq 0}$ 是 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 中的布朗运动, 则Itô过程是具有如下定义的随机过程

$$X_t = X_0 + \int_0^t u_s ds + \int_0^t v_s dW_s, \quad (2.1.1)$$

其中, u_t 是可积适应过程, v_t 是平方可积的适应过程.

此外,既具有马尔可夫性又具有鞅性的Lévy过程,能够较为合理的描述金融市场的尖峰、厚尾及跳跃等非正态特征,在金融市场的研究中具有广泛应用.本文第四、五及六章内容将基于此过程构建相关模型,故对此过程相关概念及公式进行简单介绍.

定义 2.5(Nunno等, 2008; Lévy过程) 假定 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是一个完备的概率空间, $\{X(t), t \geq 0\}$ 是完备概率空间上的随机过程,若随机过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 满足以下条件,则称其为Lévy过程

- (1) $X(0) = 0$ (P-a.s.);
- (2) $\{X(t), t \geq 0\}$ 具有独立增量性,即对于所有的 $t > 0, h > 0$, 增量 $X(t+h) - X(t)$ 与 $X(s), s \leq t$ 独立;
- (3) $\{X(t), t \geq 0\}$ 具有平稳增量性,即对于所有的 $t > 0, h > 0$, 增量 $X(t+h) - X(t)$ 与 $X(h)$ 有相同的概率分布;
- (4) $\{X(t), t \geq 0\}$ 是随机连续的,即对 $\forall t \geq 0, \varepsilon > 0$, 有 $\lim_{s \rightarrow t} P\{|X(t) - X(s)| > \varepsilon\} = 0$;
- (5) $\{X(t), t \geq 0\}$ 具有连续路径,即 $\{X(t), t \geq 0\}$ 的样本路径是右连续的,且存在左极限.

定义 2.6(Shreve, 2004; 泊松过程) 若概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 中的计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 满足以下条件,则称其为参数为 $\lambda (\lambda > 0)$ 的泊松过程

- (1) $N(0) = 0$;
- (2) $\{N(t), t \geq 0\}$ 是独立增量过程;
- (3) 在任一长度为 t 的时间内事件发生的次数服从均值为 λt 的泊松分布,即对 $\forall t \geq 0, \tau > 0$, 有

$$P\{N(t+\tau) - N(t) = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, k = 0, 1, 2, \dots$$

定义 2.7(Shreve, 2004; 跳过程) 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 为一概率空间, \mathcal{F}_t 是该概率空间上的流域. 假定 $\{W(t)\}_{t \geq 0}$ 是关于 \mathcal{F}_t 可测的布朗运动, $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ 是关于 \mathcal{F}_t 可测的泊松过程,且对于所有的 $u > t$, $W(u) - W(t)$ 和 $N(u) - N(t)$ 均与 \mathcal{F}_t 相互独立. 若假定 $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ 是具有如下形式的右连续随机过程

$$X(t) = X(0) + I(t) + R(t) + J(t),$$

其中, $I(t) = \int_0^t A(s) dW(s)$ 是与 \mathcal{F}_t 相关的伊藤积分, $R(t) = \int_0^t L(s) ds$ 是一适应过程的黎曼积分, $J(t)$ 是一适应的右连续纯跳过程, 则称 $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ 为跳过程.

定义 2.8(Nunno等, 2008; Lévy-Itô公式) 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 为一概率空间, $\{X(t), t \geq$

$0\}$ 是具有如下形式的Itô-Lévy过程

$$X(t) = x + \int_0^t \alpha(s)ds + \int_0^t \beta(s)dW(s) + \int_0^t \int_R \gamma(s, z)N(ds, dz),$$

其中, $\alpha(s), \beta(t), \gamma(t, z)$ 均为可料过程.

假定 $f: (0, \infty) \times R \rightarrow R$ 是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 中的函数, 令

$$Y(t) := f(t, X(t)), t \geq 0.$$

则过程 $\{Y(t), t \geq 0\}$ 也是Itô-Lévy过程, 其微分形式如下

$$\begin{aligned} dY(t) &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, X(t))dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X(t))\alpha(t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X(t))\beta(t)dW(t) \\ &\quad + \int_R \left[f(t, X(t) + \gamma(t, z)) - f(t, X(t^-)) - \frac{\partial f}{\partial x}(t, X(t))\gamma(t, z) \right] \nu(dz)dt \\ &\quad + \int_R [f(t, X(t^-) + \gamma(t, z)) - f(t, X(t^-))] N(dt, dz) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X(t))\beta^2(t)dt. \end{aligned}$$

其中, ν 是 $\{X(t), t \geq 0\}$ 的Lévy测度.

在期权定价及投资组合研究中, 最为关键的是构建风险中性测度下标的资产满足的微分方程, 风险中性测度是通过对真实测度进行测度变换获得. 且Radon-Nikodym 导数和Girsanov定理是进行测度变换的关键. 因此, 对Radon-Nikodym导数及Girsanov定理进行详细介绍, 为期权定价及投资组合模型的构建提供保障.

定义 2.9(Choe, 2016; Kwok, 2008; **Radon-Nikodym导数**) 令 \mathbb{P} 和 \mathbb{Q} 是测度空间 (Ω, \mathcal{F}) 上的有限测度, 若 $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$, 则存在一个非负可测函数 $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, 使得对 $\forall A \in \mathcal{F}$, 有

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A X d\mathbb{P},$$

则称 X 是 \mathbb{Q} 对 \mathbb{P} 的Radon-Nikodym导数.

2.1.2 随机分析相关理论

合理有效求解标的资产满足的微分方程是期权定价及投资组合研究的基础, 而Itô引理及Feynman-Kac定理对于求解微分方程十分重要. 此外, 为避免定价过程中产生套利, 需在风险中性测度下构建定价模型, 且在风险中性测度下标的资

产的贴现价格是一个鞅. 对于风险中性测度下期权定价问题的研究, 往往需要将具有漂移项的动态过程转化为鞅过程, 这一过程的转化需要利用Girsanov定理. 基于此, 本小节主要介绍Itô引理、Feynman-Kac定理及Girsanov定理等理论, 为后续期权定价及投资组合模型的构建及求解奠定基础.

引理 2.1(Kwok, 2008; **Itô引理**) 假定 $f(t, x)$ 是关于 t 一次可微, 关于 x 二次连续可微的连续函数, 其关于 t 和 x 的偏导数为 $f_t(t, x)$, $f_x(t, x)$ 和 $f_{xx}(t, x)$, $\{X_t\}_{t \geq 0}$ 是由(2.1.1)式定义的Itô过程, 则对于 $\forall t \geq 0$, 有

$$df(t, X_t) = f_t(t, X_t)dt + f_x(t, X_t)v_t dW_t + f_x(t, X_t)u_t dt + \frac{1}{2}f_{xx}(t, X_t)v_t^2 dt.$$

定理 2.1(Choe, 2016; **Feynman-Kac定理**) 令 $F, \mu, \sigma : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是关于 t 和 x 的二元函数, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是关于 x 的一元函数. 对于如下的偏微分方程

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) + \mu(t, x)\frac{\partial F}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, x)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, x) = 0, 0 < t < T, \\ F(T, x) = h(x), \end{cases}$$

若随机过程 $\{X_t\}_{t \geq 0}$ 满足 $dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$, 则

$$F(t, x) = \mathbb{E}[h(X_T) | \mathcal{F}_t] |_{X_t=x} = \mathbb{E}[h(X_T) | X_t = x].$$

定理 2.2(Kwok, 2008; **Girsanov定理**) 令 $\{W_t\}_{t \in [0, T]}$ 是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的布朗运动, 若 $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ 是相对应的信息流, 假定 $\{\theta(t)\}_{t \in [0, T]}$ 是关于信息流 \mathcal{F}_t 的可适过程. 对于 $t \in [0, T]$, 定义

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_t &= \int_0^t \theta(s)ds + W_t, \\ X_t &= \exp \left\{ - \int_0^t \theta(s)dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta^2(s)ds \right\}, \end{aligned}$$

且 θ 满足以下Novikov条件

$$\mathbb{E} \left[\exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T \theta^2(s)ds \right\} \right] < \infty,$$

即 $\mathbb{E}[X(T)] = 1$, 定义一个新的测度 \mathbb{Q} , 使得

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A X(T)d\mathbb{P}, \forall A \in \mathcal{F},$$

则 $\{\widetilde{W}_t\}_{t \in [0, T]}$ 是一个布朗运动.

2.2 期权定价理论模型

B-S期权定价理论作为金融领域应用最为广泛的定价理论,在期权定价领域具有里程碑似的意义.目前,对于期权定价理论的研究大多是针对B-S模型的不足展开.因此,本文先对B-S模型进行介绍并阐述其不足,随后对现有针对B-S模型不足的改进模型进行简单阐述,进而引出本文的主要关注点及内容.在后续章节中,将以本小节所给定价模型为基准模型,探讨新建模型的定价性能.

2.2.1 Black-Scholes模型

Black-Scholes(B-S)模型是Black和Schole(1973)提出,其作为经典的期权定价模型已被广泛应用于期权定价的研究中,以此模型作为基准模型具有一定的研究基础.

B-S模型的应用需满足以下假设条件:

- (1) 金融市场是完备的,即市场上不存在套利机会、交易费用和印花税;
- (2) 市场的参与者可以连续进行交易,并允许做空;
- (3) 市场的无风险利率和波动率均为常数;
- (4) 在期权合约的持有期内,标的资产不支付红利,也无股息或其他分配;
- (5) 标的资产价格服从几何布朗运动,即 $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$.

根据标的资产价格满足的随机微分方程,可以获得期权合约价值满足的偏微分方程,即

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS_t \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \quad (2.2.1)$$

其中, V 表示期权在 t 时刻的价值, r 表示无风险利率.

通过求解期权合约价值满足的偏微分方程,可获得B-S模型下欧式看涨期权定价公式如下

$$C(S_t, t) = S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2), \quad (2.2.2)$$

其中, $d_1 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$, $C(S_t, t)$ 表示执行价格为 K 、到期日为 T 的欧式看涨期权在 t 时刻的价格, $N(\cdot)$ 表示正态分布的累积分布函数.

虽然B-S模型在期权定价研究中具有里程碑似的意义,但其严苛的假设条件与金融市场的实际情况不相符,因此学者对B-S模型进行改进,从不同角度出提出了大量改进的期权定价模型.针对B-S模型中常数利率、常数波动率及标的资

产服从正态分布的假设,分别提出了具有随机利率、随机波动率及跳扩散特征的期权定价模型.

2.2.2 CIR随机利率模型

随着国家经济政策以及金融市场状况等的不断变化,利率不再是一个常数而具有一定的波动性.针对利率的随机性问题,Vasicek(1977)提出了Vasicek模型用于描述瞬时利率的动态过程.Cox等(1985)提出CIR模型主要描述长期利率的均值回复性.虽然Vasicek和CIR模型均得到了学者的广泛关注,但Vasicek模型中利率可能出现负值的情况,而CIR模型由于其Feller条件的限制,使得利率的取值均大于零.此外,目前国内利率未出现负值的情况,而本文的研究主要针对国内金融市场展开.因此,本小节主要对CIR随机利率模型进行介绍.

CIR模型下利率满足以下动态方程

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_{r,t}, \quad (2.2.3)$$

其中, κ 为利率的均值回复速度, θ 为利率的均值回复水平, σ 为利率的波动率,且 $2\kappa\theta \geq \sigma^2$.

s 时刻利率的概率密度为

$$\begin{aligned} f(r_s, s; r_t, t) &= ce^{-u-v} \left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{q}{2}} I_q(2(uv)^{\frac{1}{2}}), \\ c &\equiv \frac{2\kappa}{\sigma^2(1 - e^{-\kappa(s-t)}), \\ u &\equiv cr_t e^{-\kappa(s-t)}, \\ v &\equiv cr_s, \\ q &\equiv \frac{2\kappa\theta}{\sigma^2} - 1, \end{aligned}$$

其中, $I_q(\cdot)$ 是修正的Bessel函数.特别地,其分布函数是自由度为 $2q+2$,非中心参数为 $2u$ 的非中心卡方分布 $\chi^2(2cr_s; 2q+2, 2u)$.均值和方差分别为

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(r_s|r_t) &= r_t e^{-\kappa(s-t)} + \theta(1 - e^{-\kappa(s-t)}), \\ \text{Var}(r_s|r_t) &= r_t \left(\frac{\sigma^2}{\kappa}\right) (e^{-\kappa(s-t)} - e^{-2\kappa(s-t)}) + \theta \left(\frac{\sigma^2}{\kappa}\right) (1 - e^{-\kappa(s-t)})^2. \end{aligned}$$

2.2.3 随机波动率模型

对于B-S模型波动率为常数的假设, 学者们构建了不同的随机波动率模型, 本研究主要关注较为经典的Heston随机波动率模型及其相关的3/2随机波动率模型和4/2随机波动率模型. 因此, 本小节主要对Heston随机波动率模型, 3/2随机波动率模型和4/2随机波动率模型进行详细介绍.

2.2.3.1 Heston随机波动率模型

Heston随机波动率模型假定标的资产价格 S_t 满足以下随机微分方程

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dW_t, \quad (2.2.4)$$

其中, S_t 表示标的资产在 t 时刻的价格, μ 表示期望回报, W_t 为布朗运动, V_t 为标的资产价格的波动率.

标的资产价格波动率 V_t 满足如下方程

$$dV_t = \alpha(\theta - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t}dW_{v,t}, \quad (2.2.5)$$

其中, 参数 α, θ, σ 分别表示波动率的均值回复速度、均值回复水平及波动率, $W_{v,t}$ 为标准布朗运动, 且 $d \langle W_{v,t}, W_t \rangle = \rho dt$.

Heston随机波动率模型下欧式期权的定价公式

$$C(S_t, V_t, t) = S_t \Pi_1 - K e^{-rT} \Pi_2, \quad (2.2.6)$$

其中, $C(S_t, V_t, t)$ 表示欧式看涨期权价格, S_t 表示 t 时刻标的资产的价格, K 表示执行价格, $\Pi_j, j = 1, 2$ 为相应的特征函数, 具体形式如下

$$\begin{aligned} \Pi_j(x, v, \ln(K)) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-iu \ln(K)} \Phi_j(x, v, t, u)}{iu} \right] du, \\ \Phi_j(x, v, t, u) &= \exp \{ C(\tau, u) + D(\tau, u)v + iux \}, \\ C(\tau, u) &= rui\tau + \frac{a}{\sigma^2} \left[(b_j - \rho\sigma iu + d)\tau - 2 \ln \left(\frac{1 - ge^{d\tau}}{1 - g} \right) \right], \\ D(\tau, u) &= \frac{b_j - \rho\sigma iu + d}{\sigma^2} \left(\frac{1 - e^{d\tau}}{1 - ge^{d\tau}} \right), \\ g &= \frac{b_j - \rho\sigma iu + d}{b_j - \rho\sigma iu - d}, \\ d &= \sqrt{(\rho\sigma iu - b_j)^2 - \sigma^2(2\phi_j iu - u^2)}, \end{aligned}$$

其中, $x = \ln S_t$, $\tau = T - t$, $v = V_t$, $\varphi_1 = \frac{1}{2}$, $\varphi_2 = -\frac{1}{2}$, $b_1 = \alpha + \lambda - \rho\sigma$, $b_2 = \alpha + \lambda$, $a = \alpha\theta$, λ 表示波动率风险价格.

2.2.3.2 3/2随机波动率模型

虽然Heston随机波动率模型因其能够合理描述金融市场中的波动率微笑等特征而引起了广泛关注,但在实际应用中仍存在一些不足.如,为了拟合陡峭的标的资产曲面产生较大的方差波动率参数,使得估计参数不满足Feller条件等;此外,由于Heston随机波动率模型对非常低的或即将消失的波动率样本赋予较大的权重,无法拟合极端情况使得该模型所估计的期权隐含波动率曲面趋于平缓.于是,为解决这一问题,Heston(1997)提出了3/2随机波动率模型,其假设波动率服从逆CIR过程,允许瞬时波动率出现峰值的极端路径,此模型下所产生的隐含波动率曲面较为陡峭.

3/2随机波动率模型假定标的资产价格 S_t 满足以下方程

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dW_t, \quad (2.2.7)$$

其中, S_t 表示标的资产在 t 时刻的价格, μ 表示期望回报, W_t 为布朗运动. V_t 为标的资产价格的波动率.

在此情况下,标的资产价格波动率 V_t 满足如下方程

$$dV_t = V_t(\eta - \kappa V_t)dt + \varepsilon V_t^{\frac{3}{2}} dW_{v,t}, \quad (2.2.8)$$

其中,参数 κV_t 表示波动率的均值回复速度, $\frac{\eta}{\kappa}$ 表示波动率的均值回复水平, ε 为波动率的波动率, $W_{v,t}$ 为标准布朗运动,且 $d \langle W_{v,t}, W_t \rangle = \rho dt$.此外,由于(2.2.8)式中扩散项是随机波动率 V_t 的3/2次幂,因此将此模型称为3/2随机波动率模型.

2.2.3.3 4/2随机波动率模型

3/2随机波动率模型虽然弥补了Heston随机波动率模型的缺陷,但基于3/2随机波动率模型所产生的期权隐含波动率曲面较为陡峭.实际市场中期权隐含波动率表面既可能趋于平坦也可能较为陡峭,而Heston随机波动率模型与3/2随机波动率模型产生的期权隐含波动率斜率只能描述一种情况.因此,为同时解决Heston随机波动率模型和3/2随机波动率模型的缺点,Grasselli(2017)提出了4/2随机波动率模型,该模型具有双因素模型的特点,可以更准确地描述金融市场数据波动率的变化情况.

4/2随机波动率模型假定标的资产价格 S_t 满足以下方程

$$dS_t = \mu S_t dt + \left(a\sqrt{V_t} + \frac{b}{\sqrt{V_t}} \right) S_t dW_t, \quad (2.2.9)$$

其中, S_t 表示标的资产在 t 时刻的价格, μ 表示期望回报, W_t 为布朗运动, V_t 为标的资产价格的波动率.

此时, 标的资产价格波动率 V_t 满足如下方程

$$dV_t = \alpha(\theta - V_t)dt + \sigma V_t dW_{v,t}, \quad (2.2.10)$$

其中, 参数 α 表示波动率的均值回复速度, θ 表示波动率的均值回复水平, σ 表示波动率的波动率, $W_{v,t}$ 为标准布朗运动, 且 $d \langle W_{v,t}, W_t \rangle = \rho dt$.

如果 $Z_t = V_t^{-1}$, 则逆CIR过程满足的随机微分方程如下

$$dZ_t = \tilde{\alpha}Z_t(\tilde{\theta} - Z_t)dt + \tilde{\sigma}Z_t^{\frac{3}{2}}dW_{v,t}, \quad (2.2.11)$$

其中, $\tilde{\alpha} = \alpha\theta - \sigma^2$, $\tilde{\theta} = \frac{\alpha}{\alpha\theta - \sigma^2}$, $\tilde{\sigma} = -\sigma$.

根据(2.2.11)式可以看出, 3/2随机波动率模型与Heston随机波动率模型的差异是3/2随机波动率模型具有一个非线性漂移项, 均值回复速度是一个随机变量. 此外, 由于标的资产价格所满足的方程(2.2.9)中扩散项是CIR项和3/2项的叠加(即1/2+3/2)故称其为4/2随机波动率模型. 当方程(2.2.9)中 $a = 1, b = 0$ 时4/2随机波动率模型退化为Heston随机波动率模型; 当方程(2.2.9)中 $a = 0, b = 1$ 时4/2随机波动率模型退化为3/2随机波动率模型.

2.2.4 跳扩散模型

经典B-S模型中假定期权标的资产价格服从正态分布, 但随着对期权定价内容的深入研究发现, 期权标的资产价格会因受到外界环境因素的影响而出现价格的不连续跳跃现象, 为了刻画这种跳跃现象, 学者们将跳跃风险引入到标的资产价格过程中. 而Lévy过程由于其能够描述金融市场数据的跳跃厚尾特征的平滑独立性和右连左极性, 被广泛用于期权定价模型中. Lévy过程在期权定价中的应用最早由Merton(1976)提出. 此外, Madan和Seneta(1990)、Carr等(2002)、Cai等(2009)、Kou和Wang(2004)分别提出了VG模型、CGMY模型、混合指数跳跃模型和双指数跳跃模型. 其中双指数分布具有明显的尖峰厚尾特征, 能够全面描述金融市场数据的尖峰厚尾及跳跃

特征, 本文主要在4/2随机波动率模型基础上引入此模型展开研究.

在双指数跳跃扩散模型中, 假定标的资产价格过程满足以下方程

$$dS_t = (\mu - \lambda \kappa) S_t dt + \sigma dW_t + d \left(\sum_{i=1}^{N(t)} (V_i - 1) \right), \quad (2.2.12)$$

其中, W_t 是标准布朗运动, $N(t)$ 是强度为 λ 的泊松过程, V_i 是独立同分布的非负随机变量序列, $\kappa := \mathbb{E}[V] - 1 = \frac{p\eta_1}{\eta_1 - 1} + \frac{q\eta_2}{\eta_2 + 1} - 1$.

假定 $Y = \ln V$, 则 Y 是非对称的双指数分布, 其密度函数如下

$$f_Y(y) = p\eta_1 e^{-\eta_1 y} I_{\{y \geq 0\}} + q\eta_2 e^{\eta_2 y} I_{\{y < 0\}}, \quad \eta_1 > 1, \eta_2 > 0, \quad (2.2.13)$$

其中, $p, q \geq 0$, 且 $p + q = 1$, 双指数分布的期望分别为 $\frac{1}{\eta_1}$ 和 $\frac{1}{\eta_2}$, p 和 q 分别表示向上跳和向下跳的概率.

2.3 投资组合相关理论

本文主要对金融数学中的期权定价及投资组合问题进行研究, 2.2节主要对期权定价及投资组合模型构建的基本理论进行了简单介绍. 对于最优投资策略的求解问题需运用随机控制及其相关理论. 因此, 本小节主要介绍随机控制相关理论、动态规划原理、HJB方程及效用函数等内容, 为第六章最优投资组合策略的求解提供理论支撑.

2.3.1 随机控制理论

假定 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是一完备的概率空间, $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ 是一流域, 随机系统满足以下随机微分方程

$$dX_t = \mu(X_t, u_t, t)dt + \sigma(X_t, u_t, t)dW_t, \quad (2.3.1)$$

当 $\mu(X_t, u_t, t)$ 和 $\sigma(X_t, u_t, t)$ 满足一定条件时, 上述方程存在唯一解

$$X_t = x + \int_0^t \mu(X_s, u_s, s)ds + \int_0^t \sigma(X_s, u_s, s)dW_s, \quad X_0 = x. \quad (2.3.2)$$

设函数 $f(X_t, t)$ 是关于 t 一次可微, 关于 X 二次连续可微的连续可微函数, 则根

据Itô引理, 有

$$\begin{aligned} f(X_t, t) = & x + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(X_s, u_s, s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_s, u_s, s) \sigma^2(X_s, u_s, s) ds \\ & + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, u_s, s) \sigma(X_s, u_s, s) dW_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, u_s, s) \mu(X_s, u_s, s) ds, \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

记

$$\mathcal{L}f(x, t) = \frac{\partial f}{\partial t}(X_t, u_t, t) + \frac{\partial f}{\partial x}(X_t, u_t, t) \mu(X_t, u_t, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t, u_t, t) \sigma^2(X_t, u_t, t), \quad (2.3.4)$$

则可得

$$\mathbb{E}[f(x, t)] = x + E \left[\int_0^t \mathcal{L}f(X_s, u_s, s) ds \right]. \quad (2.3.5)$$

随机优化问题的目标是寻找最优控制策略 u^* 和目标函数的最大值函数 $H(x, t)$, 使得以下目标函数最大

$$H^u(x, t) = \mathbb{E}_{x,t} \left[\int_t^T f(X_s, u_s, s) ds + H(X(T), T) \right], \quad (2.3.6)$$

值函数 $H(x, t) = \sup_{u \in \Pi} H^u(x, t)$.

该问题的求解则需要应用动态规划原理与HJB方程.

2.3.2 动态规划原理与HJB方程

动态规划原理最早由Bellman提出, 又称为Bellman最优化原理, 其表达式为:

$$H(x, t) = \sup_{u \in \Pi} \mathbb{E}_{x,t} \left[\int_t^T f(X_s, u_s, s) ds + H(X(T), T) \right], \quad (2.3.7)$$

则

$$\begin{aligned} H(x, t) &= \sup_{u \in \Pi} \mathbb{E}_{x,t} \left[\int_t^{t+h} f(X_s, u_s, s) ds + H(X(t+h), t) \right], \\ &\geq \mathbb{E} \left[\int_t^{t+h} f(X_s, u_s, s) ds + H(X(t+h), t) \right]. \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

假定 M 是局部鞅, 且 H 足够光滑, 则在区间 $[t, t+h]$ 上由Itô引理可得

$$H(x_{t+h}, t+h) = H(x, t) + \int_t^{t+h} \mathcal{L}H(X_s, u_s, s) ds + M, \quad (2.3.9)$$

对上式两边求期望可得

$$0 \geq \mathbb{E} \left[\int_t^{t+h} (\mathcal{L}H(X_s, u_s, s) + f(X_s, u_s, s)) ds \right]. \quad (2.3.10)$$

假如 u^* 是一最优策略, 则

$$0 = \mathbb{E} \left[\int_t^{t+h} (\mathcal{L}^*H(X_s^*, u_s^*, s) + f(X_s^*, u_s^*, s)) ds \right], \quad (2.3.11)$$

进而可得动态规划方程, 即HJB方程如下

$$\sup_{u \in \Pi} \{ \mathcal{L}H(X_s, u, s) + f(X_s, u, s) \} = 0, \quad (2.3.12)$$

最后结合边界条件即可得最优策略 u^* .

2.3.3 效用函数

效用函数是表示投资者对收益和风险偏好程度的函数. 一般情况下风险厌恶型投资者较多, 即投资者的效用函数满足以下条件

$$U'(x) > 0, U''(x) < 0. \quad (2.3.13)$$

在效用函数框架下, 一般用绝对风险厌恶系数和相对风险厌恶系数度量风险厌恶程度. 其中, 绝对风险厌恶系数 $r_A = -\frac{U''(x)}{U'(x)}$, 相对风险厌恶系数 $r_R = -x \frac{U''(x)}{U'(x)}$.

金融市场中常用的效用函数

(1) 常系数相对风险厌恶效用函数, 即幂效用函数(CRRA)

$$U(x) = \frac{x^\delta}{\delta}, \quad \delta < 1, \delta \neq 0, \quad (2.3.14)$$

此时, $r_A = \frac{1-\delta}{x}$, $r_R = 1 - \delta$, 特别地, 当 $\delta \rightarrow 1$ 时, 效用函数变为对数效用函数, 即 $U(x) = \ln x$, 且 $r_A = \frac{1}{x}$, $r_R = 1$.

(2) 常系数绝对风险厌恶效用函数, 即负指数效用函数(CARA)

$$U(x) = -e^{-\delta x}, \quad \delta > 0, \quad (2.3.15)$$

此时, $r_A = \delta$, $r_R = \delta x$.

(3) 二次效用函数:

$$U(x) = x - \delta x^2, \quad x < \frac{1}{2\delta}, \quad \delta > 0. \quad (2.3.16)$$

(4) 双曲型绝对风险厌恶效用函数(HARA)

$$U(x) = \frac{1-\delta}{\delta} \left(\frac{\alpha x}{1-\delta} + \beta \right)^\delta, \quad (2.3.17)$$

其中, $\delta \neq 1$, $\frac{\alpha x}{1-\delta} + \beta > 0$, $\alpha > 0$.

特别地, 当 $\delta = -\infty$, $\beta = 1$ 时, HARA 效用函数变为 CARA 效用函数; 当 $\delta < 1$, $\beta = 0$ 时, HARA 效用函数变为 CRRA 效用函数; 当 $\delta = 2$ 时, HARA 效用函数变为二次效用函数.

3 基于4/2-CIR随机混合模型的欧式期权定价研究

近年来,随着内源性和外源性冲击风险的不断增加,金融市场进入前所未有的不稳定时期.金融市场未来的不确定性,使得金融资产价格出现增值或贬值的变动情况.而期权作为重要的金融衍生品,能够有效规避市场风险.对于期权定价理论的研究,最为经典的是由Black等(1973)和Merton(1973)提出的B-S模型,但该模型中标的资产价格波动率及市场利率为常数等假设,与金融市场实际情况不相符.因此,一些学者对波动率和利率为常数的条件进行放宽,探讨随机波动率及随机利率模型下的期权定价问题.目前,影响较为深远的随机波动率模型主要有Heston随机波动率、3/2随机波动率模型及4/2随机波动率模型.其中,4/2随机波动率模型因其具有双因子特征,故其对金融市场数据动态特征的描述较为全面.但该模型下期权定价问题的研究仍处于初级阶段,有待进一步深入研究.用于描述利率变动特征的模型主要有Vasicek模型和CIR模型.其中,CIR模型由于其Feller条件的限制,使得利率不会出现负值的情况而引起了广大学者的关注(He和Zhu, 2018; 王宜峰等,2018; 林建伟和王志焕, 2020; 等).此外,现有关于随机波动率和随机利率混合模型下期权定价问题的研究大多基于单因子Heston随机波动率模型展开(Chen等, 2017; Chang和Wang, 2020; He和Chen, 2022; 等),而关于具有双因子4/2随机波动率与随机利率混合模型下期权定价问题的研究仍有待进一步探究.基于此,本章内容将4/2随机波动率模型与CIR随机利率模型相结合,构建了4/2-CIR随机混合期权定价模型,并基于此模型对欧式期权定价问题进行研究.本章所构建的4/2-CIR随机混合模型具有双因子模型的特征,与单因子模型相比此模型不仅能精确刻画金融市场波动率的波动情况,而且也能更精确的模拟利率的均值回复和随机性特征.较已有期权定价模型而言,本章所构建模型更符合金融市场特征,丰富了期权定价模型的理论研究.

本章结构如下:第一节构建4/2-CIR随机混合期权定价模型,并利用Itô引理、傅里叶变换及欧拉变换等方法获得基于4/2-CIR随机混合模型的欧式期权定价公式;第二节为数值分析,探讨4/2-CIR随机混合模型的定价性能以及模型中主要参数对模型定价结果的影响;第三节为基于4/2-CIR随机混合模型的欧式期权定价实证分析,选取上证50ETF期权数据,验证4/2-CIR随机混合模型在欧式期权定价问题中的有效性和精确度;第四节为本章小节.

3.1 4/2-CIR随机混合模型的构建

考虑到金融市场数据尖峰、厚尾、波动率集聚及市场利率随机性等特征对金融衍生产品价格具有显著影响,本小节将具有双因子特征的4/2随机波动率模型与CIR随机利率模型相结合,构建了4/2-CIR随机混合期权定价模型,并简要介绍4/2-CIR随机混合模型的基本内容.

假设金融市场满足如下条件

- (1) 交易市场是完备的,即交易过程中无交易费用、不支付股息、交易无限可分且允许卖空;
- (2) 标的资产价格遵循4/2随机波动率模型;
- (3) 无风险利率 r_t 服从CIR过程.

假定 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ 为一完备概率空间,则4/2-CIR随机混合模型满足如下方程

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} = r_t S_t dt + \left(a\sqrt{V_t} + \frac{b}{\sqrt{V_t}} \right) dW_t, \\ dV_t = \alpha_v(\theta_v - V_t)dt + \sigma_v\sqrt{V_t}dW_{v,t}, \\ dr_t = \alpha_r(\theta_r - r_t)dt + \sigma_r\sqrt{r_t}dW_{r,t}, \end{cases} \quad (3.1.1)$$

其中, S_t 为标的资产价格;随机波动率 V_t 及随机利率 r_t 均服从CIR过程,且 α_v 和 α_r 分别表示波动率和利率的均值回复速度; θ_v 和 θ_r 分别为波动率和利率的均值回复水平; σ_v 和 σ_r 分别为波动率过程和利率过程的波动率; a, b 为常数; $W_t, W_{v,t}, W_{r,t}$ 为标准布朗运动,且 $d \langle W_t, W_{v,t} \rangle = \rho dt, d \langle W_t, W_{r,t} \rangle = 0, d \langle W_{v,t}, W_{r,t} \rangle = 0$.

注:假定(3.3.1)式中标的资产价格满足的微分方程中 r_t 为常数时,4/2-CIR随机混合模型退化为4/2随机波动率模型(Grasselli, 2017);(3.3.1)式中参数 $a = 1, b = 0$ 时,4/2-CIR随机混合模型退化为Heston-CIR随机混合模型(He和Zhu, 2018).

3.2 4/2-CIR随机混合模型欧式期权定价

3.1节简单介绍了4/2-CIR随机混合模型的基本内容,本小节主要对基于4/2-CIR随机混合模型的欧式期权定价理论进行研究.由于4/2-CIR随机混合模型满足的偏微分方程较为复杂,很难通过直接求解偏微分方程的方法得到定价公式.因此,文中主要通过求解标的对数资产价格的特征函数,进一步再获得4/2-CIR随机混合模型下的欧式期权定价公式.

3.2.1 基于4/2-CIR随机混合模型的对数资产价格特征函数

为获得4/2-CIR随机混合模型下的欧式期权定价公式, 本小节先求解期权标的对数资产价格的特征函数, 详见定理3.1.

定理 3.1 假定在风险中性测度 \mathbb{Q} 下, 标的资产价格服从4/2-CIR过程, $u \in \mathbb{R}$, 那么其广义特征函数如下

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{uY_T} | Y_t, V_t, r_t) &= \exp \left\{ \frac{V_t}{\sigma_v^2} \left(-u a \rho \sigma_v + \alpha_v - \sqrt{A} \coth \left(\frac{\sqrt{A} \tau}{2} \right) \right) + \frac{\alpha_v^2 \theta_v \tau}{\sigma_v^2} \right\} \\
&\times \exp \left\{ u \left(Y_t + \frac{b \rho \alpha_v - a \rho \alpha_v \theta_v}{\sigma_v} - a b + u(1 - \rho^2) a b \right) \tau \right\} \\
&\times \left(\frac{\sqrt{A}}{\sigma_v^2 \sinh \left(\frac{\sqrt{A} \tau}{2} \right)} \right)^{B+1} \left(C - \frac{u a \rho}{\sigma_v} \right)^{-\left(\frac{1}{2} + \frac{B}{2} + \frac{\alpha_v \theta_v}{\sigma_v^2} + \frac{u b \rho}{\sigma_v} \right)} \\
&\times v_t^{\frac{1}{2} + \frac{B}{2} - \frac{\alpha_v \theta_v}{\sigma_v^2} - \frac{u b \rho}{\sigma_v}} \frac{\Gamma \left(\frac{1}{2} + \frac{B}{2} + \frac{\alpha_v \theta_v}{\sigma_v^2} + \frac{u b \rho}{\sigma_v} \right)}{\Gamma(B+1)} \\
&\times \exp \left(\frac{2 \alpha_r \theta_r}{\sigma_r^2} \ln \left(\frac{2 \lambda_r e^{\frac{(\alpha_r - \lambda_r)}{2} \tau}}{D} \right) + \frac{2u(1 - e^{-\lambda_r \tau}) r_t}{D} \right) \\
&\times {}_1F_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{B}{2} + \frac{\alpha_v \theta_v}{\sigma_v^2} + \frac{u b \rho}{\sigma_v}, B+1, \frac{A V_t}{E} \right) \quad (3.2.1)
\end{aligned}$$

其中, ${}_1F_1$ 为超几何汇流函数, 且

$$\begin{aligned}
A &= \alpha_v^2 - 2\sigma_v^2 \left(u \left(\frac{a \rho \alpha_v}{\sigma_v} - \frac{1}{2} a^2 \right) + \frac{1}{2} u^2 (1 - \rho^2) a^2 \right), \\
B &= \frac{2}{\sigma_v^2} \sqrt{\left(\alpha_v \theta_v - \frac{\sigma_v^2}{2} \right)^2 - 2\sigma_v^2 \left(u \left(\frac{b \rho}{\sigma_v} \left(\frac{\sigma_v^2}{2} - \alpha_v \theta_v \right) - \frac{b^2}{2} \right) + \frac{1}{2} u^2 (1 - \rho^2) b^2 \right)}, \\
C &= \frac{1}{\sigma_v^2} \left(\sqrt{A} \coth \left(\frac{\sqrt{A} \tau}{2} \right) + \alpha_v \right), \quad D = 2\lambda_r e^{-\lambda_r \tau} + (\alpha_r + \lambda_r) (1 - e^{-\lambda_r \tau}), \\
E &= \sigma_v^4 \sinh^2 \left(\frac{\sqrt{A} \tau}{2} \right) \left(C - \frac{u a \rho}{\sigma_v} \right), \quad \lambda_r = \sqrt{\alpha_r^2 - 2\sigma_r^2 u}, \quad \tau = T - t.
\end{aligned}$$

证明 令 $Y_t = \ln S_t$, 则根据(3.1.1)式可得

$$\begin{aligned}
Y_T - Y_t &= \int_t^T r_s ds - \frac{1}{2} \int_t^T \left(a \sqrt{V_s} + \frac{b}{\sqrt{V_s}} \right)^2 ds + \rho \int_t^T \left(a \sqrt{V_s} + \frac{b}{\sqrt{V_s}} \right) dW_{v,s} \\
&\quad + \sqrt{1 - \rho^2} \int_t^T \left(a \sqrt{V_s} + \frac{b}{\sqrt{V_s}} \right) dW_{s,s} \\
&= \int_t^T r_s ds + \left(\frac{b \rho \alpha_1}{\sigma_v} - \frac{a \rho \alpha_v \theta_v}{\sigma_v} - a b \right) \tau + \frac{\rho a}{\sigma_v} (V_T - V_t) + \frac{b \rho}{\sigma_v} \ln \frac{V_T}{V_t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{a\rho\alpha_v}{\sigma_v} - \frac{a^2}{2} \right) \int_t^T V_s ds + \left(\frac{b\rho}{\sigma_v} \left(\frac{\sigma_v^2}{2} - \alpha_v\theta_v \right) - \frac{1}{2}b^2 \right) \int_t^T \frac{1}{V_s} ds \\
& + \sqrt{1-\rho^2} \int_t^T \left(a\sqrt{V_s} + \frac{b}{\sqrt{V_s}} \right) dW_{s,s}, \tag{3.2.2}
\end{aligned}$$

此时, 其矩母函数为

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{uY_T} | Y_t, V_t) & = \exp \left\{ u \left(Y_t + \int_t^T r_s ds + \left(\frac{(b-a\theta_v)\rho\alpha_v}{\sigma_v} - ab \right) \tau + \frac{b\rho}{\sigma_v} \ln \frac{V_T}{V_t} \right. \right. \\
& + \left. \left(\frac{a\rho\alpha_v}{\sigma_v} - \frac{a^2}{2} \right) \int_t^T V_s ds + \left(\frac{b\rho\sigma_v}{2} - \frac{\alpha_v\theta_v b\rho}{\sigma_v} - \frac{b^2}{2} \right) \int_t^T \frac{1}{V_s} ds \right) \\
& + \left. u\sqrt{1-\rho^2} \int_t^T \left(a\sqrt{V_s} + \frac{b}{\sqrt{V_s}} \right) dW_{v,s}^\perp + \frac{u\rho a}{\sigma_v} (V_T - V_t) \right\} \\
& = \exp \left\{ uY_t + u \left(\frac{b\rho\alpha_v}{\sigma_v} - \frac{a\rho\alpha_v\theta_v}{\sigma_v} - ab \right) \tau + u^2 (1-\rho^2) ab\tau \right\} \\
& \times \exp \left\{ -\frac{u\rho a}{\sigma_v} V_t - \frac{ub\rho}{\sigma_v} \ln V_t \right\} \cdot \mathbb{E} \left[\exp \left\{ u \int_t^T r_s ds \right\} \right] \\
& \times \mathbb{E} \left[V_T^{\frac{ub\rho}{\sigma_v}} \exp \left\{ -\mu V_T - \alpha \int_t^T V_s ds - \beta \int_t^T \frac{1}{V_s} ds \right\} \right], \tag{3.2.3}
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\alpha & = -u \left(\frac{a\rho\alpha_v}{\sigma_v} - \frac{1}{2}a^2 \right) - \frac{1}{2}u^2 (1-\rho^2) a^2, \\
\beta & = -u \left(\frac{b\rho}{\sigma_v} \left(\frac{\sigma_v^2}{2} - \alpha_v\theta_v \right) - \frac{1}{2}b^2 \right) - \frac{1}{2}u^2 (1-\rho^2) b^2, \\
\mu & = -\frac{u a \rho}{\sigma_v}.
\end{aligned}$$

令

$$I_1 = \exp \left\{ uY_t + u \left(\frac{b\rho\alpha_v}{\sigma_v} - \frac{a\rho\alpha_v\theta_v}{\sigma_v} - ab \right) \tau + u^2 (1-\rho^2) ab\tau \right\}, \tag{3.2.4}$$

$$I_2 = \exp \left\{ -\frac{u\rho a}{\sigma_v} V_t - \frac{ub\rho}{\sigma_v} \ln V_t \right\}, \tag{3.2.5}$$

$$I_3 = \mathbb{E} \left[\exp \left\{ u \int_t^T r_s ds \right\} \right], \tag{3.2.6}$$

$$I_4 = \mathbb{E} \left[V_T^{\frac{ub\rho}{\sigma_v}} \exp \left\{ -\mu V_T - \alpha \int_t^T V_s ds - \beta \int_t^T \frac{1}{V_s} ds \right\} \right], \tag{3.2.7}$$

则

$$\mathbb{E}(e^{uY_T} | Y_t, V_t) = I_1 \cdot I_2 \cdot I_3 \cdot I_4. \tag{3.2.8}$$

根据Scott(1997)可获得式(3.2.6)如下

$$I_3 = \exp\left(\frac{2\alpha_r\theta_r}{\sigma_r^2} \ln\left[\frac{2\lambda_r e^{\frac{(\alpha_r - \lambda_r)\tau}{2}}}{D}\right] + \frac{2u(1 - e^{-\lambda_r\tau})r_t}{D}\right), \quad (3.2.9)$$

其中

$$D = 2\lambda_r e^{-\lambda_r\tau} + (\alpha_r + \lambda_r)(1 - e^{-\lambda_r\tau}),$$

$$\lambda_r = \sqrt{\alpha_r^2 - 2\sigma_r^2 u}, \quad (\alpha_r \geq \sigma_r \sqrt{2u}).$$

根据Grasselli(2017)可得(3.2.7)式为

$$I_4 = \left(\mu + \frac{1}{\sigma_v^2} \left(\sqrt{A} \coth(\sqrt{A}\tau/2) + \alpha_v\right)\right)^{-\left(\frac{1}{2} + \frac{m}{2} - \alpha + \frac{\alpha_v\theta_v}{\sigma_v^2}\right)} V_t^{-\frac{\alpha_v\theta_v}{\sigma_v^2}}$$

$$\times \left(\frac{\sqrt{AV_t}}{\sigma_v^2 \sinh(\sqrt{A}\tau/2)}\right)^{m+1} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{m}{2} + \frac{ub\rho}{\sigma_v} + \frac{\alpha_v\theta_v}{\sigma_v^2}\right)}{\Gamma(m+1)}$$

$$\times \exp\left(\frac{1}{\sigma_v^2} \left(\alpha_v^2\theta_v\tau - \sqrt{AV_t} \coth(\sqrt{A}\tau/2)\right) + \alpha_v V_t\right)$$

$$\times {}_1F_1\left(\frac{1}{2} + \frac{m}{2} + \frac{ub\rho}{\sigma_v} + \frac{\alpha_v\theta_v}{\sigma_v^2}, m+1, \frac{\left(\frac{2\sqrt{AV_t}}{\sigma_v^2 \sinh(\sqrt{A}\tau/2)}\right)^2}{4\left(\mu + \frac{1}{\sigma_v^2}(\sqrt{A} \coth(\sqrt{A}\tau/2) + \alpha_v)\right)}\right), \quad (3.2.10)$$

其中, $\tau = T - t$, Γ 表示伽马函数, ${}_1F_1$ 表示汇合型超几何函数, 伽马函数和超几何汇流函数的计算详见Lanczos(1964)和Nardin等(1992).

进一步, 将式(3.2.4),(3.2.5),(3.2.9)及(3.2.10)代入式(3.2.8)可获得标的资产对数价格的特征函数表达式. 证毕.

3.2.2 基于4/2-CIR随机混合模型的欧式期权定价公式

3.2.1节获得了期权标的资产对数价格特征函数, 本小节基于以上特征函数给出4/2-CIR随机混合模型下的欧式期权定价公式. 详见定理3.2.

定理 3.2 假定在风险中性测度 \mathbb{Q} 下, 到期日为 T , 执行价格为 K , 标的资产满足(3.1.1)式的无股息欧式期权定价公式如下:

$$C(S, R, V, T) = S_0 - \frac{Ke^{-\int_0^T r_s ds}}{2\pi} \int_{iz_i - \infty}^{iz_i + \infty} \Phi_T(-z) \frac{e^{-izk}}{z^2 - iz} dz, \quad (3.2.11)$$

其中, $\Phi_T(-z)$ 为标的对数资产价格的广义特征函数, $0 < \text{Im}(z) < 1, k = \ln \frac{S_0}{K} +$

$e^{\int_0^T r_s ds}$.

特别地, 当 $z_i = \frac{1}{2}$ 时, 定价公式简化为如下形式:

$$C(S, R, V, T) = S_0 - \frac{\sqrt{S_0 K} e^{-\frac{1}{2} \int_0^T r_s ds}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re}[\Phi_T(u - \frac{i}{2}) e^{iuk}] \frac{1}{u^2 + \frac{1}{4}} du. \quad (3.2.12)$$

证明 假定 $y = Y_T$, 则在4/2-CIR随机混合模型下欧式看涨期权的收益回报为

$$f(y) = \min(e^y, K),$$

假设 $z \in \mathbb{C}$, 则其广义Fourier变换为

$$\hat{f}(z) = \mathcal{F}[f(y)] = \int e^{izy} f(y) dy = \int_{-\infty}^{\ln K} e^{izy} e^y dy + K \int_{\ln K}^{\infty} e^{izy} dy, \quad (3.2.13)$$

令 $z = u + iz_i$, 根据Euler公式可知, $0 < \operatorname{Im}(z) < 1$ 时, (3.2.13)式中右边的积分才有定义, 且

$$\hat{f}(z) = \frac{e^{(iz+1)\ln K}}{iz+1} - K \frac{e^{iz\ln K}}{iz} = \frac{K^{(iz+1)}}{z^2 - iz}, \quad 0 < \operatorname{Im}(z) < 1, \quad (3.2.14)$$

此时, 风险中性测度下的收益函数如下

$$f(y) = (S_T - K)^+ = S_T - \min(S_T, K), \quad (3.2.15)$$

从而可得, 欧式看涨期权价格如下

$$\begin{aligned} C(S, R, V, T) &= e^{-\int_0^T r_s ds} \mathbb{E}[f(y)] \\ &= e^{-\int_0^T r_s ds} \mathbb{E}[S_T - \min(S_T, K)] \\ &= e^{-\int_0^T r_s ds} \mathbb{E}[S_T | \mathcal{F}_0] - e^{-\int_0^T r_s ds} \mathbb{E}[\min(S_T, K)] \\ &= S_0 - \frac{e^{-\int_0^T r_s ds}}{2\pi} \mathbb{E} \left[\int_{iz_i - \infty}^{iz_i + \infty} e^{-izy} \hat{f}(z) dz \right] \\ &= S_0 - \frac{K e^{-\int_0^T r_s ds}}{2\pi} \int_{iz_i - \infty}^{iz_i + \infty} \Phi_T(-z) \frac{K^{iz}}{z^2 - iz} dz. \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

令 $k = \ln \frac{S_0}{K} + \int_0^T r_s ds$, 则

$$C(S, R, V, T) = S_0 - \frac{K e^{-\int_0^T r_s ds}}{2\pi} \int_{iz_i - \infty}^{iz_i + \infty} \Phi_T(-z) \frac{e^{-izk}}{z^2 - iz} dz.$$

当 $z_i = \frac{1}{2}$ 时, 根据积分变换及Fourier积分的对称性, 有

$$C(S, R, V, T) = S_0 - \frac{\sqrt{S_0 K} e^{-\frac{1}{2} \int_0^T r_s ds}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Re} \left[\Phi_T \left(u - \frac{i}{2} \right) e^{iuk} \right] \frac{1}{u^2 + \frac{1}{4}} du,$$

其中, 特征函数 Φ_T 的表达式详见定理3.1. 证毕.

由定理3.1和定理3.2可知, 当期权标的资产初始价格、到期时间、执行价格及模型参数已知时, 即可得4/2-CIR随机混合模型下的期权价格.

3.3 4/2-CIR随机混合模型参数的数值模拟与分析

本节将通过一些数值算例, 分析4/2-CIR随机混合模型的有效性, 并对模型参数进行敏感性分析, 探讨4/2-CIR随机混合模型主要参数对期权定价结果的影响.

3.3.1 4/2-CIR随机混合模型定价性能分析

本章内容主要基于金融市场利率随机性视角展开. 因此, 为说明随机利率对期权定价结果的影响, 本小节基于4/2-CIR随机混合模型和4/2随机波动率模型进行数值分析, 相应参数取值见表3.1.

表3.1 数值分析参数取值

模型	S_0	V_0	α_v	θ_v	σ_v	r_0	α_r	θ_r	σ_r	ρ
4/2-CIR	1.35	0.04	1.8	0.04	0.8	0.02	2	0.2	0.56	-0.7
4/2-SV	1.35	0.04	1.8	0.04	0.8	0.02	-	-	-	-0.7

基于表3.1所给参数值, 利用定理3.1和定理3.2及Grasselli(2017)中的相关表达式即可获得4/2-CIR随机混合模型和4/2随机波动率模型下的期权价格. 根据4/2-CIR随机混合模型及4/2随机波动率模型所得期权价格的差异, 分析利率对期权定价结果的影响, 模型定价结果如图3.1-图3.2.

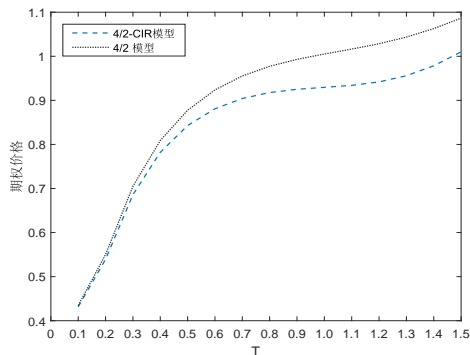


图3.1 到期期限对期权价格的影响

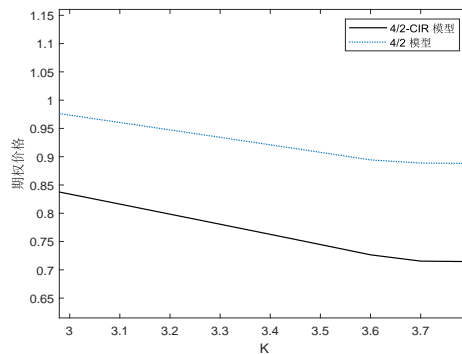


图3.2 执行价格对期权价格的影响

图3.1表明,随着期权到期时间的增加,4/2随机波动率模型和4/2-CIR随机混合模型的定价结果差异显著,说明期权的到期时间越长,利率对模型定价结果的影响越大.这与实际市场特征相符,即随着时间的增加市场利率的随机波动特征越明显.因此,在期权定价模型的构建过程中考虑利率因素对期权价格的影响较为合理.由图3.2可得,到期时间一定时,4/2-CIR随机混合模型和4/2随机波动率模型下的期权价格均随执行价格的增大而变小,其结果符合金融市场中期权价格的真实变动特征,即本章所构建4/2-CIR随机混合模型在期权市场中的定价结果具有一定的合理和有效性.

进一步,为说明构建4/2-CIR随机混合模型进行期权进行定价研究的必要性,下面将给出不同模型下的定价误差.结果如表3.2.

表3.2 4/2-CIR随机混合模型与4/2随机波动率模型相对定价误差

T	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75
Abs	0.0149	0.0347	0.0554	0.0757	0.0876	0.0765	0.0388

由表3.2相对定价误差结果可得,随着到期时间的不断增大,4/2-CIR随机混合模型与4/2随机波动率模型的定价误差逐渐增大.由此可见,随着到期时间的增大,利率对期权定价结果的影响越显著,进一步说明在期权定价模型的构建过程中应充分考虑利率因素,以此来降低利率随机性引起的模型定价误差.

3.3.2 4/2-CIR随机混合模型参数敏感性分析

由3.3.1节的数值分析结果可知,4/2-CIR随机混合模型能够对期权进行合理定价,但此模型中参数较多.为验证模型中不同参数对期权定价结果的影响,本小节采用交叉验证法对模型参数进行数值分析,验证模型主要参数对模型定价结果的影响,参数取值见表3.1.数值分析结果如图3.3-3.8所示.

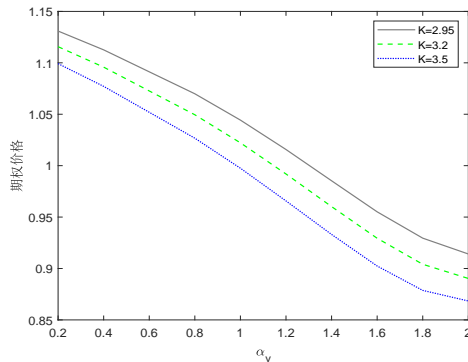


图3.3 α_v 对定价结果的影响

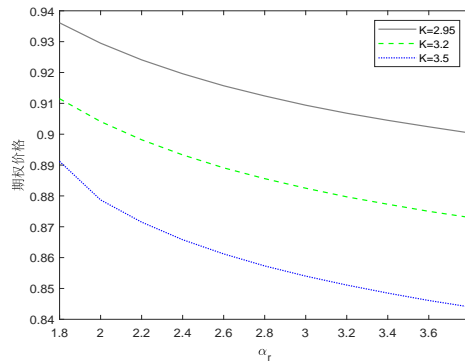


图3.4 α_r 对定价结果的影响

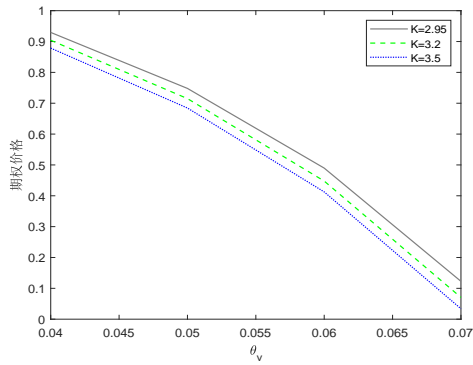


图3.5 θ_v 对定价结果的影响

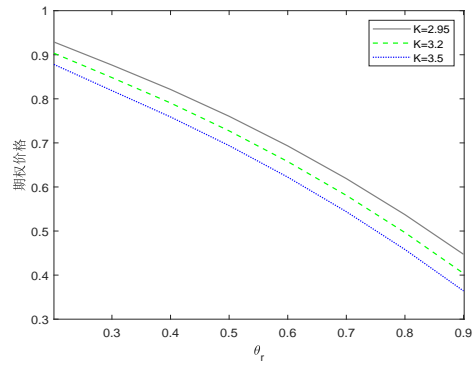


图3.6 θ_r 对定价结果的影响

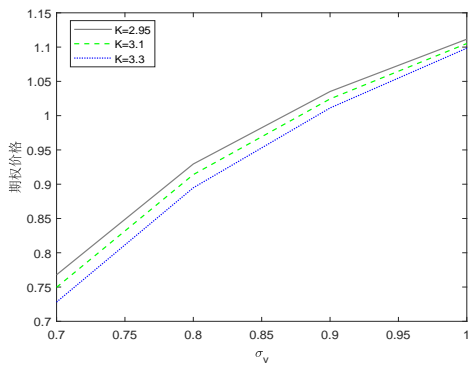


图3.7 σ_v 对定价结果的影响

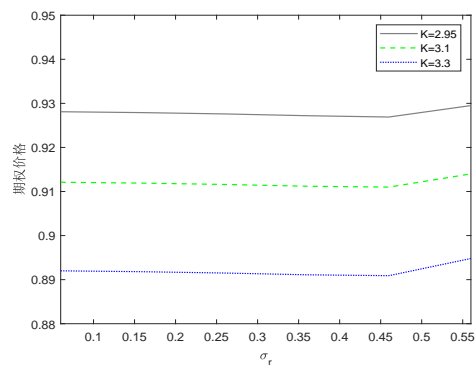


图3.8 σ_r 对定价结果的影响

图3.3-3.8分别给出了不同执行价格下 α_v 、 α_r 、 θ_v 、 θ_r 、 σ_v 、 σ_r 对模型定价结果的影响. 如图3.3所示, 执行价格一定时, 基于4/2-CIR随机混合模型的期权价格随波动率均值回复速度 α_v 的增大而减小; 图3.4表明, 执行价格一定时, 基于4/2-CIR随机混合模型的期权价格随利率均值回复速度 α_r 的增大而减小; 图3.5表明, 执行价格一定时, 基于4/2-CIR随机混合模型的期权价格随波动率均值回复水平 θ_v 的增加而减小; 图3.6表明, 执行价格一定时, 基于4/2-CIR随机混合模型的期权价格随利率均值回复水平 θ_r 的增加而减小; 图3.7表明, 执行价格一定时, 基于4/2-CIR随机混合模型的期权价格随波动率过程的波动率 σ_v 的增加而增加; 图3.8表明, 当利率波动率 σ_r 较小时, 基于4/2-CIR随机混合模型的期权价格没有明显变化, 当利率波动率达到一定值时, 基于4/2-CIR随机混合模型的期权价格随利率波动率 σ_r 的增加而增加; 此外, 图3.3-3.8表明, 基于4/2-CIR随机混合模型的期权价格随执行价格的增加而减小.

综上所述, 基于4/2-CIR随机混合模型的期权价格与波动率以及利率的均值回复速度, 均值回复水平负相关, 即基于4/2-CIR随机混合模型的期权价格随波动率和利率的均值回复速度 α_v 、 α_r 及均值回复水平 θ_v 、 θ_r 的增加而减小; 基于4/2-CIR随机混合模型的期权价格与波动率的波动率 σ_v 及利率的波动率 σ_r 正相

关,即随着 σ_v 和 σ_r 的增加基于4/2-CIR随机混合模型的期权价格也随之增加。

3.4 4/2-CIR随机混合模型欧式期权定价实证分析

本小节以50ETF期权为研究对象,检验4/2-CIR随机混合模型的定价精度。目前,50ETF期权和VIX指数期权是最具有代表性且研究范围最广的欧式期权。Lin等(2017)基于4/2随机波动率模型对VIX指数期权定价问题进行研究,且证实基于4/2随机波动率模型对VIX指数期权的定价结果优于3/2随机波动率模型和Heston随机波动率模型。通过梳理现有文献发现基于4/2随机波动率模型对50ETF期权进行定价的研究尚有不足。而50ETF作为国内最早交易的欧式期权具有一定代表性,基于此验证定价模型的有效性和精确度具有一定的实际意义(吴鑫育等,2019)。因此,本文选取50ETF期权作为研究对象。基于2020年11月5日上证50ETF期权的真实数据对4/2-CIR随机混合模型,4/2随机波动率模型及B-S模型参数进行估计。将参数估计值代入4/2-CIR随机混合模型,4/2随机波动率模型及B-S模型下欧式期权定价公式,获得相应定价模型下的期权理论值,并将各个模型下的期权定价结果与真实期权值进行比较,分析模型定价精度。标的资产初值为 $S_0 = 3.418$ 。数据来源:Wind数据库(<https://www.wind.com.cn/>)。

3.4.1 4/2-CIR随机混合模型参数估计

对定价模型参数值的精确估计是提高模型定价精度的关键,本小节运用粒子群优化算法估计定价模型的参数。假设样本由 n_1 个到期日 $l(l = 1, 2, \dots, n_1)$ 和 m_1 个执行价格 $j(j = 1, 2, \dots, m_1)$ 组成,粒子群优化算法的目标函数为

$$MSE = \frac{1}{m_1 n_1} \sum_{l=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{m_1} (C_{lj} - \hat{C}_{lj})^2, \quad (3.4.1)$$

其中, C_{lj} 和 \hat{C}_{lj} 分别代表期权的市场价格以及根据模型得到的期权价格。参数估计结果见表3.3。

表3.3 参数估计值

模型	a	b	α_v	θ_v	σ_v	ρ	α_r	θ_r	σ_r
4/2-CIR	0.4500	0.0200	2.7859	0.2051	0.6935	-0.7000	0.0704	0.0328	0.0135
4/2-SV	0.2033	0.0314	0.4021	0.0390	0.0924	-0.3023	-	-	-
B-S	-	-	-	-	0.2500	-	-	-	-

3.4.2 4/2-CIR随机混合模型欧式期权定价结果分析

为进一步探讨4/2-CIR随机混合模型的定价性能, 基于3.3模型参数估计值, 分别根据(2.2.2)式、Grasselli(2017)中期权定价公式及本章第二节定理3.2及定理3.2计算B-S模型, 4/2随机波动率模型及4/2-CIR随机混合模型下的期权价格, 并与市场真实期权数据进行对比, 分析B-S模型、4/2随机波动率模型及4/2-CIR随机混合模型的定价精度. 不同模型下的定价结果及真实期权价格如图3.9-图3.10. 图3.9为不同到期日下期权价格随执行价格的变化情况, 图3.10为执行价格分别取最小和最大值的情况下期权价格随到期时间的变化情况.

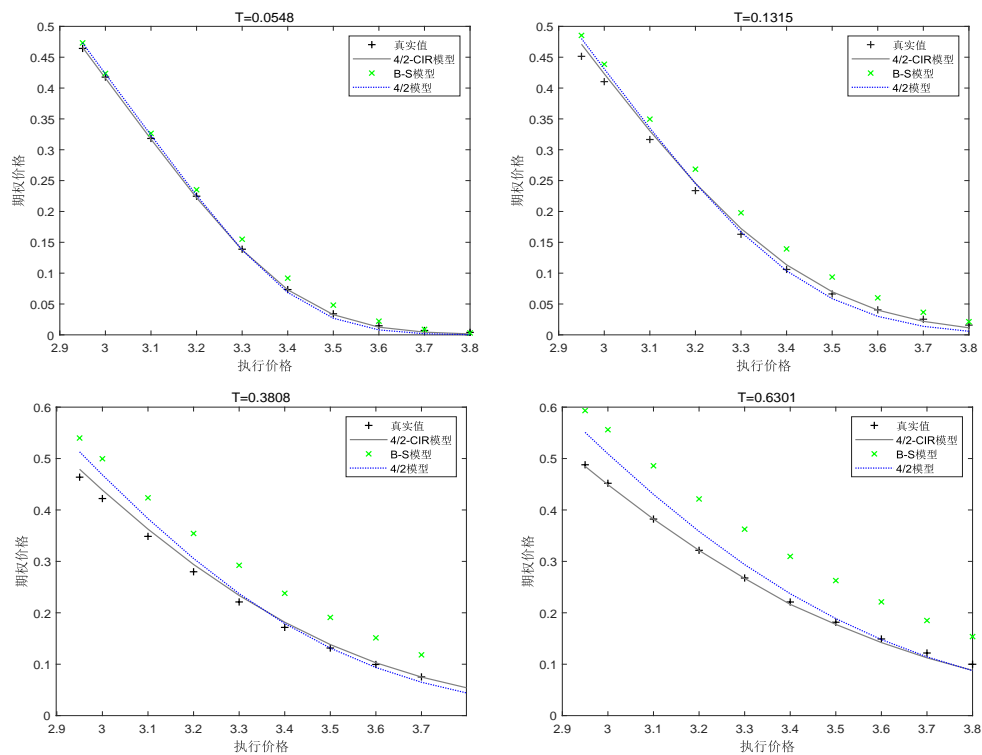


图3.9 定价结果随执行价格变化图

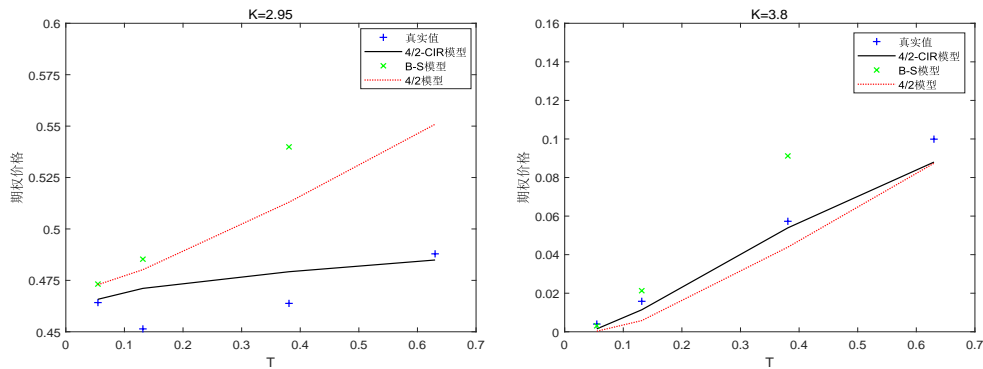


图3.10 定价结果随到期时间变化图

由图3.9-图3.10可知,到期时间一定时,B-S模型、4/2随机波动率模型及4/2-CIR随机混合模型下的期权价格随执行价格的增加而减小,与实际数据变化情况相吻合;执行价格一定时,随着到期时间的增加期权价格不断增大,模型的定价结果符合实际市场期权变化情况,这说明本章所构建定价模型合理有效.此外,到期时间较小时,经典B-S模型、4/2随机波动率模型及4/2-CIR随机混合模型的定价结果基本一致,随着到期时间的增加,各个模型的定价结果具有显著差异.这说明随着到期时间的增加,利率对期权价格的影响逐渐明显,与真实市场利率变化对期权价格的影响相符合.综合来看,4/2-CIR随机混合模型的定价结果更加接近真实值,4/2随机波动率模型次之,经典B-S模型的定价结果较差.这主要是因为经典B-S模型假设条件过于苛刻,与实际金融市场不相符,而随机波动率模型充分考虑了金融市场的随机不确定性,故随机波动率模型的定价结果优于经典B-S模型.此外,到期时间越长利率对定价结果的影响越显著.因此,本文既考虑波动率随机性又考虑利率随机性的4/2-CIR随机混合模型定价结果优于仅考虑波动率随机性的4/2随机波动率模型.

3.4.3 4/2-CIR随机混合模型欧式期权定价误差分析

基于3.4.2节的定价结果,本小节对B-S模型、4/2随机波动率模型及4/2-CIR随机混合模型的定价误差进行分析.首先,以50ETF11月购2950、50ETF12月购2950、50ETF3月购2950、50ETF6月购2950、50ETF11月购3300、50ETF12月购3300、50ETF3月购3300、50ETF6月购3300、50ETF11月购3800、50ETF12月购3800、50ETF3月购3800、50ETF6月购3800期权分析B-S模型、4/2随机波动率模型及4/2-CIR随机混合模型的绝对误差.其次,采用均方误差(MSE)和平均绝对百分比误差(MAPE)衡量各个模型的定价精度.结果见表3.8-表3.9所示.

表3.8 绝对误差

到期时间	K = 2.95			K = 3.30			K = 3.80		
	B-S	4/2-SV	4/2-CIR	B-S	4/2-SV	4/2-CIR	B-S	4/2-SV	4/2-CIR
0.0548	0.0090	0.0087	0.0016	0.0162	0.0013	0.0012	0.0009	0.0037	0.0025
0.1315	0.0339	0.0288	0.0197	0.0348	0.0036	0.0093	0.0055	0.0100	0.0044
0.3808	0.0761	0.0492	0.0154	0.0713	0.0161	0.0126	0.0339	0.0134	0.0034
0.6301	0.1054	0.0630	0.0030	0.0949	0.0260	0.0008	0.0538	0.0125	0.0119

如表3.8所示,当到期时间相同时,4/2-CIR随机混合模型的定价误差最小,4/2随机波动率模型次之,经典B-S模型定价误差最大.此外,随着到期时间的增大,

B-S 模型、4/2随机波动率模型及4/2-CIR随机混合模型之间的定价误差差异愈加明显,即随着到期时间的增加波动率及利率对模型定价结果的影响越来越显著.

表3.9 定价误差

定价误差	定价模型		
	B-S	4/2-SV	4/2-CIR
MSE	0.0032	0.0005	0.0002
MAPE	0.2984	0.1512	0.0765

表3.9模型定价误差结果表明,从均方误差角度看,经典B-S模型的平均绝对百分比误差(MSE)最大,4/2随机波动率模型(0.0005)次之,4/2-CIR随机混合模型(0.0002)最小.由此可见,4/2-CIR随机混合模型的定价结果优于4/2随机波动率模型与经典B-S模型.从平均绝对百分比误差角度可知,4/2-CIR随机混合模型的MAPE(0.0765)远小于4/2及B-S模型的MAPE(0.1512和0.2984),表明4/2-CIR随机混合模型的定价误差更小、定价结果更优.因此,相比于经典B-S模型及4/2随机波动率模型,4/2-CIR随机混合模型在欧式期权定价中的定价误差最小,进一步表明本章所构建模型具有一定的实际意义.

3.5 本章小结

充分考虑金融资产价格的随机波动特征及利率随机性对模型定价结果的影响,本章构建了4/2-CIR随机混合模型,并对此模型下欧式期权进行定价分析.首先,基于金融资产价格动态变化特征及利率随机性特征构建了4/2-CIR随机混合模型,并推导出基于4/2-CIR模型的标的对数资产价格特征函数及欧式期权定价公式.其次,基于4/2-CIR随机混合模型进行数值分析,探讨利率对模型定价结果的影响,并对4/2-CIR随机混合模型中主要参数进行敏感性分析,研究模型参数对期权定价结果的影响.最后,基于上证50ETF期权市场数据,利用粒子群优化算法估计模型未知参数,并基于参数估计值对模型的定价精度和误差进行分析.研究表明:到期期限越大,利率随机性特征对模型的定价结果影响越明显,即在随机波动率模型下考虑利率因素对期权定价的影响构建期权定价模型具有重要的实际意义.波动率和利率的均值回复速度及均值回复水平对期权价格具有反向影响趋势,波动率的波动率及利率的波动率对期权价格具有正向影响作用.此外,与经典B-S模型及4/2随机波动率模型相比,4/2-CIR随机混合模型的绝对误差、均方误差及平均绝对百分比误差均较小,在欧式期权定价中表现出了较优的定价结果.

4 基于4/2跳扩散随机混合模型下的欧式期权定价研究

第三章针对金融市场资产价格波动率随机性及利率随机性对期权定价的影响问题, 构建了具有4/2随机波动率及CIR随机利率的4/2-CIR随机混合欧式期权定价模型, 并对模型的定价性能进行分析. 研究发现: 利率及波动率随机性对模型定价结果具有显著影响, 且4/2-CIR随机混合模型能够提高现有4/2随机波动率及B-S模型的定价精度, 为投资者利用期权规避风险提供了理论保障. 除波动率随机性及市场利率随机性对模型定价结果具有一定的影响外, 金融市场数据的尖峰、厚尾及跳跃特征对模型定价效果也具有一定的影响. 此外, 标的资产对数价格具有对数均值回复的特点, 如Escobar-Anel和Gong(2020)、Zhu等(2019)、Liu(2020)等研究发现, 具有均值回复特征模型的定价结果优于一般定价模型, 即在构建定价模型过程中考虑均值回复性能够提高模型的定价精度. 因此, 本章主要基于双因子4/2随机波动率模型对具有跳跃特征的期权定价问题进行研究, 并分别给出具有均值回复特征和杠杆效应的标的对数资产价格特征函数及欧式期权定价公式. 研究发现该模型不仅丰富了期权定价模型的理论框架, 而且提高了已有期权定价模型的定价精度, 为投资者做出合理投资提供了理论依据, 同时也为进一步利用期权进行风险对冲提供了保障.

本章结构如下: 第一节基于金融市场资产的尖峰、厚尾、波动率集聚及跳跃扩散等特征, 构建了4/2跳扩散随机混合模型. 第二节对4/2跳扩散随机混合模型下欧式期权定价理论进行探讨, 并获得4/2跳扩散随机混合模型下对数资产价格的特征函数及其欧式期权定价公式. 第三节对4/2跳扩散随机混合模型进行实证检验, 验证模型在真实市场中的定价效果. 首先, 对实证数据进行描述性统计分析, 探讨数据特征与模型假设条件的吻合程度; 其次, 基于粒子群优化算法对模型参数进行估计, 并基于参数估计值分析模型的定价性能; 最后, 分析4/2跳扩散随机混合模型的定价误差, 探讨定价模型的定价精度和有效性. 第四节为本章小节.

4.1 4/2跳扩散随机混合模型的构建

假设市场满足如下条件:

- (1) 交易市场是完备的, 交易过程中无交易费用、不支付股息、交易无限可分且允许卖空;
- (2) 无风险利率 r 为常数;

- (3) 标的资产遵循跳跃扩散过程;
- (4) 标的资产价格的跳跃次数服从泊松过程, 跳跃幅度服从双指数分布;
- (5) 跳跃幅度、跳跃次数和布朗运动三者之间相互独立.

假定在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 中, 标的资产价格满足以下随机微分方程

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\mu - \beta \ln S_t)dt + (a\sqrt{V_t} + \frac{b}{\sqrt{V_t}})dW_t^{\mathbb{P}} + (e^{\xi} - 1)dN_t^{\mathbb{P}}, \quad (4.1.1)$$

其中, S_t 表示 t 时刻标的资产价格, μ 为漂移系数, $\beta > 0$, $W_t^{\mathbb{P}}$ 为 \mathbb{P} 测度下的布朗运动, $N_t^{\mathbb{P}}$ 为 \mathbb{P} 测度下强度为 λ 的泊松过程, e^{ξ} 表示跳跃幅度, ξ 服从双指数分布, 其跳跃大小分别为 η_1 和 η_2 , 波动率 V_t 满足CIR过程

$$dV_t = \zeta(\eta - V_t)dt + \sigma_v\sqrt{V_t}dW_{v,t}^{\mathbb{P}}, \quad (4.1.2)$$

其中, ζ 为 \mathbb{P} 测度下波动率的均值回复速度, η 为 \mathbb{P} 测度下波动率的均值回复水平, σ_v 为 \mathbb{P} 测度下波动率的波动率, 且满足 $2\zeta\eta \geq \sigma_v^2$.

命题 4.1 假定 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ 是一个完备的概率空间, 则当

$$\begin{cases} |\rho a| < \frac{\zeta}{\sigma_v}, \\ \sigma_v^2 \leq 2\zeta\eta - 2|\rho b|\sigma_v, \end{cases}$$

时, \mathbb{Q} 是 \mathbb{P} 的等价测度.

证明过程类似参考文献Escobar-Anel和Gong(2020).

在上述给定的完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ 中, 标的价格满足以下随机微分方程

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} = (r - \lambda\kappa - \beta \ln S_t)dt + (a\sqrt{V_t} + \frac{b}{\sqrt{V_t}})dW_t + (e^{\xi} - 1)dN_t, \\ dV_t = \alpha_v(\theta_v - V_t)dt + \sigma_v\sqrt{V_t}dW_{v,t}, \end{cases} \quad (4.1.3)$$

其中, $\alpha_v = \zeta + \gamma\sigma_v$, $\theta_v = \frac{\zeta\eta}{\zeta + \gamma\sigma_v}$, 且满足 $2\alpha_v\theta_v \geq \sigma_v^2$, 参数 $\alpha_v, \theta_v, a, b, \sigma_v, \gamma, \beta \in \mathbb{R}$, W_t 和 $W_{v,t}$ 是 \mathbb{Q} 测度下的标准布朗运动, 且 $d\langle W_t, W_{v,t} \rangle = \rho dt, V_0 = v \in \mathbb{R}^+, \kappa := \mathbb{E}[e^{\xi} - 1]$.

如果 $Z_t = V_t^{-1}$, 则逆CIR过程满足的随机微分方程如下

$$dZ_t = \tilde{\alpha}_v Z_t (\tilde{\theta}_v - Z_t)dt + \tilde{\sigma}_v Z_t^{\frac{3}{2}} dW_{v,t}, \quad (4.1.4)$$

其中, $\tilde{\alpha}_v = \alpha_v\theta_v - \sigma_v^2$, $\tilde{\theta}_v = \frac{\alpha_v}{\alpha_v\theta_v - \sigma_v^2}$, $\tilde{\sigma}_v = -\sigma_v$.

根据(4.1.4)式可以看出, 3/2随机波动率模型与Heston随机波动率模型的差异是3/2随机波动率模型具有一个非线性漂移项, 均值回复速度是一个随机变量.

此外, 由于(4.1.3)式中扩散项是CIR项和3/2项的叠加(即1/2+3/2), 故称其为4/2随机波动率模型. 当 $a = 1, b = 0$ 时方程(4.1.3)为对数均值回复跳扩散Heston随机波动率(LMRJ-Heston-SV)模型; 当 $a = 0, b = 1$ 时方程(4.1.3)为对数均值回复跳扩散3/2随机波动率(LMRJ-3/2-SV)模型; 当 $a \neq 0, b \neq 0$ 时方程(4.1.3)为对数均值回复跳扩散4/2随机波动率(LMRJ-4/2-SV)模型.

4.2 4/2跳扩散随机混合模型欧式期权定价

基于4.1节构建的4/2跳扩散随机混合模型, 本节简单介绍特征函数及期权定价公式证明过程中所需的基本引理, 并利用Itô引理、快速傅里叶变换及欧拉变换等方法获得4/2跳扩散随机混合模型下欧式期权标的资产对数价格的特征函数及其定价公式.

引理 4.1 假定 $\beta \in \mathbb{R}$, $\tau = T - t$, X_t 满足如下微分方程

$$dX_t = \alpha_v(\theta_v - X_t)dt + \sigma_v\sqrt{X_t}dB_t, \quad (4.2.1)$$

则

$$\begin{aligned} \int_t^T e^{-\beta(T-s)}\sqrt{X_s}dB_s &= \frac{(X_T - e^{-\beta\tau}X_t)}{\sigma_v} - \frac{\alpha_v\theta_v(1 - e^{-\beta\tau})}{\sigma_v\beta} - \frac{\beta - \alpha_v}{\sigma_v} \int_t^T e^{-\beta(T-s)}X_s ds, \\ \int_t^T \frac{e^{-\beta(T-s)}}{\sqrt{X_s}}dB_s &= \frac{1}{\sigma_v} \ln \frac{X_T}{X_t e^{-\beta\tau}} + \frac{\sigma_v^2 - 2\alpha_v\theta_v}{2\sigma_v} \int_t^T \frac{e^{-\beta(T-s)}}{X_s} ds + \frac{\alpha_v(1 - e^{-\beta\tau})}{\sigma_v\beta} \\ &\quad - \frac{\beta}{\sigma_v} \int_t^T e^{-\beta(T-s)} \ln X_s ds, \end{aligned}$$

其中, $\alpha_v, \theta_v, \sigma_v > 0$, 且 $2\alpha_v\theta_v \geq \sigma_v^2$; B_t 为标准布朗运动.

证明 假定 X_t 满足(4.2.1)式, 令 $\tilde{X}_t = e^{\beta t}X_t$, 则

$$d\tilde{X}_t = d(e^{\beta t}X_t) = \alpha_v\theta_v e^{\beta t}dt + e^{\beta t}(\beta - \alpha_v)X_t dt + \sigma_v e^{\beta t}\sqrt{X_t}dB_t,$$

整理得

$$e^{\beta t}\sqrt{X_t}dB_t = \frac{1}{\sigma_v}(d\tilde{X}_t - \alpha_v\theta_v e^{\beta t}dt - e^{\beta t}(\beta - \alpha_v)X_t dt), \quad (4.2.2)$$

对(4.2.2)式两边在区间 $[t, T]$ 上积分, 得

$$\int_t^T e^{\beta s}\sqrt{X_s}dB_s = \frac{e^{\beta T}X_T - e^{\beta t}X_t}{\sigma_v} - \frac{\alpha_v\theta_v(e^{\beta T} - e^{\beta t})}{\sigma_v\beta} - \frac{\beta - \alpha_v}{\sigma_v} \int_t^T e^{\beta s}X_s ds, \quad (4.2.3)$$

对式(4.2.3)两边同除 $e^{\beta T}$, 有

$$\int_t^T e^{-\beta(T-s)} \sqrt{X_s} dB_s = \frac{(X_T - e^{-\beta\tau} X_t)}{\sigma_v} - \frac{\alpha_v \theta_v (1 - e^{-\beta\tau})}{\sigma_v \beta} - \frac{\beta - \alpha_v}{\sigma_v} \int_t^T e^{-\beta(T-s)} X_s ds.$$

令 $\widehat{X}_t = e^{\beta t} \frac{1}{X_t}$, 同理可得

$$\begin{aligned} \int_t^T \frac{e^{-\beta(T-s)}}{\sqrt{X_s}} dB_s &= \frac{1}{\sigma_v} \ln \frac{X_T}{X_t e^{-\beta\tau}} + \frac{\sigma_v^2 - 2\alpha_v \theta_v}{2\sigma_v} \int_t^T e^{-\beta(T-s)} \frac{1}{X_s} ds + \frac{\alpha_v (1 - e^{-\beta\tau})}{\sigma_v \beta} \\ &\quad - \frac{\beta}{\sigma_v} \int_t^T e^{-\beta(T-s)} \ln X_s ds. \end{aligned}$$

证毕.

引理 4.2(Escobar-Anel和Gong, 2020) 假定 $h_1(t), h_2(t)$ 在闭区间 $[t, T]$ 上连续且有界, h 和 g 分别是其近似积分值. 若 X_t 满足(4.2.1)式, 则

$$\int_t^T h_1(s) X_s ds \approx \frac{1}{\tau} \int_t^T h_1(s) ds \int_t^T X_s ds = h \int_t^T X_s ds, \quad (4.2.4)$$

$$\int_t^T h_2(s) \frac{1}{X_s} ds \approx \frac{1}{\tau} \int_t^T h_2(s) ds \int_t^T \frac{1}{X_s} ds = g \int_t^T \frac{1}{X_s} ds. \quad (4.2.5)$$

引理 4.3(Escobar-Anel和Gong, 2020) 设 $X^x = \{X_t^x, t \geq 0\}$ 是微分方程(4.2.1)式的解, $h, g \in \mathbb{R}$, 使得

$$h > -\frac{\alpha_v^2}{2\sigma_v^2}, \quad g \geq -\frac{(2\alpha_v \theta_v - \sigma_v^2)^2}{8\sigma_v^2},$$

则

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[e^{-h \int_0^t X_s ds - g \int_0^t \frac{1}{X_s} ds} \middle| X_t \right] &= \frac{\sqrt{H} \sinh\left(\frac{\alpha_v t}{2}\right)}{\alpha_v \sinh\left(\frac{\sqrt{H} t}{2}\right)} \times e^{\frac{X_0 + X_t}{\sigma_v^2} \left(\alpha_v \coth\left(\frac{\alpha_v t}{2}\right) - \sqrt{H} \coth\left(\frac{\sqrt{H} t}{2}\right) \right)} \\ &\quad \times \frac{I_{\nu_1} \left(\frac{2\sqrt{H X_0 X_t}}{\sigma_v^2 \sinh\left(\frac{\sqrt{H} t}{2}\right)} \right)}{I_{\nu_2} \left(\frac{2\alpha_v \sqrt{X_0 X_t}}{\sigma_v^2 \sinh\left(\frac{\alpha_v t}{2}\right)} \right)}, \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

其中, $\nu_1 = \frac{\sqrt{(2\theta_v \alpha_v - \sigma_v^2)^2 + 8\sigma_v^2 g}}{\sigma_v^2}$, $\nu_2 = \frac{2\theta_v \alpha_v}{\sigma_v^2} - 1$, $H = \alpha_v^2 + 2h\sigma_v^2$.

引理 4.4(Jeanblanc等, 2009) 假定 X_t 满足(4.2.1)式, 则其转移密度 $f_{X_t}(y)$ 的表达式如下

$$f_{X_t}(y) = \frac{e^{\alpha_v t}}{2c(t)} \times \left(\frac{ye^{\alpha_v t}}{X_0} \right)^{\nu_2/2} \times \exp\left(-\frac{X_0 + ye^{\alpha_v t}}{2c(t)}\right) \times I_q\left(\frac{\sqrt{X_0 \cdot ye^{\alpha_v t}}}{c(t)}\right) \mathbb{I}_{y \geq 0}, \quad (4.2.7)$$

其中, $c(t) = \frac{\sigma_v^2}{4\alpha_v}(e^{\alpha_v t} - 1)$ 表示自由度, $v_2 = \frac{2\alpha_v\theta_v}{\sigma_v^2} - 1$ 为非中心参数.

4.2.1 基于4/2跳扩散随机混合模型的对数资产价格特征函数

本小节主要介绍基于4/2跳扩散随机混合模型的对数资产价格的特征函数及其证明过程.

定理 4.1 假定在完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ 中, $u \in \mathbb{R}$, $Y_t = \ln S_t$, 期权标的资产价格满足(4.1.3)式, 则其条件特征函数如下

$$\begin{aligned}
\Phi(u) &= \mathbb{E}[\exp(iuY_T) | \mathcal{F}_t] \\
&= \exp \left\{ iu \left(e^{-\beta\tau} Y_t + \frac{1 - e^{-\beta\tau}}{\beta} \left[(r - \lambda\kappa) - ab + \frac{(b - a\theta_v)\rho\alpha_v}{\sigma_v} \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{a\rho}{\sigma_v} e^{-\beta\tau} V_t - \frac{b\rho}{\sigma_v} e^{-\beta\tau} \ln V_t + \frac{iu(1 - \rho^2)ab(1 - e^{-2\beta\tau})}{2\beta} \right) \right\} \\
&\quad \times \mathbb{E} \left[V_T^{-A} \exp \left\{ -BV_T + \int_t^T \left[Ce^{-\beta(T-s)} + De^{-2\beta(T-s)} \right] V_s ds \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_t^T \frac{Ee^{-\beta(T-s)} + Fe^{-2\beta(T-s)}}{V_s} ds - \frac{iub\rho}{\sigma_v} \int_t^T e^{-\beta(T-s)} \ln V_s ds \right\} \right] \\
&\quad \times \left(\frac{\eta_1 - iu}{\eta_1 - iue^{-\beta\tau}} \right)^{\frac{-p\lambda}{\beta}} \left(\frac{\eta_2 + iu}{\eta_2 + iue^{-\beta\tau}} \right)^{\frac{-(1-p)\lambda}{\beta}}, \tag{4.2.8}
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
A &= \frac{-iub\rho}{\sigma_v}, C = iu \left(-\frac{a^2}{2} - \frac{a\rho(\beta - \alpha_v)}{\sigma_v} \right), D = \frac{-u^2 a^2 (1 - \rho^2)}{2}, \\
B &= \frac{-iu a \rho}{\sigma_v}, E = iu \left(-\frac{b^2}{2} - \frac{b\rho\alpha_v\theta_v}{\sigma_v} - \frac{b\rho\sigma_v}{2} \right), F = \frac{-u^2 b^2 (1 - \rho^2)}{2}.
\end{aligned}$$

证明 令 $Y_t = \ln S_t$, 根据Itô引理可得

$$dY_t = \left[r - \lambda\kappa - \frac{1}{2} \left(a\sqrt{V_t} + \frac{b}{\sqrt{V_t}} \right)^2 - \beta Y_t \right] dt + \left(a\sqrt{V_t} + \frac{b}{\sqrt{V_t}} \right) dW_t + \xi dN_t.$$

假定

$$X_t = e^{\beta t} Y_t, \tag{4.2.9}$$

对(4.2.9)式求导得

$$dX_t = e^{\beta t} \left\{ \left[r - \lambda \kappa - \frac{1}{2} \left(a\sqrt{V_t} + \frac{b}{\sqrt{V_t}} \right)^2 \right] dt + \left(a\sqrt{V_t} + \frac{b}{\sqrt{V_t}} \right) dW_t + \xi dN_t \right\}, \quad (4.2.10)$$

对(4.2.10)式两边求积分, 得

$$\begin{aligned} X_T = X_t &+ \int_t^T e^{\beta s} \left[r - \lambda \kappa - \frac{1}{2} \left(a\sqrt{V_s} + \frac{b}{\sqrt{V_s}} \right)^2 \right] ds + \int_t^T e^{\beta s} \xi dN_s \\ &+ \int_t^T e^{\beta s} \left(a\sqrt{V_s} + \frac{b}{\sqrt{V_s}} \right) dW_s, \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

将(4.2.11)式代入(4.2.9)式, 有

$$\begin{aligned} Y_T &= \int_t^T e^{-\beta(T-s)} \left[r - \lambda \kappa - \frac{1}{2} \left(a\sqrt{V_s} + \frac{b}{\sqrt{V_s}} \right)^2 \right] ds + \int_t^T e^{-\beta(T-s)} \xi dN_s \\ &+ e^{-\beta\tau} Y_t + \int_t^T e^{-\beta(T-s)} \left(a\sqrt{V_s} + \frac{b}{\sqrt{V_s}} \right) dW_s, \end{aligned}$$

其中, $\tau = T - t$, 则对数资产价格的条件特征函数如下

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\exp(iuY_T) | \mathcal{F}_t] &= \exp \left\{ iue^{-\beta\tau} Y_t + \frac{i u}{\beta} (r - \lambda \kappa - ab)(1 - e^{-\beta\tau}) \right\} \\ &\times \mathbb{E} \left[\exp \left\{ -\frac{1}{2} i u \left(a^2 \int_t^T e^{-\beta(T-s)} V_s ds + b^2 \int_t^T e^{-\beta(T-s)} \frac{1}{V_s} ds \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + i u \int_t^T e^{-\beta(T-s)} \left(a\sqrt{V_s} + \frac{b}{\sqrt{V_s}} \right) dW_s \right\} \right] \\ &\times \mathbb{E} \left[\exp \left\{ i u \int_t^T e^{-\beta(T-s)} \xi dN_s \right\} \right] \\ &\equiv I_1 \times I_2 \times I_3. \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

对 W_t 进行分解, 计算 I_2 . 根据引理4.1

$$\begin{aligned} I_2 &\equiv \mathbb{E} \left[\exp \left\{ -\frac{iua^2}{2} \int_t^T e^{-\beta(T-s)} V_s ds - \frac{iub^2}{2} \int_t^T e^{-\beta(T-s)} \frac{1}{V_s} ds \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + iua\rho \int_t^T e^{-\beta(T-s)} \sqrt{V_s} dB_s + iub\rho \int_t^T e^{-\beta(T-s)} \frac{1}{\sqrt{V_s}} dB_s \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} (iu)^2 (1 - \rho^2) \int_t^T e^{-2\beta(T-s)} \left(a\sqrt{V_s} + \frac{b}{\sqrt{V_s}} \right)^2 ds \right\} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\exp \left\{ -\frac{1}{2} iua^2 \int_t^T e^{-\beta(T-s)} V_s ds - \frac{1}{2} iub^2 \int_t^T e^{-\beta(T-s)} \frac{1}{V_s} ds \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} u^2 a^2 (1 - \rho^2) \int_t^T e^{-2\beta(T-s)} V_s ds - u^2 (1 - \rho^2) ab \int_t^T e^{-2\beta(T-s)} ds \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2}(iu)^2 b^2 (1-\rho^2) \int_t^T \frac{e^{-2\beta(T-s)}}{V_s} ds + iua\rho \left[\frac{V_T - e^{-\beta\tau} V_t}{\sigma_v} \right. \\
& \quad - \frac{\alpha_v \theta_v (1-e^{-\beta\tau})}{\sigma_v \beta} - \frac{\beta - \alpha_v}{\sigma_v} \int_t^T e^{-\beta(T-s)} V_s ds + iub\rho \left[\frac{1}{\sigma_v} \ln V_T - \frac{1}{\sigma_v} \right. \\
& \quad \times \ln V_t e^{-\beta\tau} - \frac{\alpha_v \theta_v}{\sigma_v} \int_t^T e^{-\beta(T-s)} \frac{1}{V_s} ds + \frac{\alpha_v (1-e^{-\beta\tau})}{\sigma_v \beta} + \frac{\sigma_v}{2} \int_t^T \frac{1}{V_s} \\
& \quad \times e^{-\beta(T-s)} ds - \left. \left. \frac{\beta}{\sigma_v} \int_t^T e^{-\beta(T-s)} \ln V_s ds \right] \right\} \\
= & \exp \left\{ iu \left(\frac{iu(1-\rho^2)ab(1-e^{-2\beta\tau})}{2\beta} - \frac{a\rho e^{-\beta\tau} V_t}{\sigma_v} - \frac{a\rho \alpha_v \theta_v (1-e^{-\beta\tau})}{\sigma_v \beta} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{b\rho \ln V_t}{\sigma_v} e^{-\beta\tau} \right) \right\} + \frac{b\rho \alpha_v}{\sigma_v \beta} (1-e^{-\beta\tau}) \\
& \times \mathbb{E} \left[\exp \left\{ iu \left(-\frac{a^2}{2} - \frac{a\rho(\beta - \alpha_v)}{\sigma_v} \right) \int_t^T e^{-\beta(T-s)} V_s ds + a^2(1-\rho^2) \right. \right. \\
& \quad \times \frac{(iu)^2}{2} \int_t^T e^{-2\beta(T-s)} V_s ds + iu \left(-\frac{b^2}{2} - \frac{b\rho \alpha_v \theta_v}{\sigma_v} + \frac{b\rho \sigma_v}{2} \right) \\
& \quad \times \int_t^T e^{-\beta(T-s)} \frac{1}{V_s} ds + (1-\rho^2) \frac{(iu)^2 b^2}{2} \int_t^T e^{-2\beta(T-s)} \frac{1}{V_s} ds \\
& \quad \left. \left. + \frac{iua\rho V_T + iub\rho \ln V_T}{\sigma_v} - \frac{iub\rho \beta}{\sigma_v} \int_t^T e^{-\beta(T-s)} \ln V_s ds \right\} \right] \\
= & \exp \left\{ \frac{(iu)^2 (1-\rho^2) ab (1-e^{-2\beta\tau})}{2\beta} - \frac{iua\rho}{\sigma_v} e^{-\beta\tau} V_t - \frac{iua\rho \alpha_v \theta_v}{\sigma_v \beta} (1-e^{-\beta\tau}) \right. \\
& \quad \left. - \frac{iub\rho}{\sigma_v} e^{-\beta\tau} \ln V_t + \frac{iub\rho \alpha_v}{\sigma_v \beta} (1-e^{-\beta\tau}) \right\} \times \mathbb{E} \left[V_T^{\frac{iub\rho}{\sigma_v}} \exp \left\{ \frac{iua\rho}{\sigma_v} V_T \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \int_t^T \left[iu \left(-\frac{a^2}{2} - \frac{a\rho(\beta - \alpha_v)}{\sigma_v} \right) V_s e^{-\beta(T-s)} - \frac{u^2 a^2 (1-\rho^2)}{2} e^{-2\beta(T-s)} V_s \right] ds \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \int_t^T \left[iu \left(-\frac{b^2}{2} - \frac{b\rho \alpha_v \theta_v}{\sigma_v} - \frac{b\rho \sigma_v}{2} \right) \frac{1}{V_s} e^{-\beta(T-s)} + (iu)^2 \frac{b^2}{2} (1-\rho^2) \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \times e^{-2\beta(T-s)} \frac{1}{V_s} \right] ds - \frac{iub\rho \beta}{\sigma_v} \int_t^T e^{-\beta(T-s)} \ln V_s ds \right] \right\}. \tag{4.2.13}
\end{aligned}$$

针对 I_3 . 假设 $\{T_k\}_{k \geq 1}$ 是 $[t, T]$ 上发生跳跃的时间, 那么 I_3 可以表示如下

$$\begin{aligned}
I_3 & \equiv \mathbb{E} \left[\exp \left\{ iu \int_t^T e^{-\beta(T-s)} \xi dN_s \right\} \right] \\
& = \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\exp \left\{ \sum_{k=1}^{N_T - N_t} iue^{-\beta(T-T_k)} \xi_k \right\} \middle| \mathcal{F}_T^N \right] \right] \\
& = \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^{N_T - N_t} \left\{ \frac{p\eta_1}{\eta_1 - iue^{-\beta(T-T_k)}} + \frac{(1-p)\eta_2}{\eta_2 + iue^{-\beta(T-T_k)}} \right\} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda\tau} [\lambda(T-t)]^n}{n!} \times \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^n \left\{ \frac{p\eta_1}{\eta_1 - iue^{-\beta(T-T_k)}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{(1-p)\eta_2}{\eta_2 + iue^{-\beta(T-T_k)}} \right\} \middle| N_T - N_t = n \right], \quad (4.2.14)
\end{aligned}$$

利用泊松过程的性质, 获得

$$\mathbb{E} \left[\frac{p\eta_1}{\eta_1 - iue^{-\beta(T-T_k)}} \middle| N_T - N_t = n \right] = p - \frac{p}{\beta\tau} \ln \frac{\eta_1 - iu}{\eta_1 - iue^{-\beta\tau}},$$

类似地, 有

$$\mathbb{E} \left[\frac{(1-p)\eta_2}{\eta_2 + iue^{-\beta(T-T_k)}} \middle| N_T - N_t = n \right] = 1 - p - \frac{1-p}{\beta\tau} \ln \frac{\eta_2 + iu}{\eta_2 + iue^{-\beta\tau}},$$

从而

$$\begin{aligned}
I_3 &= e^{-\lambda\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^n}{n!} \left[1 - \frac{1}{\beta\tau} \ln \left(\frac{\eta_1 - iu}{\eta_1 - iue^{-\beta\tau}} \right)^p \left(\frac{\eta_2 + iu}{\eta_2 + iue^{-\beta\tau}} \right)^{1-p} \right]^n \\
&= e^{-\lambda\tau} \exp \left\{ \lambda\tau \left[1 - \frac{1}{\beta\tau} \ln \left(\frac{\eta_1 - iu}{\eta_1 - iue^{-\beta\tau}} \right)^p \left(\frac{\eta_2 + iu}{\eta_2 + iue^{-\beta\tau}} \right)^{1-p} \right] \right\} \\
&= \left(\frac{\eta_1 - iu}{\eta_1 - iue^{-\beta\tau}} \right)^{-\frac{p\lambda}{\beta}} \left(\frac{\eta_2 + iu}{\eta_2 + iue^{-\beta\tau}} \right)^{-\frac{(1-p)\lambda}{\beta}}. \quad (4.2.15)
\end{aligned}$$

将 I_1 、 I_2 及 I_3 的表达式代入(4.2.12)式可得

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\exp(iuY_T) | \mathcal{F}_t] &= \exp \left\{ iue^{-\beta\tau} Y_t + \frac{i u}{\beta} \left[(r - \lambda \kappa) - ab - \frac{a\rho\alpha_v\theta_v}{\sigma_v} + \frac{b\rho\alpha_v}{\sigma_v} \right] \right. \\
&\quad \times (1 - e^{-\beta\tau}) - \frac{iua\rho}{\sigma_v} e^{-\beta\tau} V_t - u^2(1 - \rho^2)ab \frac{1 - e^{-2\beta\tau}}{2\beta} \\
&\quad \left. - \frac{iub\rho}{\sigma_v} e^{-\beta\tau} \ln V_t \right\} \times \mathbb{E} \left[V_T^{-A} \exp \left\{ -BV_T + \int_t^T \left[Ce^{-\beta(T-s)} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + De^{-2\beta(T-s)} \right] V_s ds + \int_t^T \left[Ee^{-\beta(T-s)} + Fe^{-2\beta(T-s)} \right] \frac{1}{V_s} ds \right. \\
&\quad \left. - \frac{iub\rho}{\sigma_v} \int_t^T e^{-\beta(T-s)} \ln V_s ds \right\} \\
&\quad \times \left(\frac{\eta_1 - iu}{\eta_1 - iue^{-\beta\tau}} \right)^{-\frac{p\lambda}{\beta}} \left(\frac{\eta_2 + iu}{\eta_2 + iue^{-\beta\tau}} \right)^{-\frac{(1-p)\lambda}{\beta}},
\end{aligned}$$

其中, A、B、C、D、E、F的表达式详见定理4.1. 证毕.

为计算方便, 下面将给出标的资产在无杠杆效应情况下的广义条件特征函数.

推论 4.1 假定在完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ 中, 标的资产价格服从无杠杆效应

的4/2跳扩散随机混合模型, 则其广义条件特征函数如下所示

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\exp\{iuY_T\}|\mathcal{F}_t] &= \exp\left\{iu\left(\frac{(r-\lambda\kappa-ab)(1-e^{-\beta\tau})}{\beta} + \frac{i u a b(1-e^{-2\beta\tau})}{2\beta}\right)\right. \\ &\quad \left.+ iue^{-\beta\tau}Y_t\right\} e^{\frac{V_t+V_T}{\sigma_v^2}\left(\alpha_v \coth\left(\frac{\alpha_v\tau}{2}\right) - \sqrt{H} \coth\left(\frac{\sqrt{H}\tau}{2}\right)\right)} \frac{I_{\nu_1}(\lambda_1)}{I_{\nu_2}(\lambda_2)} \\ &\quad \times \left(\frac{\eta_1-iu}{\eta_1-iue^{-\beta\tau}}\right)^{-\frac{p\lambda}{\beta}} \left(\frac{\eta_2+iu}{\eta_2+iue^{-\beta\tau}}\right)^{-\frac{(1-p)\lambda}{\beta}} \\ &\quad \times \frac{\sqrt{H} \sinh\left(\frac{\alpha_v\tau}{2}\right)}{\alpha_v \sinh\left(\frac{\sqrt{H}\tau}{2}\right)}, \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{C} &= \frac{iua^2}{2}, \tilde{D} = -\frac{u^2a^2}{2}, \tilde{E} = \frac{iub^2}{2}, \tilde{F} = -\frac{u^2b^2}{2}, \lambda_1 = \frac{2\sqrt{H}V_tV_T}{\sigma_v^2 \sinh\left(\frac{\sqrt{H}\tau}{2}\right)}, \\ \lambda_2 &= \frac{2\alpha_v\sqrt{V_tV_T}}{\sigma_v^2 \sinh\left(\frac{\alpha_v\tau}{2}\right)}, \nu_1 = \frac{\sqrt{(2\alpha_v\theta_v - \sigma_v^2)^2 + 8g\sigma_v^2}}{\sigma_v^2}, \nu_2 = \frac{2\alpha_v\theta_v}{\sigma_v^2} - 1, \\ h &= \frac{1}{\tau} \left[\frac{\tilde{C}}{\beta} (1-e^{-\beta\tau}) + \frac{\tilde{D}}{2\beta} (1-e^{-2\beta\tau}) \right], H = \alpha_v^2 + 2h\sigma_v^2, \\ g &= \frac{1}{\tau} \left[\frac{\tilde{E}}{\beta} (1-e^{-\beta\tau}) + \frac{\tilde{F}}{2\beta} (1-e^{-2\beta\tau}) \right]. \end{aligned}$$

证明 根据无杠杆效应条件, 令 $\rho = 0$, 则定理4.1中给出的条件特征函数如下

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\exp\{iuY_T\}|\mathcal{F}_t] &= \exp\left\{\frac{i u}{\beta}(r-\lambda\kappa-ab)(1-e^{-\beta\tau}) - \frac{u^2ab(1-e^{-2\beta\tau})}{2\beta}\right. \\ &\quad \left.+ iue^{-\beta\tau}Y_t\right\} \left(\frac{\eta_1-iu}{\eta_1-iue^{-\beta\tau}}\right)^{-\frac{p\lambda}{\beta}} \left(\frac{\eta_2+iu}{\eta_2+iue^{-\beta\tau}}\right)^{-\frac{(1-p)\lambda}{\beta}} \\ &\quad \times \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\int_t^T [\tilde{C}e^{-\beta(T-s)} + \tilde{D}e^{-2\beta(T-s)}] V_s ds\right. \right. \\ &\quad \left. \left.- \int_t^T [\tilde{E}e^{-\beta(T-s)} + \tilde{F}e^{-2\beta(T-s)}] \frac{1}{V_s} ds\right\}\right], \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

其中

$$\tilde{C} = \frac{iua^2}{2}, \tilde{D} = \frac{u^2a^2}{2}, \tilde{E} = \frac{iub^2}{2}, \tilde{F} = \frac{u^2b^2}{2}.$$

假定 $h_1(s)$ 和 $h_2(s)$ 是满足如下表达式的有界函数

$$h_1(s) = \tilde{C}e^{-\beta(T-s)} + \tilde{D}e^{-2\beta(T-s)}, \quad h_2(s) = \tilde{E}e^{-\beta(T-s)} + \tilde{F}e^{-2\beta(T-s)},$$

则根据引理4.2得

$$\int_t^T h_1(s) V_s ds = h \int_t^T V_s ds, \quad \int_t^T h_2(s) \frac{1}{V_s} ds = g \int_t^T \frac{1}{V_s} ds,$$

其中

$$h = \frac{1}{\tau} \left[\frac{\tilde{C}}{\beta} (1 - e^{-\beta\tau}) + \frac{\tilde{D}}{2\beta} (1 - e^{-2\beta\tau}) \right],$$

$$g = \frac{1}{\tau} \left[\frac{\tilde{E}}{\beta} (1 - e^{-\beta\tau}) + \frac{\tilde{F}}{2\beta} (1 - e^{-2\beta\tau}) \right],$$

当 $h > -\frac{\alpha_v^2}{2\sigma_v^2}$, $g \geq -\frac{(2\theta_v\alpha_v - \sigma_v^2)^2}{8\sigma_v^2}$, 根据引理4.3可知

$$\mathbb{E} \left[\exp \left\{ -h \int_t^T V_s ds - g \int_t^T \frac{1}{V_s} ds \right\} \right] = \frac{\sqrt{H} \sinh\left(\frac{\alpha_v\tau}{2}\right) I_{\nu_1}(\lambda_1)}{\alpha_v \sinh\left(\frac{\sqrt{H}\tau}{2}\right) I_{\nu_2}(\lambda_2)} \times e^{\frac{V_t + V_T}{\sigma_v^2} \left(\alpha_v \coth\left(\frac{\alpha_v\tau}{2}\right) - \sqrt{H} \coth\left(\frac{\sqrt{H}\tau}{2}\right) \right)}, \quad (4.2.18)$$

其中

$$H = \alpha_v^2 + 2h\sigma_v^2, \quad \nu_1 = \frac{\sqrt{(2\alpha_v\theta_v - \sigma_v^2)^2 + 8g\sigma_v^2}}{\sigma_v^2}, \quad \nu_2 = \frac{2\alpha_v\theta_v}{\sigma_v^2} - 1,$$

$$\lambda_1 = \frac{2\sqrt{H}V_tV_T}{\sigma_v^2 \sinh\left(\frac{\sqrt{H}\tau}{2}\right)}, \quad \lambda_2 = \frac{2\alpha_v\sqrt{V_tV_T}}{\sigma_v^2 \sinh\left(\frac{\alpha_v\tau}{2}\right)}.$$

进而根据引理4.4即可得以上条件特征函数的值, 推论4.1得证. 证毕.

根据参数 a 、 b 、 β 的不同取值给出以下推论.

推论 4.2 若 $a = 0$, $b \neq 0$, 则4/2跳扩散随机混合模型退化为3/2跳扩散随机混合模型, 且

$$\mathbb{E}[\exp\{iuY_T\} | \mathcal{F}_t] = \exp \left\{ iue^{-\beta\tau} Y_t + \frac{iu(r - \lambda\kappa)(1 - e^{-\beta\tau})}{\beta} \right\} \frac{I_{\nu_1}(\lambda_3)}{I_{\nu_2}(\lambda_3)} \times \left(\frac{\eta_1 - iu}{\eta_1 - iue^{-\beta\tau}} \right)^{-\frac{p\lambda}{\beta}} \left(\frac{\eta_2 + iu}{\eta_2 + iue^{-\beta\tau}} \right)^{-\frac{(1-p)\lambda}{\beta}}, \quad (4.2.19)$$

其中, $\lambda_3 = -\frac{2\alpha_v\sqrt{V_tV_T}}{\sigma_v^2 \sinh\left(-\frac{\alpha_v\tau}{2}\right)}$, 且 ν_1 、 ν_2 、 \tilde{E} 、 \tilde{F} 、 g 的表达式同推论4.1.

推论 4.3 若 $b = 0$, $a \neq 0$, 则4/2跳扩散随机混合模型退化为Heston跳扩散随机混合模型, 且

$$\mathbb{E}[\exp\{iuY_T\} | \mathcal{F}_t] = \exp \left\{ iue^{-\beta\tau} Y_t + \frac{iu(r - \lambda\kappa - \frac{a\rho\alpha_v\theta_v}{\sigma_v})(1 - e^{-\beta\tau})}{\beta} - \frac{iua\rho}{\sigma_v} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& \times e^{-\beta\tau} V_t \left\{ \left(\frac{\eta_1 - iu}{\eta_1 - iue^{-\beta\tau}} \right)^{-\frac{p\lambda}{\beta}} \left(\frac{\eta_2 + iu}{\eta_2 + iue^{-\beta\tau}} \right)^{-\frac{(1-p)\lambda}{\beta}} \right. \\
& \times \left(\frac{(B'\sigma_v^2 + \alpha_v)(e^{\sqrt{H'}\tau} - 1) + \sqrt{H'}(e^{\sqrt{H'}\tau} + 1)}{2\sqrt{H'}e^{\frac{(\sqrt{H'} + \alpha_v)\tau}{2}}} \right)^{-\frac{2\alpha_v\theta_v}{\sigma_v^2}} \\
& \left. \times \exp \left\{ -V_t \frac{(B'\sigma_v^2 + 2h')(e^{\sqrt{H'}\tau} - 1) - B'\sqrt{H'}(e^{\sqrt{H'}\tau} + 1)}{(B'\sigma_v^2 + \alpha_v)(e^{\sqrt{H'}\tau} - 1) + \sqrt{H'}(e^{\sqrt{H'}\tau} + 1)} \right\} \right\},
\end{aligned} \tag{4.2.20}$$

其中

$$\begin{aligned}
B' &= -\frac{iua\rho}{\sigma_v}, \quad C' = \frac{iua^2}{2} - \frac{a\rho(\beta - \alpha_v)}{\sigma_v}, \quad D' = -\frac{(iu)^2(1 - \rho^2)a^2}{2}, \\
H' &= \alpha_v^2 + 2h'\sigma_v^2, \quad h' = \frac{1}{\tau} \left[\frac{C'}{\beta} (1 - e^{-\beta\tau}) + \frac{D'}{2\beta} (1 - e^{-2\beta\tau}) \right].
\end{aligned}$$

推论 4.4 若 $\beta = 0$, 则4/2跳扩散随机混合模型退化为无均值回复特征的4/2跳扩散随机混合模型, 且

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\exp\{iuY_T\} | \mathcal{F}_t] &= \exp \left\{ iuY_t + iu \left(r - \lambda\kappa - ab + (1 - \rho^2)iuab - \frac{a\rho\alpha_v\theta_v}{\sigma_v} \right) \tau \right. \\
& \left. + \frac{iub\rho\alpha_v}{\sigma_v} \tau \right\} V_t^{\frac{1}{2} + \frac{m}{2} - \frac{\alpha_v\theta_v}{\sigma_v^2} - \frac{iub\rho}{\sigma_v}} \left(v + \tilde{K} \right)^{-\frac{1}{2} - \frac{m}{2} + w - \frac{\alpha_v\theta_v}{\sigma_v^2}} \\
& \times \left(\frac{\sqrt{\tilde{H}}}{\sigma_v^2 \sinh^2 \left(\frac{\sqrt{\tilde{H}}\tau}{2} \right)} \right)^{m+1} \frac{\Gamma \left(\frac{1}{2} + \frac{m}{2} - w + \frac{\alpha_v\theta_v}{\sigma_v^2} \right)}{\Gamma(m+1)} \\
& \times \exp \left\{ \frac{\alpha_v^2\theta_v\tau - \sqrt{\tilde{H}}V_t \coth \left(\frac{\sqrt{\tilde{H}}\tau}{2} \right) + \alpha_v V_t - iua\rho\sigma_v V_t}{\sigma_v^2} \right\} \\
& \times \exp \left\{ \lambda\tau \left(\frac{p\eta_1}{\eta_1 - iu} + \frac{(1-p)\eta_2}{\eta_2 + iu} - 1 \right) \right\} \\
& \times {}_1F_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{m}{2} - w + \frac{\alpha_v\theta_v}{\sigma_v^2}, m+1, \frac{\tilde{H}V_t}{\sigma_v^4 \sinh^2 \left(\frac{\sqrt{\tilde{H}}\tau(v + \tilde{K})}{2} \right)} \right),
\end{aligned} \tag{4.2.21}$$

其中, $\Gamma(\cdot)$ 表示伽马函数, ${}_1F_1(\cdot, \cdot, \cdot)$ 为超几何汇流函数, 且

$$\begin{aligned}
v &= -\frac{iua\rho}{\sigma_v}, \quad w = \frac{iub\rho}{\sigma_v}, \quad \varphi = -iu \left[\frac{a\rho\alpha_v}{\sigma_v} - \frac{\sigma_v^2}{2} + \frac{iu(1 - \rho^2)a^2}{2} \right], \\
\delta &= -iub \left[\frac{\rho(\sigma_v^2 - 2\alpha_v\theta_v)}{2\sigma_v} + \frac{(iu(1 - \rho^2) - 1)b}{2} \right], \quad \tilde{H} = \alpha_v^2 + 2\varphi\sigma_v^2,
\end{aligned}$$

$$m = \frac{\sqrt{(2\alpha_v\theta_v - \sigma_v^2)^2 + 8\sigma_v^2\delta}}{\sigma_v^2}, \quad \tilde{K} = \frac{\sqrt{\tilde{H}} \coth\left(\frac{\sqrt{\tilde{H}}\tau}{2}\right) + \alpha_v}{\sigma_v^2}.$$

推论4.2、推论4.3及推论4.4的证明过程同推论4.1.

4.2.2 基于4/2跳扩散随机混合模型的欧式期权定价公式

基于4.2.1节所给标的资产对数资产价格所满足的特征函数, 本小节将给出基于4/2跳扩散随机混合模型的欧式期权定价公式.

定理 4.2 假定在完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ 中, 标的资产价格满足(4.1.1)式, 则到期时间为 T , 执行价格为 K 的欧式看涨期权定价公式如下

$$C(S_0, T, K) = S_0 - \frac{Ke^{-rT}}{2\pi} \int_{-iz_2 - \infty}^{iz_2 + \infty} \Phi(-z) \frac{e^{-izk}}{z^2 - iz} dz, \quad 0 < \text{Im}(z) < 1, \quad (4.2.22)$$

其中, $k = \ln \frac{S_0}{K} + rT$, $z = z_1 + iz_2$, 且 $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$.

特别地, 当 $z_2 = \frac{1}{2}$ 时

$$C(S_0, T, K) = S_0 - \frac{\sqrt{S_0 K} e^{-\frac{1}{2}rT}}{\pi} \int_0^\infty \text{Re} \left[\Phi\left(z_1 - \frac{1}{2}i\right) e^{iz_1 k} \right] \frac{1}{z_1^2 + \frac{1}{4}} dz_1, \quad (4.2.23)$$

$\Phi(\cdot)$ 表示特征函数, $\text{Re}[\cdot]$ 表示取实部.

证明 令 $y = Y_T = \ln S_T$, 执行价格 $K > 0$, 则欧式看涨期权的收益函数为

$$f(y) = \max\{S_T - K, 0\}, \quad (4.2.24)$$

对于 $z \in \mathbb{C}$, 其广义傅里叶变换为

$$\begin{aligned} \hat{f}(z) &= \mathcal{F}[f(y)] = \int_{\mathbb{C}} e^{izy} \max(e^y - K, 0) dy = \int_{\ln K}^\infty e^{(iz+1)y} dy - \int_{\ln K}^\infty e^{izy} K dy \\ &= \frac{e^{(iz+1)y}}{iz+1} \Big|_{\ln K}^\infty - K \frac{e^{izy}}{iz} \Big|_{\ln K}^\infty. \end{aligned} \quad (4.2.25)$$

假定

$$z = z_1 + iz_2,$$

根据欧拉公式, 有

$$\frac{e^{(iz+1)y}}{iz+1} = \frac{e^{(1-z_2)y} e^{iz_1 y}}{iz_1 - z_2 + 1} = \frac{e^{(1-z_2)y}}{iz_1 - z_2 + 1} \left[\cos(z_1 y) + i \sin(z_1 y) \right],$$

如果 $\frac{e^{(iz+1)y}}{iz+1}$ 有定义, 必须有 $Im(z) > 1$, 则

$$\frac{e^{(iz+1)y}}{iz+1} \Big|_{\ln K}^{\infty} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^{(iz+1)y}}{iz+1} - \frac{e^{(iz+1)\ln K}}{iz+1} = -\frac{e^{(iz+1)\ln K}}{iz+1}. \quad (4.2.26)$$

同样地, 要使 $\frac{Ke^{izy}}{iz}$ 有定义, 必须有 $Im(z) > 0$, 则

$$\frac{Ke^{izy}}{iz} \Big|_{\ln K}^{\infty} = -\frac{Ke^{iz\ln K}}{iz}, \quad (4.2.27)$$

为保证 $\frac{e^{(iz+1)y}}{iz+1}$ 和 $\frac{Ke^{izy}}{iz}$ 均有定义, 必须有 $Im(z) > 1$, 从而

$$\hat{f}(z) = \int_{\mathbb{C}} e^{izy} \max(e^y - K, 0) dy = -\frac{e^{(iz+1)\ln K}}{iz+1} + \frac{Ke^{iz\ln K}}{iz} = -\frac{K^{iz+1}}{z^2 - iz}. \quad (4.2.28)$$

因此

$$\begin{aligned} C(S_0, T, K) &= e^{-rT} \mathbb{E} [f(\ln S_T)] = \frac{e^{-rT}}{2\pi} \mathbb{E} \left[\int_{iz_2 - \infty}^{iz_2 + \infty} S_T^{-iz} \hat{f}(z) dz \right] \\ &= -\frac{Ke^{-rT}}{2\pi} \int_{iz_2 - \infty}^{iz_2 + \infty} \exp\{-iz[\ln S_0 + rT]\} \Phi(-iz) \frac{K^{iz}}{z^2 - iz} dz. \end{aligned} \quad (4.2.29)$$

令 $k = \ln \frac{S_0}{K} + rT$, 则

$$C(S_0, T, K) = -\frac{Ke^{-rT}}{2\pi} \int_{iz_2 - \infty}^{iz_2 + \infty} e^{-izk} \Phi(-iz) \frac{1}{z^2 - iz} dz, \quad Im(z) > 1. \quad (4.2.30)$$

当 $0 < Im(z) < 1$ 时, 欧式期权定价公式如下

$$C(S_0, T, K) = S_0 - \frac{Ke^{-rT}}{2\pi} \int_{-iz_2 - \infty}^{iz_2 + \infty} \Phi(-z) \frac{e^{-izk}}{z^2 - iz} dz, \quad 0 < Im(z) < 1,$$

特别地, 当 $z_2 = \frac{1}{2}$ 时, 有

$$C(S_0, T, K) = S_0 - \frac{\sqrt{S_0 K} e^{-\frac{1}{2}rT}}{\pi} \int_0^{\infty} Re \left[\Phi(z_1 - \frac{1}{2}i) e^{iz_1 k} \right] \frac{1}{z_1^2 + \frac{1}{4}} dz_1,$$

其中, $Re[\cdot]$ 表示取实部, 特征函数 $\Phi(\cdot)$ 的表达式见4.2.1节. 证毕.

4.3 4/2跳扩散随机混合模型欧式期权定价实证分析

本小节主要基于上证50ETF期权, 检验LMRJ-4/2-SV、4/2-SV、3/2-SV以及Heston-SV模型在欧式期权中的定价表现. 首先, 对50ETF期权的标的进行描述性统计分析, 探讨期权标的资产及其对数资产价格的动态变化特征; 其次, 为

保证定价模型的合理性, 利用粒子群优化算法估计模型参数; 最后, 对模型定价结果进行分析, 探讨模型定价性能.

4.3.1 标的资产价格描述性统计分析

为检验标的资产价格变化趋势与本章所构建LMRJ-4/2-SV模型的特征是否相符, 本小节对期权标的资产价格进行描述性统计分析, 探讨所选数据的动态变化特征. 图4.1-图4.3分别给出了标的资产收盘价、标的资产对数收益趋势及Q-Q图. 图4.1所示为2018年3月14日至2024年5月10日50ETF的收盘价走势(数据从Wind数据库中获取). 基于标的资产数据可以得到1494个日对数收益值, 其变化趋势如图4.2所示.

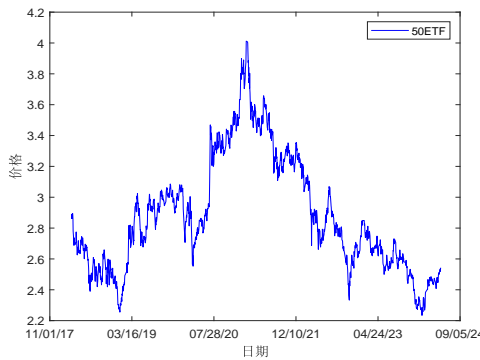


图4.1 50ETF

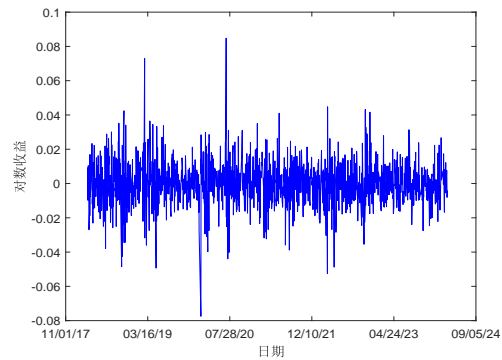


图4.2 对数收益

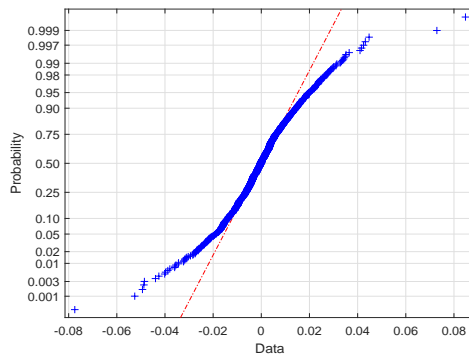


图4.3 Q-Q图

图4.1-4.2表明, 标的资产具有跳跃特征, 且其对数收益具有均值回复特性. 图4.3表明标的资产对数收益率具有厚尾特性.

为进一步分析数据特征, 给出以下统计量值. 结果如表4.1所示.

表4.1 50ETF对数资产价格描述性统计分析

名称	最大值	最小值	均值	标准差	偏度	峰度	样本量	p值
50ETF	0.0848	-0.0775	-0.00007	0.0124	0.0867	7.3257	1494	0.001

如表4.1所示, 样本偏度为 $0.0867 > 0$, 这意味着样本是向右倾斜的, 并非为正态分布; 峰度为 $7.3257 > 3$, 即样本呈现出尖峰厚尾特征. 因此, 表明经典B-S模型中标的资产服从正态分布的假设并不合理.

综上所述, 标的资产价格具有以下特点

- (1) 标的资产具有随机跳跃特征;
- (2) 标的价格具有尖峰、厚尾等非正态特征;
- (3) 对数收益数据具有均值回复的特点;
- (4) 标的资产价格波动率具有随机变化的特征.

因此, 基于以上分析可知本文所研究实证数据的动态变化特征符合文中构建LMRJ-4/2-SV模型的特点, 表明理论上基于LMRJ-4/2-SV模型对期权进行定价具有一定的合理性.

此外, 对模型参数的有效估计是利用模型进行定价的前提. 因此, 下面将对本文新构建模型及所选基准模型中的参数进行估计.

4.3.2 4/2跳扩散随机混合模型参数估计

由于LMRJ-4/2-SV模型中的参数过多(β 、 a 、 α_v 、 θ_v 、 σ_v 、 λ 、 p 、 η_1 、 η_2), 直接进行估计十分困难. 因此, 本文将参数估计问题转化为优化问题, 利用粒子群优化算法(PSO)估计模型参数. 为验证参数估计的稳健性及模型的定价和预测能力, 将数据分为样本内和样本外两组. 其中, 样本内数据用于估计参数, 样本外数据用于验证模型的定价和预测能力.

具体来讲, 以2021年7月20日的期权价格作为检验样本内模型定价性能的数据, 以2021年7月21日的期权数据作为检验模型预测能力的样本外数据. 并且为进一步验证模型对不同类型期权的定价和预测效果, 将期权数据分为三类(实值期权(ITM)、平值期权(ATM)、虚值期权(OTM))进行分析. 此外, 所选期权合约的到期日分别为2021年7月28日、2021年8月25日、2021年9月22日、2021年12月22日; 样本内数据的初始值为3.408; 样本外数据的初始值为3.421; 无风险利率 $r = 0.03$.

实证检验过程中T均为年化到期时间, 具体取值如下

样本内T值: $T = \left\{ \frac{8}{365}, \frac{36}{365}, \frac{64}{365}, \frac{155}{365} \right\}$.

样本外T值: $T = \left\{ \frac{7}{365}, \frac{35}{365}, \frac{63}{365}, \frac{154}{365} \right\}$.

对所有样本数据进行汇总, 结果详见表4.2.

表4.2 50ETF期权数据

日期	总值	S/K		
		ITM (≥ 1.01)	ATM (0.98, 1.01)	OTM (≤ 0.98)
July 20, 2021	0.1425	0.2925	0.1014	0.0307
	(40)	(16)	(4)	(20)
July 21, 2021	0.1461	0.3001	0.1047	0.0311
	(40)	(16)	(4)	(20)

表4.2给出了不同类型期权样本的平均价格以及相应的样本量. 括号内数据表示期权数量, 括号外数据表示期权的平均价格.

下面将根据优化理论, 利用粒子群优化算法对模型中参数进行估计. 粒子群优化目标函数详见第三章参数估计部分内容. 参数估计结果如表4.3所示.

表4.3 参数估计值

模型	β	a	α_v	θ_v	σ_v	ρ	λ	p	η_1	η_2
LMRJ-4/2-SV	5.2989	0.9975	0.5014	0.9987	0.2768	-	0.6038	0.9625	1.0990	0.1434
4/2-SV	-	0.3827	0.9829	0.8658	0.4016	-0.7273	-	-	-	-
3/2-SV	-	0	0.4836	0.3819	0.3273	-0.9381	-	-	-	-
Heston-SV	-	1	0.5271	0.4662	0.6213	-0.7564	-	-	-	-

为说明LMRJ-4/2-SV模型的定价性能, 文中将4/2-SV、3/2-SV和Heston-SV模型作为对照模型, 所有模型的相关参数值均在表4.3中给出.

4.3.3 4/2跳扩散随机混合模型欧式期权定价结果分析

从标的资产价格的描述性统计结果及模型参数估计结果可知, 本文构建的LMRJ-4/2-SV模型符合实际数据的动态变化特征, 即基于LMRJ-4/2-SV模型对期权进行定价是合理有效的. 为直观分析各模型下期权的价格走势与真实价格的价格走势情况, 根据到期时间的不同将数据分为4组, 讨论执行价格变化对期权价格走势的影响, 各模型参数值见表4.3, 定价结果如图4.5.

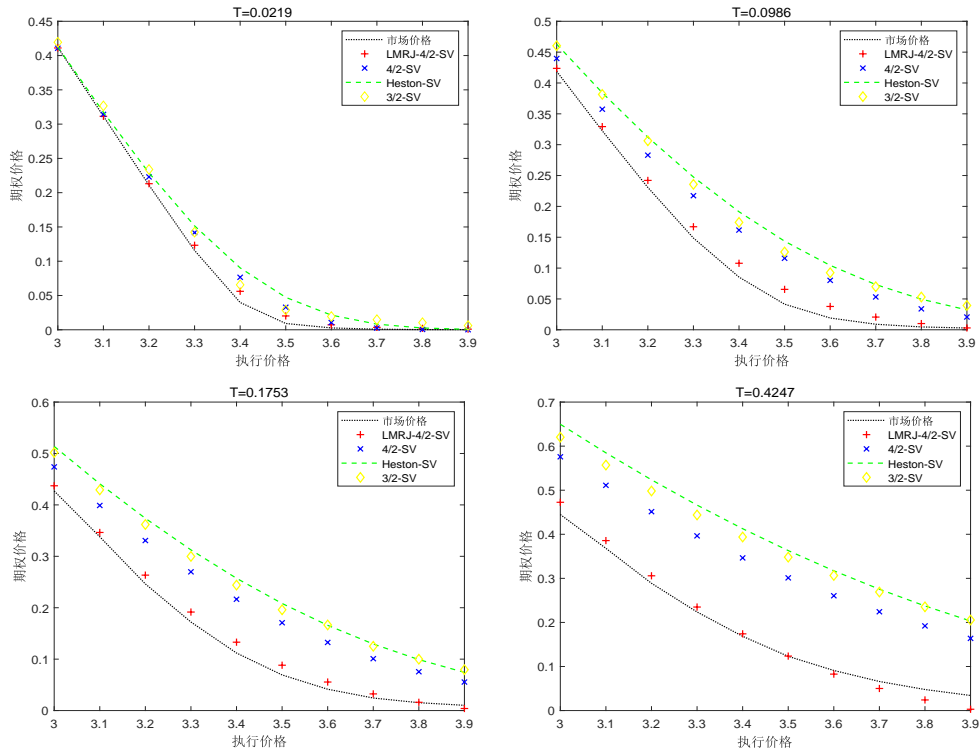


图4.5 样本内定价结果

由图4.5可得，到期时间相同时，期权市场价格随执行价格的增大而减小，根据LMRJ-4/2-SV模型、4/2-SV模型、3/2-SV模型及Heston-SV模型定价得到的价格趋势也随执行价格的增加而减少，即基于LMRJ-4/2-SV、4/2-SV、3/2-SV和Heston-SV模型的理论价格与真实价格变化趋势一致，说明了LMRJ-4/2-SV定价模型的有效性。此外，从图4.5可以看出，基于LMRJ-4/2-SV模型下欧式期权定价公式得到的期权价格曲线更接近真实数据曲线，4/2-SV模型次之，而3/2-SV和Heston-SV模型相对较差，这表明LMRJ-4/2-SV模型的定价结果优于4/2-SV、3/2-SV和Heston-SV模型的定价结果。此外，当到期时间较小时，LMRJ-4/2-SV模型、4/2-SV、3/2-SV和Heston-SV模型的定价结果基本相同，但随着到期时间的不断变增加，LMRJ-4/2-SV模型的定价结果明显优于4/2-SV、3/2-SV和Heston-SV模型，即到期时间越长，LMRJ-4/2-SV模型的定价精度越高。这主要是因为到期时间越长标的资产价格变化特征对期权定价结果的影响越明显。综上可得，LMRJ-4/2-SV模型能够对欧式期权进行合理有效定价，并且其定价结果优于其它随机波动率模型，表明构建LMRJ-4/2-SV模型是十分必要的。

虽然样本内定价结果表明，相比于Heston-SV模型、3/2-SV模型和4/2-SV模型而言LMRJ-4/2-SV模型的定价结果最优，但这有可能是数据的过度拟合而导致的。

因此,为进一步验证LMRJ-4/2-SV模型的样本外预测能力,基于表4.3所给参数值,进行样本外定价结果分析,见图4.6.

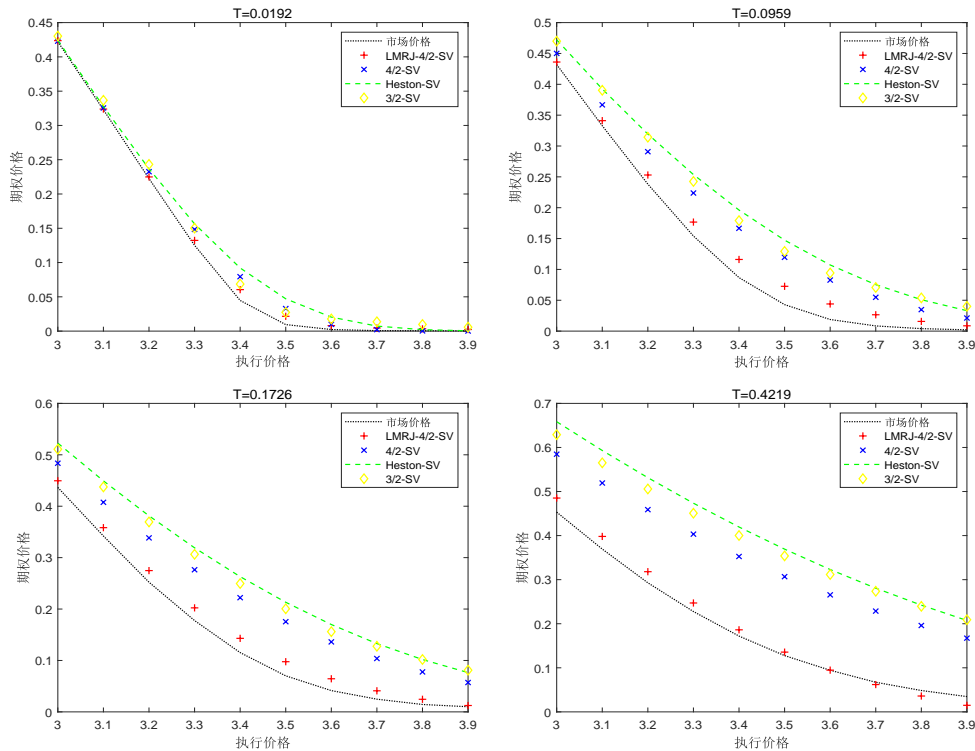


图4.6 样本外定价结果

图4.6样本外结果表明,对样本外数据而言,模型定价结果与样本内一致,即LMRJ-4/2-SV模型的定价结果最优,4/2-SV模型次之,3/2-SV模型和Heston-SV模型相对较差.此外,随着到期时间的增加LMRJ-4/2-SV模型的定价结果与4/2-SV、3/2-SV和Heston-SV模型的差异越明显.样本内外的这一结论主要是因为期权到期时间越长,标的资产的非正态特征、对数均值回复特征、跳跃以及随机波动特征越明显,而LMRJ-4/2-SV模型的构建综合考虑了以上特征,因此其定价结果相比4/2-SV、3/2-SV和Heston-SV模型呈现出了更好的定价结果.

4.3.4 4/2跳扩散随机混合模型欧式期权定价误差分析

为验证模型的定价精度,选取均方根误差(RMSE)来衡量模型的定价精度.表4.4给出了样本内和样本外模型的RMSE值.样本内误差结果用于验证参数估计结果的可靠性以及模型定价结果的合理性,样本外误差结果用于检验参数的稳健

性和模型的预测能力. RMSE具体表达式如下

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{m_1 n_1} \sum_{l=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{m_1} (C_{lj} - \widehat{C}_{lj})^2}, \quad (4.3.1)$$

其中, n_1 、 m_1 、 C_{lj} 和 \widehat{C}_{lj} 分别表示到期时间、执行价格、期权真实值及估计值.

表4.4 误差分析

S/K	样本内RMSE				样本外RMSE			
	LMRJ-4/2-SV	4/2-SV	3/2-SV	Heston	LMRJ-4/2-SV	4/2-SV	3/2-SV	Heston
≥ 1.01 (16)	0.0136	0.0889	0.1203	0.1230	0.0182	0.0907	0.1220	0.1248
(0.98, 1.01) (4)	0.0170	0.1115	0.1437	0.1429	0.0228	0.1136	0.1457	0.1453
≤ 0.98 (20)	0.0137	0.0912	0.1207	0.1107	0.0150	0.0931	0.1229	0.1133
Total (40)	0.0141	0.0925	0.1230	0.1193	0.0172	0.0994	0.1250	0.1215

根据表4.4中不同期权类型下的RMSE值可知, 样本内外具有一致的定价表现. 首先, 样本内外各个模型下ITM和OTM期权的RMSE均小于ATM期权的RMSE值, 说明文中所涉及模型对实值期权和虚值期权的定价精度高于对平值期权的定价精度. 其次, 与4/2-SV、3/2-SV和Heston-SV模型相比, LMRJ-4/2-SV模型下各类期权的RMSE值均最小(样本内ITM、ATM和OTM期权的RMSE分别为0.0136、0.0170和0.0137; 样本外ITM、ATM和OTM期权的RMSE分别为0.0182、0.0228和0.0150), 即相比于4/2-SV、3/2-SV和Heston-SV模型而言LMRJ-4/2-SV模型下的ATM、OTM及ITM期权定价误差均最小. 此外, 基于LMRJ-4/2-SV模型进行定价的样本内外总的RMSE值均最小, 即整体来讲LMRJ-4/2-SV模型的定价精度优于4/2-SV、3/2-SV和Heston-SV模型. 最后, 所有模型的样本外期权拟合误差均大于样本内误差, 主要是因为模型参数是通过样本内数据校准所得更符合样本内数据结构, 符合真实情况.

综上所述, LMRJ-4/2-SV模型对期权标的资产数据的拟合程度更高, 基于此模型的欧式期权定价误差最小、定价结果最优, 4/2-SV模型次之, 3/2-SV和Heston-SV模型定价结果相对较差. 这主要是因为LMRJ-4/2-SV模型综合考虑了标的资产价格的尖峰、厚尾、跳跃扩散、对数均值回复以及波动率不规则波动等特征, 比较全面地分析了期权标的资产价格的动态变化趋势. 此外, 4/2-SV模型本身比3/2-SV和Heston-SV模型对波动率的描述更充分, 所以其定价结

果优于3/2-SV和Heston-SV模型. 但4/2-SV模型并没有考虑标的资产的跳跃扩散及对数均值回复特征, 因此其定价结果不如LMRJ-4/2-SV模型.

4.4 本章小结

本章主要基于金融市场数据的尖峰、厚尾、波动率集聚及跳跃等动态变化特征, 构建了LMRJ-4/2-SV欧式期权定价模型, 并基于此模型对50ETF期权进行实证研究, 分析该模型在我国金融市场衍生产品定价问题中的定价效果. 首先, 对市场条件进行假设, 并建立了4/2跳扩散随机混合模型. 其次, 利用Itô引理、快速傅里叶变换以及欧拉变化等方法获得了LMRJ-4/2-SV模型下标的对数资产价格的特征函数及欧式期权定价公式. 再次, 使用粒子群优化算法对模型参数进行估计, 获得一组稳定的参数估计值. 最后, 将LMRJ-4/2-SV模型下的定价结果与4/2-SV、3/2-SV和Heston-SV模型的定价结果进行对比, 分析LMRJ-4/2-SV模型的定价性能. 结果显示: 具有双因子特征的4/2-SV模型比单因子3/2-SV和Heston-SV模型对标的资产价格趋势的拟合程度更好, 定价结果更优; 具有对数均值回复特征的跳扩散随机波动率LMRJ-4/2-SV模型比单纯的双因子随机波动率4/2-SV模型的定价精度更高, 即本章构建的LMRJ-4/2-SV模型在欧式期权定价中表现较好, 4/2-SV模型次之, 3/2-SV和Heston-SV模型的定价效果相对较差. 这表明构建LMRJ-4/2-SV模型是十分必要的, 该模型不仅能够提高金融衍生产品的定价精度, 而且也能丰富期权定价模型的理论框架.

5 基于4/2-CIR跳扩散随机混合模型的欧式期权定价研究

第三章和第四章在4/2随波动率模型的基础上分别从随机利率和跳扩散角度入手,构建了相应的欧式期权定价模型,并对不同条件下新构建模型的定价性能进行了研究,发现具有随机利率和跳扩散特征的4/2随机波动率模型均能够提高纯4/2随机波动率模型下的欧式期权定价精度.但前两章中并未同时考虑利率的随机性与跳扩散特征.因此,本章基于第三、四章内容,对同时具有随机利率和跳扩散特征的4/2随机波动率模型下的欧式期权定价问题进行研究.

本章结构如下:第一节基于金融市场基础资产的尖峰厚尾、波动率集聚、跳跃扩散及市场利率的随机性特征,构建4/2-CIR跳扩散随机混合模型.第二节对4/2-CIR跳扩散随机混合模型下欧式期权定价理论进行探讨,获得4/2-CIR跳扩散随机混合模型下的欧式期权定价公式.第三节基于4/2-CIR跳扩散随机混合模型进行实证分析,检验基于不同视角所构建模型在真实市场中的定价效果.第四节为本章小节.

5.1 4/2-CIR跳扩散随机混合模型的构建

假定 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$ 是一个完备的概率空间, $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ 是由布朗运动生成的右连左极的信息流, \mathbb{P} 表示历史概率测度, 标的资产价格满足如下方程

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + (a\sqrt{v_t} + \frac{b}{\sqrt{v_t}})dW_t^{\mathbb{P}} + \eta\sigma_r\sqrt{r_t}dW_{r,t}^{\mathbb{P}} + (e^{\xi} - 1)dN_t^{\mathbb{P}}, \quad (5.1.1)$$

其中, μ, η 是常数, S_t 表示 t 时刻股票的价格, $W_t^{\mathbb{P}}, W_{r,t}^{\mathbb{P}}$ 均为标准布朗运动, $N_t^{\mathbb{P}}$ 是强度为 $\lambda^{\mathbb{P}}$ 的泊松过程, 且 $W_{r,t}^{\mathbb{P}}, W_t^{\mathbb{P}}, N_t^{\mathbb{P}}$ 相互独立, ξ 服从双指数分布, 其密度函数为 $f_{\xi}(y) = p\eta_1 e^{-\eta_1 y} I_{y \geq 0} + q\eta_2 e^{\eta_2 y} I_{y < 0}$, $\eta_1 > 1, \eta_2 > 0, p + q = 1$.

波动率和利率满足如下CIR过程

$$\begin{cases} dv_t = \zeta_v(\eta_v - v_t)dt + \sigma_v\sqrt{v_t}dW_{v,t}^{\mathbb{P}}, \\ dr_t = \zeta_r(\eta_r - r_t)dt + \sigma_r\sqrt{r_t}dW_{r,t}^{\mathbb{P}}, \end{cases} \quad (5.1.2)$$

其中, $\zeta_v, \eta_v, \sigma_v$ 分别表示波动率过程的均值回复速度、均值回复水平及波动率, 且 $2\zeta_v\eta_v \geq \sigma_v^2$, $\zeta_r, \eta_r, \sigma_r$ 分别表示利率过程的均值回复速度、均值回复水平及波动率, 且 $2\zeta_r\eta_r \geq \sigma_r^2$, $W_{v,t}^{\mathbb{P}}$ 和 $W_t^{\mathbb{P}}$ 的相关系数为 ρ , $W_{v,t}^{\mathbb{P}}$ 和 $W_{r,t}^{\mathbb{P}}$ 相互独立.

假定 \mathbb{Q} 是 \mathbb{P} 的等价鞅测度, $\nu^{\mathbb{P}}(dy)$ 是 $e^{\xi} - 1$ 的概率分布, $\nu(dy)$ 是强度为 λ 的跳跃

分布, $\psi(y) = \frac{\lambda}{\lambda^p} \frac{v(dy)}{v^p(dy)} - 1, y \in \mathbb{R}$, 过程 $X = X_t, t \in [0, T]$ 定义如下

$$X_t := \frac{dQ}{dP} = \exp\{-(\lambda - \lambda^p)t\} \widetilde{X}_t^1 \widetilde{X}_t^2 \prod_{j=1}^{N_t} (1 + \psi(m_j)), \quad (5.1.3)$$

其中, $m_j = e^{\xi_j} - 1, \widetilde{X}_t^1, \widetilde{X}_t^2$ 是两个随机指数鞅过程, 定义如下

$$\widetilde{X}_t^1 = \exp\left\{-\int_t^T \bar{\lambda} \sqrt{v_s} dW_s^{\mathbb{P}} - \frac{1}{2} \int_t^T \bar{\lambda}^2 v_s ds\right\}, \quad (5.1.4)$$

$$\widetilde{X}_t^2 = \exp\left\{-\int_t^T \frac{\lambda_r}{\sigma_r} \sqrt{r_t} dW_{r,s}^{\mathbb{P}} - \frac{1}{2} \int_t^T \frac{\lambda_r^2}{\sigma_r^2} r_s ds\right\}. \quad (5.1.5)$$

随机指数鞅过程 \widetilde{X}_t^1 和 \widetilde{X}_t^2 在测度 \mathbb{P} 下与样本路径相互独立, 则根据 Cherny(2016) 定理 2.4 有

$$\begin{aligned} \widetilde{X}_t &= \widetilde{X}_t^1 \widetilde{X}_t^2 \\ &= \exp\left\{-\int_t^T \bar{\lambda} \sqrt{v_s} dW_s^{\mathbb{P}} - \frac{1}{2} \int_t^T \bar{\lambda}^2 v_s ds - \int_t^T \frac{\lambda_r}{\sigma_r} \sqrt{r_t} dW_{r,s}^{\mathbb{P}} - \frac{1}{2} \int_t^T \frac{\lambda_r^2}{\sigma_r^2} r_s ds\right\}, \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

是一个鞅. 然而, 过程 X 在风险中性测度下有定义, 当且仅当在 \mathbb{Q} 测度下其为真正的鞅并且标的资产贴现过程的鞅性成立, 即

$$u - r_t + \lambda \mathbb{E}(e^{\xi} - 1) - \frac{\lambda_r}{\sigma_r} \sqrt{r_t} \eta \sigma_r \sqrt{r_t} - \bar{\lambda} \sqrt{v_t} \left(a \sqrt{v_t} + \frac{b}{\sqrt{v_t}}\right) = 0, \mathbb{P} - a.s., \quad (5.1.7)$$

为保证测度变化定良好, 则需保证 Novikov 条件成立, 即

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{\frac{1}{2} \int_t^T \bar{\lambda}^2 v_s ds\right\}\right] < \infty, \quad (5.1.8)$$

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{\frac{1}{2} \int_t^T \frac{\lambda_r^2}{\sigma_r^2} r_s ds\right\}\right] < \infty. \quad (5.1.9)$$

根据 Kraft(2005) 命题 5.1 可知, 上式成立必满足

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \bar{\lambda}^2 &\leq \frac{\zeta_v^2}{2\sigma_v^2}, \\ \frac{1}{2} \frac{\lambda_r^2}{\sigma_r^2} &\leq \frac{\zeta_r^2}{2\sigma_r^2}. \end{aligned}$$

根据 Cheng(2021) 可得, 贴现资产价格鞅性成立必须满足

$$\sigma_v^2 \leq 2\zeta_v \eta_v - 2|\sigma_v \rho b|, \quad (5.1.10)$$

此外, 为了对冲利率风险, 根据Zhang(2023)需满足以下条件

$$\lambda_r^2 \geq 2\sigma_r^2, \quad (5.1.11)$$

综上可得, 测度变换定义良好需满足如下条件

$$|\bar{\lambda}| < \frac{\zeta_v}{\sigma_v}, \quad (5.1.12)$$

$$\sigma_v^2 \leq 2\zeta_v\eta_v - 2|\sigma_v\rho b|, \quad (5.1.13)$$

$$2\sigma_r^2 \leq \lambda_r^2 \leq \zeta_r^2. \quad (5.1.14)$$

根据Girsanovs定理, 可得在 \mathbb{Q} 下的布朗运动 W_t 、 $W_{r,t}$ 、 $W_{v,t}$ 及泊松过程 N_t , 即

$$dW_t = dW_t^{\mathbb{P}} + \bar{\lambda}\sqrt{v_t}dt, \quad dW_{r,t} = dW_{r,t}^{\mathbb{P}} + \frac{\lambda_r}{\sigma_r}\sqrt{r_t}dt, \quad dN_t = dN_t^{\mathbb{P}} - \lambda dt.$$

从而, 在 \mathbb{Q} 测度下标的资产价格、波动率及利率分别满足如下方程:

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} = (r_t + \bar{\lambda}(av_t + b) + \lambda_r\eta_r - \lambda\kappa)dt + (a\sqrt{v_t} + \frac{b}{\sqrt{v_t}})dW_t \\ \quad + \eta\sigma_r\sqrt{r_t}dW_{r,t} + (e^{\xi} - 1)dN_t, \\ dv_t = \alpha_v(\theta_v - v_t)dt + \sigma_v\sqrt{v_t}dW_{v,t}, \\ dr_t = \alpha_r(\theta_r - r_t)dt + \sigma_r\sqrt{r_t}dW_{r,t}, \end{cases} \quad (5.1.15)$$

其中, $\kappa = \mathbb{E}[e^{\xi} - 1] = \frac{p\eta_1}{\eta_1 - 1} + \frac{q\eta_2}{\eta_2 + 1} - 1$, $\alpha_v = \zeta_v + \sigma_v\lambda_v$, $\theta_v = \frac{\zeta_v\eta_v}{\zeta_v + \sigma_v\lambda}$, $\alpha_r = \zeta_r + \sigma_r\lambda_r$, $\theta_r = \frac{\zeta_r\eta_r}{\zeta_r + \lambda_r}$. 此外, $2\alpha_v\theta_v = 2\frac{\zeta_v\eta_v}{\zeta_v + \sigma_v\lambda}(\zeta_v + \sigma_v\bar{\lambda}) = 2\zeta_v\eta_v \geq \sigma_v^2$, $2\alpha_r\theta_r = 2\frac{\zeta_r\eta_r}{\zeta_r + \lambda_r}(\zeta_r + \lambda_r) = 2\zeta_r\eta_r \geq \sigma_r^2$, 即在 \mathbb{Q} 测度下满足Feller条件.

5.2 4/2-CIR跳扩散随机混合模型欧式期权定价

5.2.1 基于4/2-CIR跳扩散随机混合模型的对数资产价格特征函数

为获得4/2-CIR跳扩散随机混合模型下的欧式期权定价公式, 本小节根据Itô引理、双指数跳扩散过程的基本理论及CIR过程的基本性质等获得该模型下标的对数资产价格的特征函数, 详见定理5.1.

定理 5.1 假定在完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}, \mathbb{Q})$ 中, $u \in \mathbb{R}$, $Y_t = \ln S_t$, 期权

标的资产价格满足(5.1.15)式, 则其条件特征函数如下

$$\begin{aligned}
\Phi_{t,T}(u) &= \mathbb{E}[\exp(iuY_T) | \mathcal{F}_t] \\
&= \exp \left\{ -r_t \frac{(\alpha_r \varphi - 2D)(e^{\sqrt{h_r} \tau} - 1) - \varphi \sqrt{h_r} (e^{\sqrt{h_r} \tau} + 1)}{(\sigma_r^2 \varphi + \alpha_r)(e^{\sqrt{h_r} \tau} - 1) + \sqrt{h_r} (e^{\sqrt{h_r} \tau} + 1)} - \frac{iua\rho}{\sigma_v} v_t \right\} \\
&\quad \times \exp \left\{ \left[iuY_t + iu(\bar{\lambda}b - ab + iuab(1 - \rho^2) - \lambda \kappa) \tau \right] - \frac{iub\rho}{\sigma_v} \ln v_t \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{iub\rho\alpha_v}{\sigma_v} - \frac{iua\rho\alpha_v\theta_v}{\sigma_v} - iu\eta\alpha_r\theta_r \right) \tau - iu\eta r_t \right\} \left(\frac{f(\tau, v_t)}{2} \right)^{1+g} \\
&\quad \times (\psi + H(\tau))^{-\left(\frac{1}{2} + \frac{g}{2} - v + \frac{\alpha_v\theta_v}{\sigma_v^2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{g}{2} - v + \frac{\alpha_v\theta_v}{\sigma_v^2}\right)}{\Gamma(1+g)} v_t^{-\frac{\alpha_v\theta_v}{\sigma_v^2}} \\
&\quad \times \exp \left\{ \frac{1}{\sigma_v^2} \left(\alpha_v^2 \theta_v \tau - \sqrt{h} v_t \coth \left(\frac{\sqrt{h} \tau}{2} \right) + \alpha_v v_t \right) \right\} \\
&\quad \times {}_1F_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{g}{2} - v + \frac{\alpha_v\theta_v}{\sigma_v^2}, 1+g, \frac{f^2(\tau, v_t)}{4(\psi + H(\tau))} \right) \\
&\quad \times \left(\frac{(\sigma_r^2 \varphi + \alpha_r)(e^{\sqrt{h_r} \tau} - 1) + \sqrt{h_r} (e^{\sqrt{h_r} \tau} + 1)}{2\sqrt{h_r} e^{\frac{\sqrt{h_r} + \alpha_r}{2} \tau}} \right)^{-\frac{2\alpha_r\theta_r}{\sigma_r^2}} \\
&\quad \times \exp \left\{ \lambda(T-t) \left(\frac{p\eta_1}{\eta_1 - iu} + \frac{q\eta_2}{\eta_2 + iu} - 1 \right) \right\}, \tag{5.2.1}
\end{aligned}$$

其中, ${}_1F_1$ 为合流超几何函数, 且

$$\begin{aligned}
A &= -iu \left(a\bar{\lambda} - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}iu(1 - \rho^2)a^2 + \frac{1}{\sigma_v}a\rho\alpha_v \right), \\
B &= -iu \left(\frac{1}{2}iu(1 - \rho^2)b^2 - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}b\rho\sigma_v - \frac{1}{\sigma_v}b\rho\alpha_v\theta_v \right), \\
D &= -iu \left(1 - \frac{1}{2}\eta^2\sigma_r^2 + \eta\lambda_r + \eta\alpha_r \right), \quad h_r = \alpha_r^2 + 2D\sigma_r^2, \\
H(\tau) &= \frac{1}{\sigma_v^2} \left(\sqrt{h} \coth h \left(\frac{\sqrt{h} \tau}{2} \right) + \alpha_v \right), \quad h = \alpha_v^2 + 2A\sigma_v^2, \\
f(\tau, v_t) &= \frac{2\sqrt{h}v_t}{\sigma_v^2 \sinh\left(\frac{\sqrt{h}\tau}{2}\right)}, \quad g = \frac{1}{\sigma_v^2} \sqrt{(2\alpha_v\theta_v - \sigma_v^2)^2 + 8\sigma_v^2 B}, \\
v &= -\frac{iub\rho}{\sigma_v}, \quad \psi = -\frac{iua\rho}{\sigma_v}, \quad \varphi = -iu\eta, \quad \tau = T - t.
\end{aligned}$$

证明 令 $Y_t = \ln S_t$, 根据Itô引理可得

$$dY_t = \left[r_t - \bar{\lambda}(av_t + b) + r_t\lambda_r\eta - \frac{1}{2} \left(a\sqrt{v_t} + \frac{b}{\sqrt{v_t}} \right)^2 - \frac{1}{2}\eta^2\sigma_r^2 r_t - \lambda \kappa \right] dt \tag{5.2.2}$$

$$+ \eta \sigma_r \sqrt{r_t} dW_{r,t} + \left(a\sqrt{v_t} + \frac{b}{\sqrt{v_t}} \right) dW_t + \xi dN_t, \quad (5.2.3)$$

则

$$\begin{aligned} Y_T = & \int_t^T \left[r_s - \bar{\lambda} (av_s + b) - \frac{1}{2} \left(a\sqrt{v_s} + \frac{b}{\sqrt{v_s}} \right)^2 + r_s \lambda_r \eta - \frac{1}{2} r_s \eta^2 \sigma_r^2 - \lambda \kappa \right] ds \\ & + Y_t + \int_t^T \left(a\sqrt{v_s} + \frac{b}{\sqrt{v_s}} \right) dW_s + \int_t^T \eta \sigma_r \sqrt{r_s} dW_{r,s} + \sum_{j=1}^{N_t} \xi_j. \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

令 $u \in \mathbb{R}$, 则对数资产价格的条件特征函数 $\Phi_{t,T}(u) := \mathbb{E}[\exp(iuY_T) | \mathcal{F}_t]$ 如下

$$\begin{aligned} \Phi_{t,T}(u) = & \mathbb{E} \left[\exp \left\{ iu \left[Y_t + \int_t^T r_s ds + \int_t^T \bar{\lambda} av_s ds + \int_t^T \bar{\lambda} b ds + \int_t^T \lambda_r \eta r_s ds \right. \right. \right. \\ & - \frac{1}{2} a^2 \int_t^T v_s ds - \frac{1}{2} b^2 \int_t^T \frac{1}{v_s} ds - ab \int_t^T ds - \frac{1}{2} \int_t^T \eta^2 \sigma_r^2 r_s ds \\ & - \lambda \kappa \int_t^T ds + \int_t^T \left(a\sqrt{v_s} + \frac{b}{\sqrt{v_s}} \right) dW_s + \int_t^T \eta \sigma_r \sqrt{r_s} dW_{r,s} \\ & \left. \left. \left. + \sum_{j=1}^{N_t} \xi_j \right] \right\} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ = & \mathbb{E} \left[\exp \left\{ iu \left[Y_t + \int_t^T \left(1 - \frac{1}{2} \eta^2 \sigma_r^2 + \eta \lambda_r \right) r_s ds + a \bar{\lambda} \int_t^T v_s ds \right. \right. \right. \\ & - \frac{1}{2} a^2 \int_t^T v_s ds + (\bar{\lambda} b - ab - \lambda \kappa)(T-t) - \frac{1}{2} b^2 \int_t^T \frac{1}{v_s} ds \\ & \left. \left. \left. + a \int_t^T \sqrt{v_s} dW_s + b \int_t^T \frac{1}{\sqrt{v_s}} dW_s + \eta \int_t^T \sigma_r \sqrt{r_s} dW_{r,s} + \sum_{j=1}^{N_t} \xi_j \right] \right\} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ = & \mathbb{E} \left[\exp \left\{ iu \left[Y_t + (\bar{\lambda} b - ab - \lambda \kappa)(T-t) \right] + iua \bar{\lambda} \int_t^T v_s ds \right. \right. \\ & + iu \int_t^T \left(1 - \frac{1}{2} \eta^2 \sigma_r^2 + \eta \lambda_r \right) r_s ds - iu \frac{1}{2} a^2 \int_t^T v_s ds - iu \frac{1}{2} b^2 \int_t^T \frac{1}{v_s} ds \\ & \left. \left. \left. + iu \int_t^T \left(a\sqrt{v_s} + \frac{b}{\sqrt{v_s}} \right) dW_s + iu \eta \int_t^T \sigma_r \sqrt{r_s} dW_{r,s} + iu \sum_{j=1}^{N_t} \xi_j \right] \right\} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ = & \mathbb{E} \left[\exp \left\{ \left(iu Y_t + [iu \bar{\lambda} b - iuab - iu \lambda \kappa + (iu)^2 (1 - \rho^2) ab] (T-t) \right) \right. \right. \\ & + iu \sum_{j=1}^{N_t} \xi_j + iu \int_t^T \left(1 - \frac{1}{2} \eta^2 \sigma_r^2 + \eta \lambda_r \right) r_s ds + iu \eta \int_t^T \sigma_r \sqrt{r_s} dW_{r,s} \\ & + iu b \rho \int_t^T \frac{1}{\sqrt{v_s}} dW_{v,s} + iua \bar{\lambda} \int_t^T v_s ds + \frac{1}{2} (iu)^2 (1 - \rho^2) a^2 \int_t^T v_s ds \\ & - \frac{iu a^2}{2} \int_t^T v_s ds - \frac{iub^2}{2} \int_t^T \frac{1}{v_s} ds + iua \rho \int_t^T \sqrt{v_s} dW_{v,s} \\ & \left. \left. \left. + \frac{1}{2} (iu)^2 (1 - \rho^2) b^2 \int_t^T \frac{1}{v_s} ds \right\} \middle| \mathcal{F}_t \right] \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

根据 v_t 和 r_t 满足的CIR过程可得

$$\begin{aligned}\int_t^T \sqrt{v_s} dW_{v,s} &= \frac{1}{\sigma_v} (v_T - v_t) - \frac{\alpha_v \theta_v}{\sigma_v} (T - t) + \frac{\alpha_v}{\sigma_v} \int_t^T v_s ds, \\ \int_t^T \frac{1}{\sqrt{v_s}} dW_{v,s} &= \frac{1}{\sigma_v} (\ln v_T - \ln v_t) - \frac{\alpha_v \theta_v}{\sigma_v} \int_t^T \frac{1}{v_s} ds + \frac{\sigma_v}{2} \int_t^T \frac{1}{v_s} ds + \frac{\alpha_v}{\sigma_v} (T - t), \\ \int_t^T \sqrt{r_s} dW_{r,s} &= \frac{1}{\sigma_r} (r_T - r_t) - \frac{\alpha_r \theta_r}{\sigma_r} (T - t) + \frac{\alpha_r}{\sigma_r} \int_t^T r_s ds,\end{aligned}$$

则特征函数 $\Phi_{t,T}(u)$ 整理如下

$$\begin{aligned}\Phi_{t,T}(u) &= \mathbb{E} \left[\exp \left\{ \left[iuY_t + iu(\bar{\lambda}b - ab + iuab(1 - \rho^2) - \lambda \kappa)(T - t) \right] \right. \right. \\ &\quad + \left(\frac{iub\rho\alpha_v}{\sigma_v} - \frac{iua\rho\alpha_v\theta_v}{\sigma_v} - iu\eta\alpha_r\theta_r \right) (T - t) + iu\eta(r_T - r_t) \\ &\quad + \int_t^T \left(-\frac{1}{2}u^2(1 - \rho^2)b^2 - \frac{1}{2}iub^2 + \frac{1}{2}iub\rho\sigma_v - \frac{1}{\sigma_v}iub\rho\alpha_v\theta_v \right) \frac{1}{v_s} ds \\ &\quad + \int_t^T \left(iua\bar{\lambda} - \frac{1}{2}iua^2 + \frac{1}{2}(iu)^2(1 - \rho^2)a^2 + \frac{1}{\sigma_v}iua\rho\alpha_v \right) v_s ds \\ &\quad + iu \int_t^T \left(1 - \frac{1}{2}\eta^2\sigma_r^2 + \eta\lambda_r + \eta\alpha_r \right) r_s ds + iu \sum_{j=1}^{N_t} \xi_j \\ &\quad \left. + \frac{iua\rho}{\sigma_v}(v_T - v_t) + \frac{iub\rho}{\sigma_v} \ln \frac{v_T}{v_t} \right\} \Big| \mathcal{F}_t \Big] \\ &= \mathbb{E} \left[\exp \left\{ \left[iuY_t + iu(\bar{\lambda}b - ab + iuab(1 - \rho^2) - \lambda \kappa)(T - t) \right] \right. \right. \\ &\quad + \frac{iub\rho\alpha_v}{\sigma_v}(T - t) - \frac{iua\rho\alpha_v\theta_v}{\sigma_v}(T - t) - iu\eta\alpha_r\theta_r(T - t) - iu\eta r_t \\ &\quad + \int_t^T \left(iua\bar{\lambda} - \frac{1}{2}iua^2 + \frac{1}{2}(iu)^2(1 - \rho^2)a^2 + \frac{1}{\sigma_v}iua\rho\alpha_v \right) v_s ds \\ &\quad + \int_t^T \left(\frac{1}{2}(iu)^2(1 - \rho^2)b^2 - \frac{1}{2}iub^2 + \frac{1}{2}iub\rho\sigma_v - \frac{1}{\sigma_v}iub\rho\alpha_v\theta_v \right) \frac{1}{v_s} ds \\ &\quad + iu\eta r_T + iu \int_t^T \left(1 - \frac{1}{2}\eta^2\sigma_r^2 + \eta\lambda_r + \eta\alpha_r \right) r_s ds + iu \sum_{j=1}^{N_t} \xi_j \\ &\quad \left. - \frac{iua\rho}{\sigma_v}v_t - \frac{iub\rho}{\sigma_v} \ln v_t + \frac{iua\rho}{\sigma_v}v_T + \frac{iub\rho}{\sigma_v} \ln v_T \right\} \Big| \mathcal{F}_t \Big] \\ &= \exp \left\{ \left[iuY_t + iu(\bar{\lambda}b - ab + iuab(1 - \rho^2) - \lambda \kappa)(T - t) \right] - \frac{iua\rho}{\sigma_v}v_t \right. \\ &\quad \left. + \frac{iua\rho\alpha_v(b - a\theta_v)}{\sigma_v}(T - t) - iu\eta\alpha_r\theta_r(T - t) - iu\eta r_t - \frac{iub\rho}{\sigma_v} \ln v_t \right\} \\ &\quad \times \mathbb{E} \left[v_T^{-v} \exp \left\{ -\psi v_T - \int_t^T A v_s ds - \int_t^T B \frac{1}{v_s} ds \right\} \right] \\ &\quad \times \mathbb{E} \left[\exp \left\{ -\phi r_T - \int_t^T D r_s ds \right\} \right] \times \mathbb{E} \left\{ \exp \left(iu \sum_{j=1}^{N_t} \xi_j \right) \right\}, \quad (5.2.6)\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} A &= -iu \left(a\bar{\lambda} - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}iu(1-\rho^2)a^2 + \frac{1}{\sigma_v}a\rho\alpha_v \right), \\ B &= -iu \left(\frac{1}{2}iu(1-\rho^2)b^2 - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}b\rho\sigma_v - \frac{1}{\sigma_v}b\rho\alpha_v\theta_v \right) \\ D &= -iu \left(1 - \frac{1}{2}\eta^2\sigma_r^2 + \eta\lambda_r + \eta\alpha_r \right), \\ v &= -\frac{iub\rho}{\sigma_v}, \psi = -\frac{iua\rho}{\sigma_v}, \varphi = -iu\eta. \end{aligned}$$

若

$$\begin{aligned} A &> -\frac{1}{2\sigma_v^2}\alpha_v^2, \\ B &\geq -\frac{1}{8\sigma_v^2}(2\alpha_v\theta_v - \sigma_v^2)^2, \\ \psi &\geq -\frac{1}{\sigma_v^2} \left(\sqrt{\alpha_v^2 + 2A\sigma_v^2} + \alpha_v \right), \\ v &< \frac{1}{2\sigma_v^2} \left(2\alpha_v\theta_v + \sigma_v^2 + \sqrt{(2\alpha_v\theta_v)^2 + 8\sigma_v^2B} \right), \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[v_T^{-v} \exp \left\{ -\psi v_T - \int_t^T A v_s ds - \int_t^T B \frac{1}{v_s} ds \right\} \right] \\ &= \left(\frac{f(\tau, v_t)}{2} \right)^{1+g} (\psi + H(\tau))^{-\left(\frac{1}{2} + \frac{g}{2} - v + \frac{\alpha_v\theta_v}{\sigma_v^2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{g}{2} - v + \frac{\alpha_v\theta_v}{\sigma_v^2}\right)}{\Gamma(1+g)} \\ &\quad \times \exp \left\{ \frac{1}{\sigma_v^2} \left(\alpha_v^2\theta_v\tau - \sqrt{h}v_t \coth \left(\frac{\sqrt{h}\tau}{2} \right) + \alpha_v v_t \right) \right\} v_t^{-\frac{\alpha_v\theta_v}{\sigma_v^2}} \\ &\quad \times {}_1F_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{g}{2} - v + \frac{\alpha_v\theta_v}{\sigma_v^2}, 1+g, \frac{f^2(\tau, v_t)}{4(\psi + H(\tau))} \right), \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

其中, ${}_1F_1$ 为合流超几何函数, 且

$$\begin{aligned} H(\tau) &= \frac{1}{\sigma_v^2} \left(\sqrt{h} \coth \left(\frac{\sqrt{h}\tau}{2} \right) + \alpha_v \right), \quad g = \frac{1}{\sigma_v^2} \sqrt{(2\alpha_v\theta_v - \sigma_v^2)^2 + 8\sigma_v^2B}, \\ f(\tau, v_t) &= \frac{2\sqrt{h}v_t}{\sigma_v^2 \sinh\left(\frac{\sqrt{h}\tau}{2}\right)}, \quad h = \alpha_v^2 + 2A\sigma_v^2, \quad \tau = T - t. \end{aligned}$$

若

$$D > -\frac{\alpha_r^2}{2\sigma_r^2},$$

$$\varphi \geq -\frac{\sqrt{\alpha_r^2 + 2D\sigma_r^2} + \alpha_r}{\sigma_r^2},$$

则

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\exp \left\{ -\varphi r_T - \int_t^T D r_s ds \right\} \right] \\ &= \left(\frac{(\sigma_r^2 \varphi + \alpha_r)(e^{\sqrt{h_r} \tau} - 1) + \sqrt{h_r}(e^{\sqrt{h_r} \tau} + 1)}{2\sqrt{h_r} e^{\frac{\sqrt{h_r} + \alpha_r}{2} \tau}} \right)^{-\frac{2\alpha_r \theta_r}{\sigma_r^2}} \\ & \quad \times \exp \left\{ -r_t \frac{(\alpha_r \varphi - 2D)(e^{\sqrt{h_r} \tau} - 1) - \varphi \sqrt{h_r}(e^{\sqrt{h_r} \tau} + 1)}{(\sigma_r^2 \varphi + \alpha_r)(e^{\sqrt{h_r} \tau} - 1) + \sqrt{h_r}(e^{\sqrt{h_r} \tau} + 1)} \right\}, \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

其中, $h_r = \alpha_r^2 + 2D\sigma_r^2$, $\tau = T - t$.

根据双指数过程可得

$$\mathbb{E} \left\{ \exp \left(iu \sum_{j=1}^{N_t} \xi_j \right) \right\} = \exp \left\{ \lambda(T-t) \left(\frac{p\eta_1}{\eta_1 - iu} + \frac{q\eta_2}{\eta_2 + iu} - 1 \right) \right\}. \quad (5.2.9)$$

进而可得

$$\begin{aligned} \Phi_{t,T}(u) &= \exp \left\{ \left[iuY_t + iu(\bar{\lambda}b - ab + iuab(1 - \rho^2) - \lambda\kappa)\tau \right] - \frac{iua\rho}{\sigma_v} v_t \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{iub\rho\alpha_v}{\sigma_v} - \frac{iua\rho\alpha_v\theta_v}{\sigma_v} - iu\eta\alpha_r\theta_r \right) \tau - iu\eta r_t - \frac{iub\rho}{\sigma_v} \ln v_t \right\} \\ & \quad \times \exp \left\{ \frac{1}{\sigma_v^2} \left(\alpha_v^2 \theta_v \tau - \sqrt{h_v} v_t \coth \left(\frac{\sqrt{h_v} \tau}{2} \right) + \alpha_v v_t \right) \right\} v_t^{-\frac{\alpha_v \theta_v}{\sigma_v^2}} \\ & \quad \times (\psi + H(\tau))^{-\left(\frac{1}{2} + \frac{g}{2} - v + \frac{\alpha_v \theta_v}{\sigma_v^2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{g}{2} - v + \frac{\alpha_v \theta_v}{\sigma_v^2}\right)}{\Gamma(1+g)} \\ & \quad \times \exp \left\{ -r_t \frac{(\alpha_r \varphi - 2D)(e^{\sqrt{h_r} \tau} - 1) - \varphi \sqrt{h_r}(e^{\sqrt{h_r} \tau} + 1)}{(\sigma_r^2 \varphi + \alpha_r)(e^{\sqrt{h_r} \tau} - 1) + \sqrt{h_r}(e^{\sqrt{h_r} \tau} + 1)} \right\} \\ & \quad \times \left(\frac{(\sigma_r^2 \varphi + \alpha_r)(e^{\sqrt{h_r} \tau} - 1) + \sqrt{h_r}(e^{\sqrt{h_r} \tau} + 1)}{2\sqrt{h_r} e^{\frac{\sqrt{h_r} + \alpha_r}{2} \tau}} \right)^{-\frac{2\alpha_r \theta_r}{\sigma_r^2}} \\ & \quad \times \exp \left\{ \lambda \tau \left(\frac{p\eta_1}{\eta_1 - iu} + \frac{q\eta_2}{\eta_2 + iu} - 1 \right) \right\} \left(\frac{f(\tau, v_t)}{2} \right)^{1+g} \\ & \quad \times {}_1F_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{g}{2} - v + \frac{\alpha_v \theta_v}{\sigma_v^2}, 1+g, \frac{f^2(\tau, v_t)}{4(\psi + H(\tau))} \right). \end{aligned}$$

证毕.

推论 5.1 当 $a = 1$, $b = 0$ 时, 4/2-CIR跳扩散随机混合模型退化为Heston-CIR跳

扩散随机混合模型, 对应的特征函数如下

$$\begin{aligned}
\Phi_{t,T}(u) &= \mathbb{E}[\exp(iuY_T) | \mathcal{F}_t] \\
&= \exp \left\{ -r_t \frac{(\alpha_r \varphi - 2D)(e^{\sqrt{h_r} \tau} - 1) - \varphi \sqrt{h_r} (e^{\sqrt{h_r} \tau} + 1)}{(\sigma_r^2 \varphi + \alpha_r)(e^{\sqrt{h_r} \tau} - 1) + \sqrt{h_r} (e^{\sqrt{h_r} \tau} + 1)} \right\} \\
&\quad \times \exp \left\{ iuY_t - iu\lambda \kappa \tau - \frac{iu\rho}{\sigma_v} v_t - \left(\frac{iu\rho \alpha_v \theta_v}{\sigma_v} + iu\eta \alpha_r \theta_r \right) \tau - iu\eta r_t \right\} \\
&\quad \times \left(\frac{(\sigma_r^2 \varphi + \alpha_r)(e^{\sqrt{h_r} \tau} - 1) + \sqrt{h_r} (e^{\sqrt{h_r} \tau} + 1)}{2\sqrt{h_r} e^{\frac{\sqrt{h_r} + \alpha_r}{2} \tau}} \right)^{-\frac{2\alpha_r \theta_r}{\sigma_r^2}} \\
&\quad \times \left(\frac{(\sigma_v^2 \psi + \alpha_v)(e^{\sqrt{h} \tau} - 1) + \sqrt{h} (e^{\sqrt{h} \tau} + 1)}{2\sqrt{h} e^{\frac{\sqrt{h} + \alpha_v}{2} \tau}} \right)^{-\frac{2\alpha_v \theta_v}{\sigma_v^2}} \\
&\quad \times \exp \left\{ -v_t \frac{(\alpha_v \psi - 2A)(e^{\sqrt{h} \tau} - 1) - \psi \sqrt{h} (e^{\sqrt{h} \tau} + 1)}{(\sigma_v^2 \psi + \alpha_v)(e^{\sqrt{h} \tau} - 1) + \sqrt{h} (e^{\sqrt{h} \tau} + 1)} \right\} \\
&\quad \times \exp \left\{ \lambda \tau \left(\frac{p\eta_1}{\eta_1 - iu} + \frac{q\eta_2}{\eta_2 + iu} - 1 \right) \right\}. \tag{5.2.10}
\end{aligned}$$

其中, $A, D, \varphi, \psi, h, h_r, \tau$ 的表达式详见定理5.1.

推论 5.2 当 $a = 0, b = 1$ 时, 4/2-CIR跳扩散随机混合模型简化为3/2-CIR跳扩散随机混合模型, 对应的特征函数如下

$$\begin{aligned}
\Phi_{t,T}(u) &= \mathbb{E}[\exp(iuY_T) | \mathcal{F}_t] \\
&= \exp \left\{ -r_t \frac{(\alpha_r \varphi - 2D)(e^{\sqrt{h_r} \tau} - 1) - \varphi \sqrt{h_r} (e^{\sqrt{h_r} \tau} + 1)}{(\sigma_r^2 \varphi + \alpha_r)(e^{\sqrt{h_r} \tau} - 1) + \sqrt{h_r} (e^{\sqrt{h_r} \tau} + 1)} \right\} \\
&\quad \times \exp \left\{ iuY_t + iu \left(\bar{\lambda} - \lambda \kappa + \frac{\rho \alpha_v}{\sigma_v} - \eta \alpha_r \theta_r \right) \tau - \frac{iu\rho}{\sigma_v} \ln v_t - iu\eta r_t \right\} \\
&\quad \times \left(\frac{(\sigma_r^2 \varphi + \alpha_r)(e^{\sqrt{h_r} \tau} - 1) + \sqrt{h_r} (e^{\sqrt{h_r} \tau} + 1)}{2\sqrt{h_r} e^{\frac{\sqrt{h_r} + \alpha_r}{2} \tau}} \right)^{-\frac{2\alpha_r \theta_r}{\sigma_r^2}} \left(\frac{e^{\alpha_v \tau}}{v_t} \right)^v \\
&\quad \times \left(\frac{2\alpha_v v_t}{\sigma_v^2 (e^{\alpha_v \tau} - 1)} \right)^{\frac{1}{2} + \frac{g}{2} - v + \frac{\alpha_v \theta_v}{\sigma_v^2}} \frac{\Gamma \left(\frac{1}{2} + \frac{g}{2} - v + \frac{\alpha_v \theta_v}{\sigma_v^2} \right)}{\Gamma(1 + g)} \\
&\quad \times {}_1F_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{g}{2} - v + \frac{\alpha_v \theta_v}{\sigma_v^2}, 1 + g, \frac{2\alpha_v v_t}{\sigma_v^2 (e^{\alpha_v \tau} - 1)} \right) \\
&\quad \times e^{-\frac{2\alpha_v v_t}{\sigma_v^2 (e^{\alpha_v \tau} - 1)}} \exp \left\{ \lambda \tau \left(\frac{p\eta_1}{\eta_1 - iu} + \frac{q\eta_2}{\eta_2 + iu} - 1 \right) \right\}. \tag{5.2.11}
\end{aligned}$$

其中, $B, D, \varphi, v, g, h_r, \tau$ 的表达式详见定理5.1.

推论 5.3 当 $\eta = 0$, 且 $a, b \neq 0$ 时, 4/2-CIR跳扩散随机混合模型退化为4/2跳扩

散混合模型, 对应的特征函数如下

$$\begin{aligned}
 \Phi_{t,T}(u) = & \exp \left\{ \left[iuY_t + iu(\bar{\lambda}b - ab + iuab(1 - \rho^2) - \lambda \kappa)\tau \right] - \frac{iua\rho}{\sigma_v} v_t \right. \\
 & \left. + \left(\frac{iub\rho\alpha_v}{\sigma_v} - \frac{iua\rho\alpha_v\theta_v}{\sigma_v} \right) \tau + iur_t\tau - \frac{iub\rho}{\sigma_v} \ln v_t \right\} v_t^{-\frac{\alpha_v\theta_v}{\sigma_v^2}} \\
 & \times (\psi + H(\tau))^{-\left(\frac{1}{2} + \frac{g}{2} - v + \frac{\alpha_v\theta_v}{\sigma_v^2}\right)} \left(\frac{f(\tau, v_t)}{2} \right)^{1+g} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{g}{2} - v + \frac{\alpha_v\theta_v}{\sigma_v^2}\right)}{\Gamma(1+g)} \\
 & \times \exp \left\{ \frac{1}{\sigma_v^2} \left(\alpha_v^2\theta_v\tau - \sqrt{h}v_t \coth\left(\frac{\sqrt{h}\tau}{2}\right) + \alpha_v v_t \right) \right\} \\
 & \times {}_1F_1\left(\frac{1}{2} + \frac{g}{2} - v + \frac{\alpha_v\theta_v}{\sigma_v^2}, 1+g, \frac{f^2(\tau, v_t)}{4(\psi + H(\tau))}\right) \\
 & \times \exp \left\{ \lambda(T-t) \left(\frac{p\eta_1}{\eta_1 - iu} + \frac{q\eta_2}{\eta_2 + iu} - 1 \right) \right\}. \tag{5.2.12}
 \end{aligned}$$

其中, $A, B, \psi, v, g, h, \tau, f(\tau, v_t), H(\tau)$ 的表达式详见定理5.1.

5.2.2 基于4/2-CIR跳扩散随机混合模型的欧式期权定价公式

定理 5.2 假定在完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}, \mathbb{Q})$ 中, 标的资产价格满足(5.1.15)式, 则到期时间为 T , 执行价格为 K 的欧式看涨期权定价公式如下

$$C(S_0, T, K) = S_0 - \frac{Ke^{-rT}}{2\pi} \int_{-iz_2 - \infty}^{iz_2 + \infty} \Phi(-z) \frac{e^{-izk}}{z^2 - iz} dz, \quad 0 < \text{Im}(z) < 1, \tag{5.2.13}$$

其中, $k = \ln \frac{S_0}{K} + e^{\int_0^T r_s ds}$, $z = z_1 + iz_2$, 且 $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$.

特别地, 当 $z_2 = \frac{1}{2}$ 时

$$C(S_0, T, K) = S_0 - \frac{\sqrt{S_0 K} e^{-\frac{1}{2}rT}}{\pi} \int_0^\infty \text{Re} \left[\Phi\left(z_1 - \frac{1}{2}i\right) e^{iz_1 k} \right] \frac{1}{z_1^2 + \frac{1}{4}} dz_1, \tag{5.2.14}$$

$\Phi(\cdot)$ 表示特征函数, $\text{Re}[\cdot]$ 表示取实部.

证明过程同定理3.2及定理4.2, 故此处省略.

5.3 4/2-CIR跳扩散随机混合模型欧式期权定价实证分析

为检验文中构建模型在欧式期权定价问题中的可靠性和有效性, 本节基于4/2-CIR跳扩散随机混合模型、4/2跳扩散随机混合模型及4/2-CIR随机混合模型进行实证分析. 首先, 基于上证50ETF期权市场数据, 利用粒子群优化算法估计

定价模型中的未知参数. 其次, 根据模型参数值及定理3.2、定理4.2及定理5.2计算4/2-CIR随机混合模型、4/2跳扩散随机混合模型及4/2-CIR跳扩散随机混合模型下的期权价格, 并将计算结果与真实值进行比较, 探究各模型能否对期权进行有效定价. 最后, 根据均方根误差和平均百分比误差评估模型的定价精度.

5.3.1 4/2-CIR跳扩散随机混合模型参数估计

为检验模型的定价及预测能力, 本小节简要介绍实证分析数据的选取及模型参数估计基本内容. 在实证分析过程中, 以2024年2月8日上证50ETF期权的定价结果分析模型在样本内的定价表现, 以2024年2月19日上证50ETF期权定价结果分析模型在样本外的定价表现. 本章所选样本内外期权合约的到期日分别为: 2024年2月28日、2024年3月27日、2024年6月26日、2024年9月25日; 执行价格分别为: 2.05、2.1、2.15、2.2、2.25、2.3、2.35、2.4、2.45、2.5、2.55、2.6; 2024年2月8日上证50ETF期权标的资产价格初始值 $S_0 = 1.049$; 2024年2月19日上证50ETF期权标的资产价格初始值 $S_0 = 1.054$. (数据来源: Wind 数据库)

基于第三、四章参数估计方法, 本章运用粒子群优化算法, 通过最小化均方误差获得模型参数估计值. 参数估计结果如表5.1及其续表5.1.

表5.1 参数估计值

模型	β	a	α_v	θ_v	σ_v	$\bar{\lambda}$	ρ	λ
4/2-CIR-Jump	-	0.7539	0.9382	0.4621	0.5698	0.8472	-0.6271	0.6283
LMRJ-4/2-SV	3.9784	0.8297	0.8673	0.6649	0.7021	-	-	0.7369
4/2-CIR	-	0.9351	0.7264	0.5738	0.6573	-	-0.9318	-

续表5.1 参数估计值

模型	p	η_1	η_2	α_r	θ_r	σ_r	η
4/2-CIR-Jump	0.7293	1.8523	0.4109	0.8346	0.5945	0.7258	0.3427
LMRJ-4/2-SV	0.6642	1.0439	0.8563	-	-	-	-
4/2-CIR	-	-	-	0.6397	0.5908	0.8642	-

5.3.2 4/2-CIR跳扩散随机混合模型定价结果分析

为检验本文所构建模型在期权定价应用中的可靠性, 本小节基于4/2-CIR跳扩散随机混合模型、4/2跳扩散随机混合模型及4/2-CIR随机混合模型下的欧式期权定价公式计算2024年2月8日上证50ETF期权价格, 并将各模型所得结果与实证真实值进行比较. 图5.1-图5.4分别给出了2024年2月8日上证50ETF期权市场价格, 基

于4/2-CIR跳扩散随机混合模型、4/2跳扩散随机混合模型及4/2-CIR随机混合模型所得期权价格的三维图。

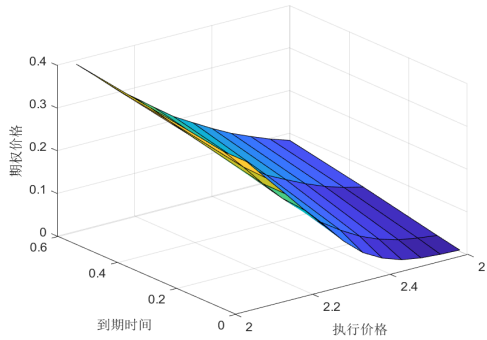


图5.1 市场价格

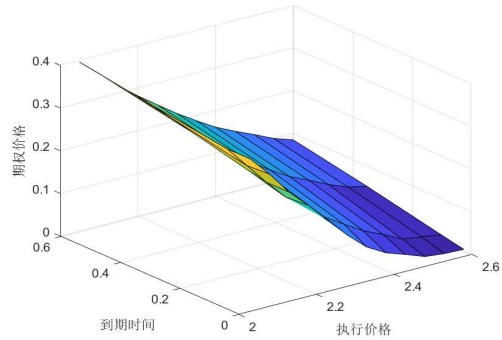


图5.2 4/2-CIR跳扩散随机混合模型定价结果

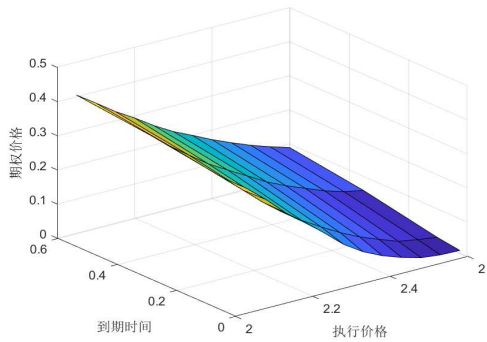


图5.3 4/2跳扩散随机混合模型定价结果

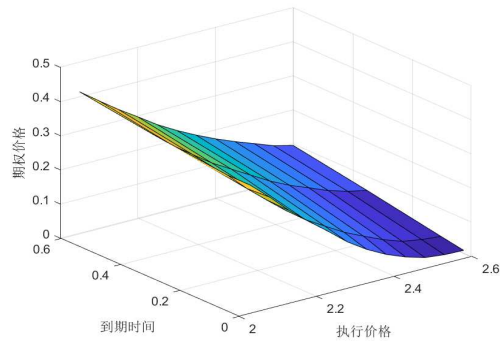


图5.4 4/2-CIR随机混合模型定价结果

由图5.1-图5.4可得, 基于4/2-CIR跳扩散随机混合模型、4/2跳扩散随机混合模型及4/2-CIR随机混合模型所得期权价格与市场价格趋势一致. 说明本文所构建4/2-CIR跳扩散随机混合模型、4/2-CIR随机混合模型及4/2跳扩散随机混合模型在期权定价问题的研究中均具有一定的合理和有效性. 但图5.1-图5.4三维图仅能看出模型定价结果与真实市场价格的趋势, 并不能清晰获得各模型定价结果与真实值之间的差距, 也不能获得各模型之间的定价差异. 因此, 为直观感知模型定价结果与真实值之间的差异, 下面根据到期期限的不同, 将模型定价结果与市场真实值的价格走势绘于图5.5.

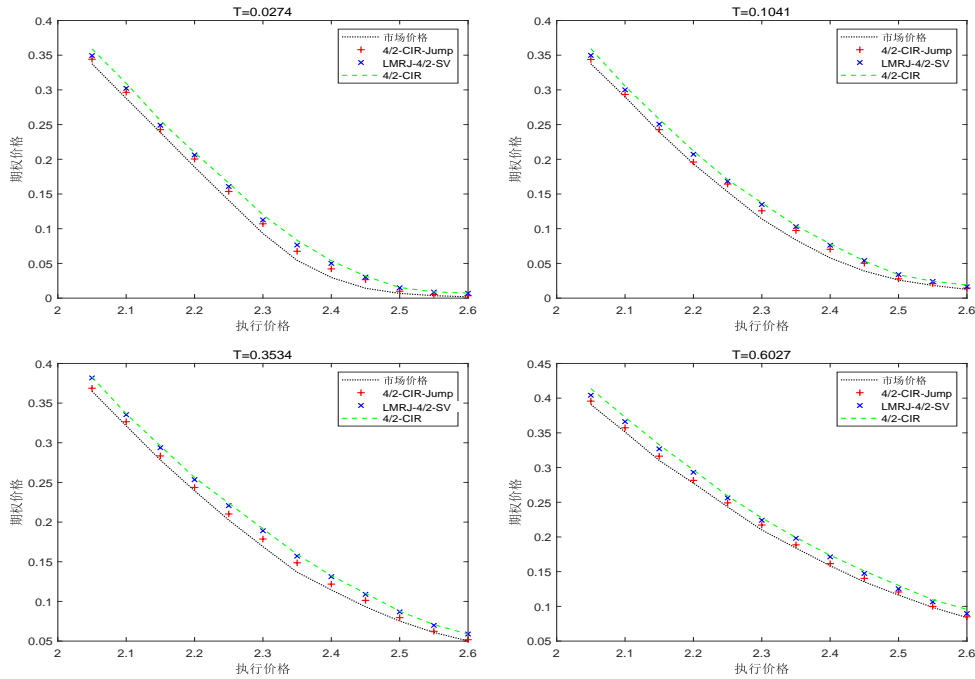


图5.5 样本内定价结果

图5.5样本内定价结果进一步表明, 4/2-CIR跳扩散随机混合模型、4/2跳扩散随机混合模型及4/2-CIR随机混合模型均能对欧式期权进行合理定价. 此外, 从图5.5可以看出, 对于欧式期权而言, 4/2-CIR跳扩散随机混合模型的定价结果更接近市场真实价格, 4/2跳扩散随机混合模型和4/2-CIR随机混合模型的定价结果相差甚微, 并且均次于4/2-CIR跳扩散随机混合模型的定价结果. 这说明相对而言本章所构建4/2-CIR跳扩散随机混合模型在欧式期权定价中的定价效果更优.

图5.1-图5.5给出了4/2-CIR跳扩散随机混合模型、4/2跳扩散随机混合模型及4/2-CIR随机混合模型在样本内的期权定价表现. 为说明模型样本外预测能力, 下面将根据表5.1所给参数值及4/2-CIR跳扩散随机混合模型、4/2跳扩散随机混合模型和4/2-CIR随机混合模型下的欧式期权定价公式计算2024年2月19日上证50ETF期权价格, 并将基于模型所得期权价格及市场价格三维图绘于图5.6-图5.9.

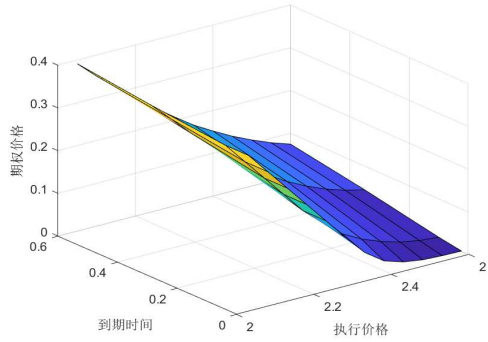


图5.6 市场价格

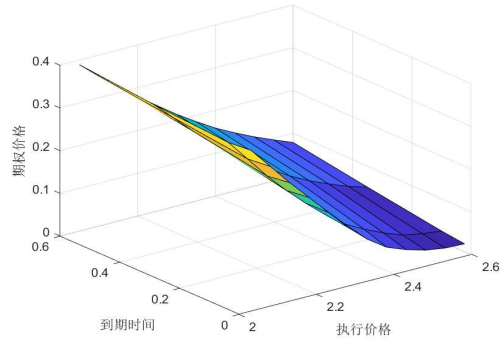


图5.7 4/2-CIR跳扩散随机混合模型定价结果

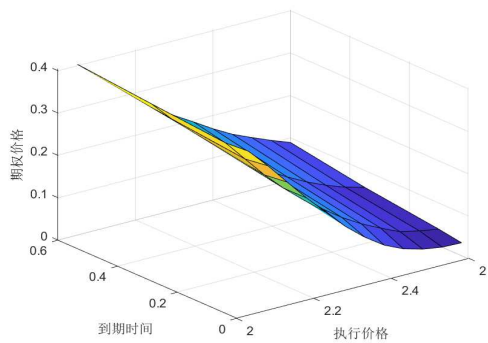


图5.8 4/2跳扩散随机混合模型定价结果

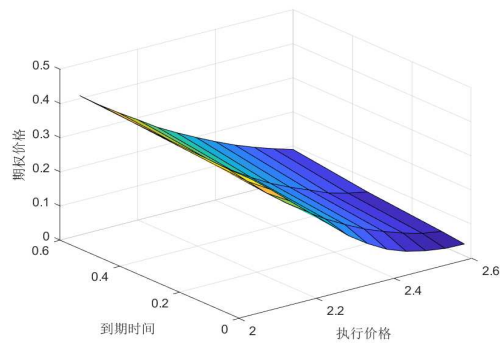


图5.9 4/2-CIR随机混合模型定价结果

由图5.6-5.9获得, 对于样本外数据而言, 各模型的定价结果与样本内一致, 即基于4/2-CIR跳扩散随机混合模型、4/2跳扩散随机混合模型及4/2-CIR随机混合模型所得期权价格与样本外期权市场价格趋势相同. 说明本文所构建4/2-CIR跳扩散随机混合模型、4/2-CIR随机混合模型及4/2跳扩散随机混合模型对样本外数据的定价较为合理. 图5.6-图5.9定价结果三维图仅能看出模型样本外定价结果的合理性, 并不能清晰获得各模型样本外定价结果的定价差异及精度. 因此, 为直观分析模型样本外定价结果与真实值之间的差异及各模型定价精度, 根据不同到期期限, 将模型样本外定价结果与真实值的价格趋势绘于图5.10.

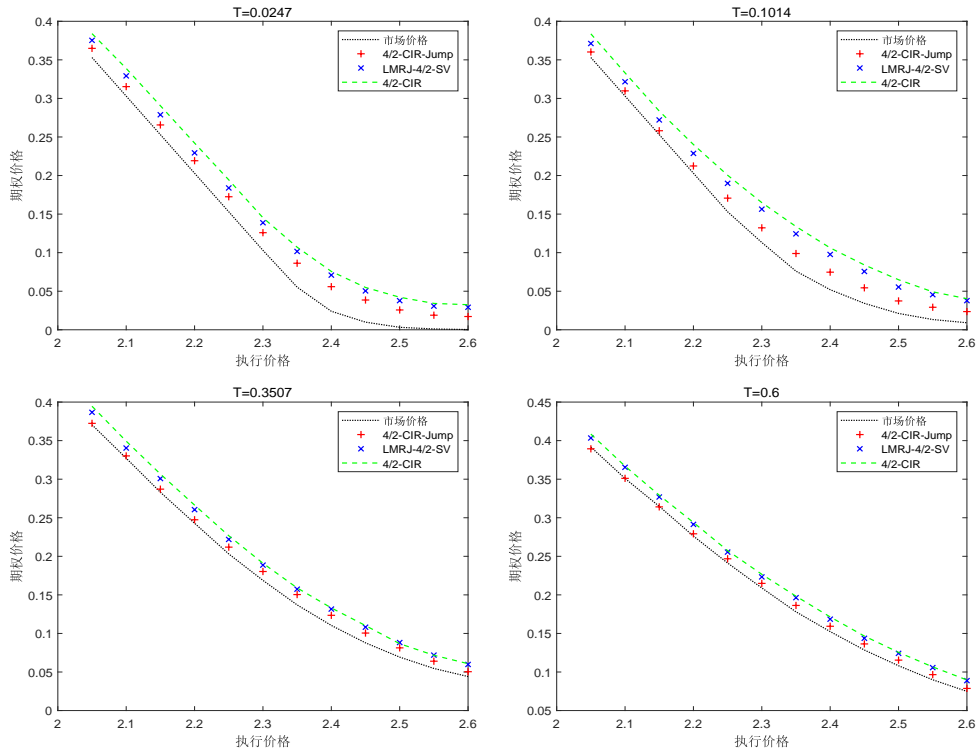


图5.10 样本外定价结果

由图5.10样本外定价结果可知, 4/2-CIR跳扩散随机混合模型、4/2跳扩散随机混合模型及4/2-CIR随机混合模型均能对样本外期权进行有效定价. 除此以外, 4/2-CIR跳扩散随机混合模型的样本外定价结果更接近期权市场真实值, 4/2跳扩散随机混合模型和4/2-CIR随机混合模型的样本外定价结果基本一致. 较4/2-CIR跳扩散随机混合模型的样本外定价结果而言, 4/2跳扩散随机混合模型和4/2-CIR随机混合模型的样本外定价结果较差. 总之, 4/2-CIR跳扩散随机混合模型、4/2跳扩散随机混合模型及4/2-CIR随机混合模型均提高了相应期权定价模型的定价精度, 相对而言, 4/2-CIR跳扩散随机混合模型的样本外定价结果最优.

5.3.3 4/2-CIR跳扩散随机混合模型定价误差分析

为验证不同模型下欧式期权定价结果的差异及各模型的定价精度, 本部分选择均方根误差(RMSE)度量模型定价精度. RMSE的具体表达式见(4.3.1). 表5.2所示为样本内外各模型的RMES.

表5.2 误差分析

RMSE	4/2-CIR-Jump	LMRJ-4/2-SV	4/2-CIR
样本内	0.0075	0.0144	0.0179
样本外	0.0153	0.0268	0.0326

表5.2所示为样本内外各模型的RMSE值. 由表所示结果可知, 样本内外4/2-CIR跳扩散随机混合模型的RMSE值均最小, 4/2跳扩散随机混合模型的RMSE值次之, 4/2-CIR随机混合模型的RMSE值大于4/2-CIR跳扩散随机混合模型和4/2跳扩散随机混合模型. 说明4/2-CIR跳扩散随机混合模型在样本内外的定价精度均最高, 4/2跳扩散随机混合模型次之, 4/2-CIR随机混合模型相对较差.

综上所述, 4/2-CIR跳扩散随机混合模型、4/2跳扩散随机混合模型及4/2-CIR随机混合模型均具有良好的定价表现. 相对而言, 4/2-CIR跳扩散随机混合模型对上证50ETF期权标的资产数据的拟合程度更高, 并且该模型也较为全面的描述了市场利率的随机性特征, 故基于此模型的欧式期权定价误差最小、定价结果最优. 虽然相较于4/2-CIR跳扩散随机混合模型的定价结果, 4/2-CIR随机混合模型及4/2跳扩散随机混合模型的定价精度较低. 但与已有关于随机波动、随机利率及跳扩散混合模型相比, 4/2-CIR随机混合模型和4/2跳扩散随机混合模型也表现出了较为优良的定价性能. 因此, 本文所构建的4/2-CIR随机混合模型、4/2跳扩散随机混合模型及4/2-CIR跳扩散随机混合模型均具有一定的理论及实际意义.

此外, 定理3.2、定理4.2及定理5.2分别为4/2-CIR随机混合模型、4/2跳扩散随机混合模型及4/2-CIR跳扩散随机混合模型下的欧式期权定价公式, 在已知标的资产价格及模型参数值的条件下, 结合定理3.1、定理4.1及定理5.1所示特征函数表达式, 可获得相关模型下的期权理论值, 即定理3.1、定理3.2、定理4.1、定理4.2、定理5.1及定理5.2为期权定价理论研究结果, 此结果为期权定价实证分析提供理论支撑.

5.4 本章小结

本章基于第三、四章的研究结果, 综合考虑期权标的资产价格的尖峰、厚尾、波动率集聚及跳跃等动态变化特征和市场利率随机波动特征, 构建了具有不同特征的藕汁期权定价模型, 并对各章节所构建模型的定价性能进行分析. 首先, 基于期权标的资产价格的动态变动特征及市场利率随机性特征, 构建了4/2-CIR跳扩散随机混合模型. 其次, 利用Itô引理、快速傅里叶变换以及欧拉变化等方法获得了4/2-CIR跳扩散随机混合模型下标的对数资产价格特征函数及欧式期权定价公式. 再次, 利用粒子群优化算法对模型相关参数进行估计, 获得各定价模型参数估计值. 最后, 将4/2-CIR跳扩散随机混合模型下的定价结果与4/2跳扩散随机

混合模型、4/2-CIR随机混合模型及市场真实期权价格进行对比,探讨文中所构建模型在期权定价问题中的合理有效性及模型定价性能.结果显示:4/2-CIR跳扩散随机混合模型、4/2跳扩散随机混合模型及4/2-CIR随机混合模型的构建均具有一定的合理和有效性,并且各模型在欧式期权定价问题中均表现出了较好的定价性能.相对而言,4/2-CIR跳扩散随机混合模型在欧式期权定价问题中的定价精度更高,4/2跳扩散随机混合模型的定价精度与4/2-CIR随机混合模型的定价精度相差甚微.综合来看,4/2-CIR跳扩散随机混合模型、4/2跳扩散随机混合模型及4/2-CIR随机混合模型均提高了现有期权定价模型的定价精度.其中,4/2-CIR跳扩散随机混合模型在欧式期权定价问题中的定价表现最优,4/2跳扩散随机混合模型和4/2-CIR随机混合模型次之.此外,期权定价结果越精确,利用其对冲风险的结果越可靠,越有利于促进市场的平稳运行.

6 基于4/2-CIR跳扩散随机混合模型的最优投资策略

随着金融市场的迅猛发展, 金融市场及其投资者面临的投资风险日趋明显, 如何对资产进行优化配置成为其规避风险的关键. 目前, 资产优化配置问题面临的挑战主要为如何对金融资产价格的尖峰、厚尾、跳跃扩散、非对称性及波动率集聚等动态变动特征进行合理建模. 此外, 金融市场的快速发展, 使得利率不再是一个常数而是随机变化的, 故在金融市场资产配置的研究中对利率随机性的考虑也是十分必要的. 第五章研究结果表明, 4/2-CIR跳扩散随机混合模型不仅能全面刻画金融基础资产的动态变化特征, 而且也能精确描述金融市场利率的随机波动特征. 因此, 本章基于4/2-CIR跳扩散随机混合模型研究资产的最优投资决策问题, 以期能为投资者做出最优的投资决策提供理论依据.

本章结构如下: 第一节在完全市场背景下, 构建了股票过程满足4/2-CIR跳扩散投资组合模型, 并获得了由银行存款(P_t)、利率未定权益(B_t^T)、股票指数(S_t)及其衍生产品(O_t)组成的金融市场下终端财富满足的动态方程. 第二节运用动态规划原理及最优化理论, 得到了幂效用函数下基于4/2-CIR跳扩散投资组合模型HJB方程的解、最优风险敞口及最优投资策略. 第三节研究了基于4/2-CIR跳扩散投资组合模型下的次优策略及效用损失. 第四节通过数值算例分析投资组合模型主要参数对最优风险敞口及效用损失的影响. 第五节为本章小节.

6.1 幂效用函数下4/2-CIR跳扩散投资组合模型构建

假定 $T > 0$ 是给定并且固定的决策时间, $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}, \mathbb{Q})$ 为完备的概率空间, $\{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}$ 是由 $W_{s,t}, W_{v,t}, W_{r,t}, N_t$ 生成的信息流; $W_{s,t}, W_{v,t}, W_{r,t}$ 是完备概率空间上的布朗运动, N_t 是强度为 $\lambda > 0$ 的泊松过程. 在金融市场连续交易且不考虑交易费用和税收的前提下, 假设投资者可进行投资的资产有银行存款(P_t)、利率未定权益(B_t^T)、股票指数(S_t)及其衍生产品(O_t).

假定银行存款 P_t 满足如下动态方程

$$dP_t = r_t P_t dt, \quad (6.1.1)$$

其中, 随机利率 r_t 满足CIR模型

$$dr_t = \alpha_r (\theta_r - r_t) dt + \sigma_r \sqrt{r_t} dW_{r,t}, \quad (6.1.2)$$

其中, $\alpha_r, \theta_r, \sigma_r \in \mathbb{R}^+$ 分别表示利率的均值回复速度、均值回复水平及波动率, 且

满足Feller条件, 即 $2\alpha_r\theta_r \geq \sigma_r^2$.

利率未定权益 $B_t^{\bar{T}}$ 满足

$$dB_t^{\bar{T}} = [r_t - \lambda_r Z(\bar{T} - t)r_t] B_t^{\bar{T}} dt - Z(\bar{T} - t)\sigma_r \sqrt{r_t} B_t^{\bar{T}} dW_{r,t}. \quad (6.1.3)$$

其中, 决策函数 $Z(\bar{T} - t) = \frac{2(e^{\zeta t} - 1)}{2\zeta + (\zeta + \alpha_r + \lambda_r)(e^{\zeta t} - 1)}$, 且 $\zeta = \sqrt{(\alpha_r + \lambda_r)^2 + 2\sigma_r^2}$, λ_r 为利率市场风险溢价.

股票指数 S_t 满足4/2-CIR跳扩散过程

$$\begin{aligned} dS_t = & \left[r_t + \lambda_v \rho (av_t + b) + \lambda_s \sqrt{1 - \rho^2} (av_t + b) + \eta \lambda_r r_t - \lambda \kappa \right] S_t dt \\ & + \left(a\sqrt{v_t} + \frac{b}{\sqrt{v_t}} \right) S_t \left(\rho dW_{v,t} + \sqrt{1 - \rho^2} dW_{s,t} \right) + (e^\xi - 1) S_t dN_t, \quad (6.1.4) \\ & + \eta \sigma_r \sqrt{r_t} S_t dW_{r,t} \end{aligned}$$

其中, $\eta \in \mathbb{R}$ 为度量利率对股票指数动态影响的参数, $\kappa = \mathbb{E}[e^\xi - 1]$, ξ 为标记股票价格发生跳跃的随机变量, 若跳跃大小为常数, 则 $\kappa = \mathbb{E}[e^\xi - 1] = e^\xi - 1 > -1$, $a, b \in \mathbb{R}^+, \rho \in (-1, 1)$, 且随机波动率 v_t 满足CIR模型

$$dv_t = \alpha_v (\theta_v - v_t) dt + \sigma_v \sqrt{v_t} dW_{v,t}, \quad (6.1.5)$$

其中, $\alpha_v, \theta_v, \sigma_v \in \mathbb{R}^+$ 分别表示波动率的均值回复速度、均值回复水平及波动率, 且满足Feller条件, 即 $2\alpha_v\theta_v \geq \sigma_v^2$.

假定股票指数衍生产品标的资产价格服从(6.1.4)式, 在 t 时刻期权价格 $O_t = g(S_t, v_t, r_t, t)$, 则股票指数衍生产品满足如下方程

$$\begin{aligned} \frac{dO_t}{O_t} = & r_t dt + \frac{1}{O_t} g_s S_t \sqrt{1 - \rho^2} (av_t + b) \left(\lambda_s dt + \frac{1}{\sqrt{v_t}} dW_{s,t} \right) + \frac{1}{O_t} \Delta g dN_t \\ & + \frac{1}{O_t} g_s S_t \eta (\lambda_r r_t dt + \sigma_r \sqrt{r_t} dW_{r,t}) + \frac{1}{O_t} g_r (\lambda_r r_t dt + \sigma_r \sqrt{r_t} dW_{r,t}) \\ & + \frac{1}{O_t} g_s S_t \rho (av_t + b) \left(\lambda_v dt + \frac{1}{\sqrt{v_t}} dW_{v,t} \right) - \frac{1}{O_t} \Delta g \lambda dt \\ & + \frac{1}{O_t} g_v \sigma_v v_t \left(\lambda_v dt + \frac{1}{\sqrt{v_t}} dW_{v,t} \right), \quad (6.1.6) \end{aligned}$$

其中, $\Delta g = g((1 + \kappa)S_t, v_t, r_t, t) - g(S_t, v_t, r_t, t)$.

假设 x_t 表示 t 时刻投资者的投资财富, 且投资组合在初始时刻的财富 $x_0 > 0$ 、投资于股票指数的份额为 $\pi_s(t)$ 、利率未定权益的份额为 $\pi_b(t)$ 、衍生产品的份额为 $\pi_{o1}(t)$ 、 $\pi_{o2}(t)$, 则称 $(\pi_s(t), \pi_b(t), \pi_{o1}(t), \pi_{o2}(t))$ 为投资者的投资策略, 则财富过程

可表示为

$$\begin{aligned} \frac{dx_t}{x_t} = & \pi_s(t) \frac{dS_t}{S_t} + \pi_b(t) \frac{dB_t^{\bar{T}}}{B_t^{\bar{T}}} + \pi_{o1}(t) \frac{dO_t^1}{O_t^1} + \pi_{o2}(t) \frac{dO_t^2}{O_t^2} \\ & + (1 - \pi_s(t) - \pi_b(t) - \pi_{o1}(t) - \pi_{o2}(t)) \frac{dP_t}{P_t}. \end{aligned} \quad (6.1.7)$$

结合 $P_t, S_t, B_t^{\bar{T}}$ 及 O_t 满足的微分方程, 可得财富过程 x_t 满足以下SDE

$$\begin{aligned} \frac{dx_t}{x_t} = & \pi_s(t) (r_t + \lambda_v \rho (av_t + b) + \lambda_s \sqrt{1 - \rho^2} (av_t + b) + \eta r_t \lambda_r - \lambda \kappa) dt \\ & + \pi_s(t) \eta \sigma_r \sqrt{r_t} dW_{r,t} - \pi_b(t) \lambda_r Z (\bar{T} - t) r_t dt + \pi_s(t) \kappa dN_t + \pi_b(t) r_t dt \\ & + \pi_s(t) (a \sqrt{v_t} + \frac{b}{\sqrt{v_t}}) (\rho dW_{v,t} + \sqrt{1 - \rho^2} dW_{s,t}) + \pi_{o1}(t) r_t dt + \pi_{o2}(t) r_t dt \\ & - \pi_b(t) Z (\bar{T} - t) \sigma_r \sqrt{r_t} dW_{r,t} + \pi_{o1}(t) \frac{g_s^1}{O_t^1} S_t \sqrt{1 - \rho^2} (av_t + b) \lambda_s dt \\ & + \pi_{o1}(t) \frac{1}{O_t^1} g_s^1 S_t \sqrt{1 - \rho^2} (av_t + b) \frac{1}{\sqrt{v_t}} dW_{w,t} + \pi_{o1}(t) \frac{1}{O_t^1} g_r^1 \lambda_r r_t dt \\ & + \pi_{o1}(t) \frac{1}{O_t^1} g_s^1 S_t \eta (\lambda_r r_t dt + \sigma_r \sqrt{r_t} dW_{r,t}) + \pi_{o1}(t) \frac{g_s^1}{O_t^1} S_t \rho (av_t + b) \lambda_v dt \\ & + \pi_{o1}(t) \frac{1}{O_t^1} g_r^1 \sigma_r \sqrt{r_t} dW_{r,t} + \pi_{o1}(t) \frac{g_s^1}{O_t^1} S_t \rho (av_t + b) \frac{1}{\sqrt{v_t}} dW_{v,t} \\ & + \pi_{o1}(t) \frac{1}{O_t^1} g_v^1 \sigma_v v_t \left(\lambda_v dt + \frac{1}{\sqrt{v_t}} dW_{v,t} \right) - \pi_{o1}(t) \frac{1}{O_t^1} \Delta g^1 (\lambda dt + dN_t) \\ & + \pi_{o2}(t) \frac{g_s^2}{O_t^2} S_t \sqrt{1 - \rho^2} (av_t + b) \lambda_s dt + \pi_{o2}(t) \frac{g_r^2}{O_t^2} (\lambda_r r_t dt + \sigma_r \sqrt{r_t} dW_{r,t}) \\ & + \pi_{o2}(t) \frac{g_s^2}{O_t^2} S_t \sqrt{1 - \rho^2} (av_t + b) \frac{1}{\sqrt{v_t}} dW_{s,t} + \pi_{o2}(t) \frac{g_s^2}{O_t^2} S_t \rho (av_t + b) \\ & \times \left(\lambda_v dt + \frac{1}{\sqrt{v_t}} dW_{v,t} \right) + \pi_{o2}(t) \frac{g_s^2}{O_t^2} S_t \eta (\lambda_r r_t dt + \sigma_r \sqrt{r_t} dW_{r,t}) \\ & + \pi_{o2}(t) \frac{g_v^2}{O_t^2} \sigma_v v_t \left(\lambda_v dt + \frac{1}{\sqrt{v_t}} dW_{v,t} \right) - \pi_{o2}(t) \frac{1}{O_t^2} \Delta g^2 (\lambda dt + dN_t) \\ = & r_t dt + \lambda_s v_t \left[\left(\pi_s(t) + \pi_{o1}(t) \frac{g_s^1}{O_t^1} S_t + \pi_{o2}(t) \frac{g_s^2}{O_t^2} S_t \right) \sqrt{1 - \rho^2} \left(a + \frac{b}{v_t} \right) \right] dt \\ & + \lambda_v v_t \left[\left(\pi_s(t) + \pi_{o1}(t) \frac{g_s^1}{O_t^1} S_t + \pi_{o2}(t) \frac{g_s^2}{O_t^2} S_t \right) \left(a + \frac{b}{v_t} \right) \rho + \pi_{o1}(t) \frac{g_v^1 \sigma_v}{O_t^1} \right. \\ & \left. + \pi_{o2}(t) \frac{g_v^2 \sigma_v}{O_t^2} \right] dt + \lambda_r r_t \left[\pi_s(t) \eta - \pi_b(t) Z (\bar{T} - t) + \pi_{o1}(t) \left(\frac{g_r^1}{O_t^1} + \frac{g_s^1 S_t \eta}{O_t^1} \right) \right. \\ & \left. + \pi_{o2}(t) \left(\frac{g_r^2}{O_t^2} + \frac{g_s^2 S_t \eta}{O_t^2} \right) \right] dt - \lambda \left[\pi_s(t) \kappa + \pi_{o1}(t) \frac{\Delta g^1}{O_t^1} + \pi_{o2}(t) \frac{\Delta g^2}{O_t^2} \right] dt \\ & + \left[\pi_s(t) \kappa + \pi_{o1}(t) \frac{\Delta g^1}{O_t^1} + \pi_{o2}(t) \frac{\Delta g^2}{O_t^2} \right] dN_t + \sqrt{v_t} \left[\left(\pi_s(t) + \pi_{o1}(t) \frac{g_s^1}{O_t^1} S_t \right) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \pi_{o2}(t) \frac{g_s^2 S_t}{O_t^2} \left(a + \frac{b}{v_t} \right) \rho + \pi_{o1}(t) \frac{g_v^1 \sigma_v}{O_t^1} + \pi_{o2}(t) \frac{g_v^2 \sigma_v}{O_t^2} \Big] dW_{v,t} + \sqrt{r_t} \sigma_r \left[\pi_s(t) \right. \\
& \eta - \pi_b(t) Z(\bar{T} - t) + \pi_{o1}(t) \left(\frac{g_r^1}{O_t^1} + \frac{g_s^1 S_t \eta}{O_t^1} \right) + \pi_{o2}(t) \left(\frac{g_r^2}{O_t^2} + \frac{g_s^2 S_t \eta}{O_t^2} \right) \Big] dW_{r,t} \\
& + \sqrt{v_t} \left[\left(\pi_s(t) + \pi_{o1}(t) \frac{1}{O_t^1} g_s^1 S_t + \pi_{o2}(t) \frac{1}{O_t^2} g_s^2 S_t \right) \sqrt{1 - \rho^2} \left(a + \frac{b}{v_t} \right) \right] dW_{s,t} \\
& = r_t dt + (\pi_1 \lambda_s v_t + \pi_2 \lambda_v v_t + \pi_3 \lambda_r r_t - \lambda \pi_4) dt + \pi_1 \sqrt{v_t} dW_{s,t} + \pi_2 \sqrt{v_t} dW_{v,t} \\
& + \pi_4 dN_t + \pi_3 \sigma_r \sqrt{r_t} dW_{r,t} \\
& = r_t dt + \pi_1 (\lambda_s v_t dt + \sqrt{v_t} dW_{s,t}) + \pi_2 (\lambda_v v_t dt + \sqrt{v_t} dW_{v,t}) \\
& + \pi_3 (\lambda_r r_t dt + \sigma_r \sqrt{r_t} dW_{r,t}) + \pi_4 (dN_t - \lambda dt),
\end{aligned}$$

其中, $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ 分别表示 $W_{s,t}, W_{v,t}, W_{r,t}, N_t$ 的风险敞口, 且

$$\begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 \end{bmatrix}^T = G \begin{bmatrix} \pi_s(t) & \pi_b(t) & \pi_{o1}(t) & \pi_{o2}(t) \end{bmatrix}^T. \quad (6.1.8)$$

G 的表达式为

$$G = \begin{bmatrix} \sqrt{1 - \rho^2} \left(a + \frac{b}{v_t} \right) & 0 & \frac{g_s^1 S_t}{O_t^1} \sqrt{1 - \rho^2} \left(a + \frac{b}{v_t} \right) & \frac{g_s^2 S_t}{O_t^2} \sqrt{1 - \rho^2} \left(a + \frac{b}{v_t} \right) \\ \rho \left(a + \frac{b}{v_t} \right) & 0 & \frac{g_s^1 S_t \rho}{O_t^1} \left(a + \frac{b}{v_t} \right) + \frac{g_v^1 \sigma_v}{O_t^1} & \frac{g_s^2 S_t \rho}{O_t^2} \left(a + \frac{b}{v_t} \right) + \frac{g_v^2 \sigma_v}{O_t^2} \\ \eta & -Z(\bar{T} - t) & \frac{1}{O_t^1} g_r^1 + \frac{1}{O_t^1} g_s^1 S_t \eta & \frac{1}{O_t^2} g_r^2 + \frac{1}{O_t^2} g_s^2 S_t \eta \\ \kappa & 0 & \frac{1}{O_t^1} \Delta g^1 & \frac{1}{O_t^2} \Delta g^2 \end{bmatrix}, \quad (6.1.9)$$

为保证 G 可逆, 则需满足如下不等式

$$\begin{vmatrix} \sqrt{1 - \rho^2} \left(a + \frac{b}{v_t} \right) & 0 & \frac{g_s^1 S_t}{O_t^1} \sqrt{1 - \rho^2} \left(a + \frac{b}{v_t} \right) & \frac{g_s^2 S_t}{O_t^2} \sqrt{1 - \rho^2} \left(a + \frac{b}{v_t} \right) \\ \rho \left(a + \frac{b}{v_t} \right) & 0 & \frac{g_s^1 S_t \rho}{O_t^1} \left(a + \frac{b}{v_t} \right) + \frac{g_v^1 \sigma_v}{O_t^1} & \frac{g_s^2 S_t \rho}{O_t^2} \left(a + \frac{b}{v_t} \right) + \frac{g_v^2 \sigma_v}{O_t^2} \\ \eta & -Z(\bar{T} - t) & \frac{1}{O_t^1} g_r^1 + \frac{1}{O_t^1} g_s^1 S_t \eta & \frac{1}{O_t^2} g_r^2 + \frac{1}{O_t^2} g_s^2 S_t \eta \\ \kappa & 0 & \frac{1}{O_t^1} \Delta g^1 & \frac{1}{O_t^2} \Delta g^2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

求解可得

$$\left(\frac{\Delta g^1}{O_t^1} - \frac{g_s^1 S_t}{O_t^1} \right) \frac{g_v^2}{O_t^2} - \left(\frac{\Delta g^2}{O_t^2} - \frac{g_s^2 S_t}{O_t^2} \right) \frac{g_v^1}{O_t^1} \neq 0. \quad (6.1.10)$$

假定在有限区间 $[0, T]$ 上, 投资目标函数为

$$J(x_t, v_t, r_t, t) = \mathbb{E}[U(x_T)],$$

其中, $U(\cdot)$ 表示效用函数, 且满足 $U'(\cdot) > 0, U''(\cdot) < 0$.

投资者的投资目标是寻找可容许策略 $(\pi_s^*(t), \pi_b^*(t), \pi_{o1}^*(t), \pi_{o2}^*(t)) \in \Pi$, 使得目标函数 $J(x, v, r, t)$ 最大. 为此, 先给出可容许投资策略的定义.

定义 6.1 (可容许策略) 对于任意给定的 $t \in [0, T]$, 若策略 $\Pi = (\pi_s(t), \pi_b(t), \pi_{o1}(t), \pi_{o2}(t))$ 满足以下条件:

- (1) Π 关于 \mathcal{F}_t 循序可测;
- (2) 在投资策略 Π 下, x_t 非负;
- (3) 对初始条件 $(x_0, v_0, r_0, t_0) \in [0, T] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, 方程(6.1.7)有唯一解, 且

$$\mathbb{E}_{x_0, v_0, r_0, t_0} [U(x_t)] < \infty,$$

则称 Π 为可容许投资策略.

6.2 基于4/2-CIR跳扩散投资组合模型的最优投资策略

根据最优投资目标可知, 值函数 $H(x_t, v_t, r_t, t)$ 如下

$$H(x_t, v_t, r_t, t) = \sup_{(\pi_s(t), \pi_b(t), \pi_{o1}(t), \pi_{o2}(t)) \in \Pi} J(x_t, v_t, r_t, t),$$

其中, $(\pi_s(t), \pi_b(t), \pi_{o1}(t), \pi_{o2}(t))$ 是定义6.1所示的可容许投资策略.

根据动态规划原则, 值函数 $H(x_t, v_t, r_t, t)$ 满足的HJB方程为

$$\begin{aligned} 0 = & x_t(r_t + \pi_1 \lambda_s v_t + \pi_2 \lambda_v v_t + \pi_3 \lambda_r r_t - \lambda \pi_4) H_x + \frac{1}{2} \sigma_r^2 r_t H_{rr} + \pi_2 x_t \sigma_v v_t H_{xv} \\ & + \frac{1}{2} \sigma_v^2 v_t H_{vv} + \alpha_r (\theta_r - r_t) H_r + \frac{1}{2} x_t^2 (\pi_1^2 v_t + \pi_2^2 v_t + \pi_3^2 \sigma_r^2 r_t) H_{xx} \\ & + H_t + \alpha_v (\theta_v - v_t) H_v + \pi_3 x_t \sigma_r^2 r_t H_{xr} + \tilde{\lambda} \Delta H, \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

其中, $H_t, H_x, H_{xx}, H_v, H_{vv}, H_r, H_{rr}, H_{xv}, H_{xr}$ 分别表示 $H(x_t, v_t, r_t, t)$ 关于 t, x, v, r 的一阶和二阶偏导数, $\tilde{\lambda}$ 为 \mathbb{P} 测度下泊松过程的跳跃强度, $\Delta H = H(x_t(1 + \pi_4), v_t, r_t, t) - H(x_t, v_t, r_t, t)$.

本文中假定投资者的效用函数为幂效用函数, 即

$$U(x) = \frac{x^\delta}{\delta}, \delta < 1, \delta \neq 0. \quad (6.2.2)$$

下面将给出幂效用函数下方程(6.2.1)的解.

定理 6.1 问题(6.2.1)具有如下形式的解

$$H(x_t, v_t, r_t, t) = e^{-\beta t} \frac{x_t^\delta}{\delta} \exp\{A(t)v_t + B(t)r_t + D(t)\}, \quad (6.2.3)$$

此时, 最优风险敞口如下

$$\begin{cases} \pi_1^* = \frac{\lambda_s}{1-\delta} \\ \pi_2^* = \frac{\lambda_v}{1-\delta} + \frac{\sigma_v}{1-\delta} A(t) \\ \pi_3^* = \frac{\lambda_r}{(1-\delta)\sigma_r^2} + \frac{1}{1-\delta} B(t), \\ \pi_4^* = \left(\frac{\lambda}{\tilde{\lambda}}\right)^{\frac{1}{\delta-1}} - 1 \end{cases} \quad (6.2.4)$$

最优投资策略为

$$\begin{bmatrix} \pi_s(t) & \pi_b(t) & \pi_{o1}(t) & \pi_{o2}(t) \end{bmatrix}^\top = G^{-1} \begin{bmatrix} \pi_1^* & \pi_2^* & \pi_3^* & \pi_4^* \end{bmatrix}^\top \quad (6.2.5)$$

其中, $A(t), B(t), D(t), G^{-1}$ 如式(6.2.19), (6.2.24), (6.2.30)及(6.2.31).

证明 假定HJB方程(6.2.1)有如下形式的解

$$\begin{cases} H(x_t, v_t, r_t, t) = e^{-\beta t} \frac{x_t^\delta}{\delta} h(v_t, r_t, t), \\ h(v_T, r_T, T) = 1 \end{cases},$$

记 $H(x_t, v_t, r_t, t) = H$, $h(v_t, r_t, t) = h$, 则

$$\begin{aligned} H_t &= -\beta e^{-\beta t} \frac{x_t^\delta}{\delta} h + e^{-\beta t} \frac{x_t^\delta}{\delta} h_t, \\ H_x &= e^{-\beta t} x_t^{\delta-1} h, \\ H_{xx} &= (\delta-1) e^{-\beta t} x_t^{\delta-2} h, \\ H_v &= e^{-\beta t} \frac{x_t^\delta}{\delta} h_v, \\ H_{xv} &= e^{-\beta t} x_t^{\delta-1} h_v, \\ H_{vv} &= e^{-\beta t} \frac{x_t^\delta}{\delta} h_{vv}, \\ H_r &= e^{-\beta t} \frac{x_t^\delta}{\delta} h_r, \\ H_{rr} &= e^{-\beta t} \frac{x_t^\delta}{\delta} h_{rr}, \\ H_{xr} &= e^{-\beta t} x_t^{\delta-1} h_r, \\ \Delta H &= e^{-\beta t} \frac{x_t^\delta}{\delta} ((1 + \pi_4)^\delta - 1) h. \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

将(6.2.6)代入(6.2.1), 得

$$\begin{aligned}
& -\beta e^{-\beta t} \frac{x_t^\delta}{\delta} h + e^{-\beta t} \frac{x_t^\delta}{\delta} h_t + [r_t + \pi_1 \lambda_s v_t + \pi_2 \lambda_v v_t + \pi_3 \lambda_r r_t - \pi_4 \lambda] e^{-\beta t} x_t^\delta h \\
& + \pi_2 \sigma_v v_t x_t^\delta e^{-\beta t} h_v + \alpha_r (\theta_r - r_t) e^{-\beta t} \frac{x_t^\delta}{\delta} h_r + \sigma_r^2 r_t e^{-\beta t} \frac{x_t^\delta}{2\delta} h_{rr} + \pi_3 \sigma_r^2 r_t x_t^\delta e^{-\beta t} h_r \\
& + \tilde{\lambda} e^{-\beta t} \frac{x_t^\delta}{\delta} ((1 + \pi_4)^\delta - 1) h + \frac{1}{2} (\pi_1^2 v_t + \pi_2^2 v_t + \pi_3^2 \sigma_r^2 r_t) (\delta - 1) x_t^\delta e^{-\beta t} h \\
& + \alpha_v (\theta_v - v_t) e^{-\beta t} \frac{x_t^\delta}{\delta} h_v + \frac{1}{2} \sigma_v^2 v_t e^{-\beta t} \frac{x_t^\delta}{\delta} h_{vv} = 0,
\end{aligned}$$

整理得

$$\begin{aligned}
& -\beta h + [r_t + \pi_1 \lambda_s v_t + \pi_2 \lambda_v v_t + \pi_3 \lambda_r r_t - \pi_4 \lambda] \delta h + \alpha_v (\theta_v - v_t) h_v + \frac{1}{2} \sigma_v^2 v_t h_{vv} \\
& + h_t + \frac{1}{2} (\pi_1^2 v_t + \pi_2^2 v_t + \pi_3^2 \sigma_r^2 r_t) \delta (\delta - 1) h + \alpha_r (\theta_r - r_t) h_r + \frac{1}{2} \sigma_r^2 r_t h_{rr} \\
& + \pi_2 \sigma_v v_t \delta h_v + \pi_3 \sigma_r^2 r_t \delta h_r + \tilde{\lambda} ((1 + \pi_4)^\delta - 1) h = 0. \tag{6.2.7}
\end{aligned}$$

由(6.2.7)式分别对 $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ 求一阶导, 获得

$$\begin{cases}
\lambda_s v_t \delta h + \delta (\delta - 1) v_t \pi_1 h = 0 \\
\lambda_v v_t \delta h + \delta (\delta - 1) v_t \pi_2 h + \sigma_v v_t \delta h_v = 0 \\
\lambda_r r_t \delta h + \delta (\delta - 1) \sigma_r^2 \pi_3 r_t h + \sigma_r^2 r_t \delta h_r = 0 \\
-\lambda \delta h + \tilde{\lambda} h \delta (1 + \pi_4)^{\delta-1} = 0
\end{cases}$$

从而可得, 最优风险敞口如下

$$\begin{cases}
\pi_1^* = \frac{\lambda_s}{1 - \delta} \\
\pi_2^* = \frac{\lambda_v h + \sigma_v h_v}{(1 - \delta) h} \\
\pi_3^* = \frac{\lambda_r h + \sigma_r^2 h_r}{(1 - \delta) \sigma_r^2 h} \\
\pi_4^* = \left(\frac{\lambda}{\tilde{\lambda}} \right)^{\frac{1}{\delta-1}} - 1
\end{cases} \tag{6.2.8}$$

将(6.2.8)代入(6.2.7)

$$\begin{aligned}
& h_t - \beta h + \left\{ r_t + \frac{(\lambda_s^2 + \lambda_v^2) v_t}{1 - \delta} + \frac{\sigma_v \lambda_v v_t h_v}{(1 - \delta) h} + \frac{\lambda_r^2 r_t}{(1 - \delta) \sigma_r^2} + \frac{\lambda_r r_t h_r}{(1 - \delta) h} \right\} \delta h \\
& - \frac{1}{2} \left\{ \frac{(\lambda_s^2 + \lambda_v^2) v_t}{(1 - \delta)} + \frac{2 \lambda_s \sigma_v v_t h_v}{(1 - \delta) h} + \frac{\sigma_v^2 v_t h_v^2}{(1 - \delta) h^2} + \frac{\lambda_r^2 \sigma_r^2 r_t}{(1 - \delta) \sigma_r^4} + \frac{2 \lambda_r \sigma_r^2 r_t h_r}{(1 - \delta) \sigma_r^2 h} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\sigma_r^2 r_t h_r^2}{(1-\delta)h^2} \left. \right\} \delta h + \alpha_v(\theta_v - v_t)h_v + \alpha_r(\theta_r - r_t)h_r + \frac{\lambda_v h + \sigma_v h_v}{(1-\delta)h} \sigma_v v_t \delta h_v \\
& + \frac{1}{2} \sigma_r^2 r_t h_{rr} + \frac{1}{2} \sigma_v^2 v_t h_{vv} + \frac{\lambda_r h + \sigma_r^2 h_r}{(1-\delta)\sigma_r^2 h} \sigma_r^2 r_t \delta h_r - \left[\left(\frac{\lambda}{\tilde{\lambda}} \right)^{\frac{1}{\delta-1}} - 1 \right] \lambda \delta h \\
& + \tilde{\lambda} h \left[\left(\frac{\lambda}{\tilde{\lambda}} \right)^{\frac{\delta}{\delta-1}} - 1 \right] = 0,
\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}
& h_t + \frac{1}{2} \sigma_v^2 v_t h_{vv} + \left[\delta r_t - \beta + \frac{\delta(\lambda_s^2 + \lambda_v^2)v_t}{2(1-\delta)} + \frac{\delta \lambda_r^2 r_t}{2(1-\delta)\sigma_r^2} + \tilde{\lambda} \left[\left(\frac{\lambda}{\tilde{\lambda}} \right)^{\frac{\delta}{\delta-1}} - 1 \right] \right. \\
& \left. - \delta \lambda \left[\left(\frac{\lambda}{\tilde{\lambda}} \right)^{\frac{1}{\delta-1}} - 1 \right] \right] h + \left[\frac{\delta \sigma_v \lambda_v v_t}{1-\delta} + \alpha_v(\theta_v - v_t) \right] h_v + \frac{\delta \sigma_r^2 r_t}{2(1-\delta)} \frac{h_r^2}{h} \\
& + \left[\frac{\delta \lambda_r r_t}{1-\delta} + \alpha_r(\theta_r - r_t) \right] h_r + \frac{\delta \sigma_v^2 v_t}{2(1-\delta)} \frac{h_v^2}{h} + \frac{1}{2} \sigma_r^2 r_t h_{rr} = 0. \tag{6.2.9}
\end{aligned}$$

假定方程(6.2.9)有如下形式的解

$$\begin{cases} h(v_t, r_t, t) = \exp(A(t)v_t + B(t)r_t + D(t)) \\ h(v_T, r_T, T) = 1 \end{cases},$$

则

$$\begin{aligned}
& h_t = [A'(t)v + B'(t)r + D'(t)] h, \\
& h_v = A(t)h, \\
& h_{vv} = A^2(t)h, \\
& h_r = B(t)h, \\
& h_{rr} = B^2(t)h.
\end{aligned} \tag{6.2.10}$$

将(6.2.10)代入(6.2.9)得

$$\begin{aligned}
& A'(t)v_t + B'(t)r_t + D'(t) + r_t \delta - \beta + \frac{1}{2} \frac{\delta(\lambda_s^2 + \lambda_v^2)}{1-\delta} v_t + \frac{1}{2} \frac{\delta \lambda_r^2}{(1-\delta)\sigma_r^2} r_t \\
& + (1-\delta) \frac{\lambda}{\tilde{\lambda}^{\frac{1}{\delta-1}}} - \tilde{\lambda} + \lambda \delta + \left[\frac{\delta}{1-\delta} \sigma_v \lambda_v v_t + \alpha_v(\theta_v - v_t) \right] A(t) + \frac{1}{2} \sigma_v^2 v_t A^2(t) \\
& + \left[\frac{\delta}{1-\delta} \lambda_r r_t + \alpha_r(\theta_r - r_t) \right] B(t) + \frac{1}{2} \sigma_r^2 r_t B^2(t) + \frac{\delta}{2(1-\delta)} \sigma_v^2 v_t A^2(t) \\
& + \frac{1}{2} \frac{\delta}{1-\delta} \sigma_r^2 r_t B^2(t) = 0.
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
& \left[A'(t) + \frac{1}{2} \frac{\delta}{1-\delta} (\lambda_s^2 + \lambda_v^2) + \left(\frac{\delta}{1-\delta} \sigma_v \lambda_v - \alpha_v \right) A(t) + \frac{1}{2} \sigma_v^2 A^2(t) + \frac{1}{2} \frac{\delta}{1-\delta} \right. \\
& \times \sigma_v^2 A^2(t) \Big] v_t + \left[B'(t) + \delta + \frac{1}{2} \frac{\delta}{1-\delta} \frac{\lambda_r^2}{\sigma_r^2} + \left(\frac{\delta}{1-\delta} \lambda_r - \alpha_r \right) B(t) + \frac{1}{2} \sigma_r^2 B^2(t) \right. \\
& + \frac{1}{2} \frac{\delta}{1-\delta} \sigma_r^2 B^2(t) \Big] r_t + \left[D'(t) - \beta + \lambda \delta - \tilde{\lambda} + (1-\delta) \frac{\lambda^{\frac{\delta}{\delta-1}}}{\tilde{\lambda}^{\frac{1}{\delta-1}}} + \alpha_v \theta_v A(t) \right. \\
& \left. + \alpha_r \theta_r B(t) \right] = 0. \tag{6.2.11}
\end{aligned}$$

式(6.2.11)的求解可转换为以下三个方程组的求解

$$\begin{cases} A'(t) + \frac{1}{2} \frac{\delta}{1-\delta} (\lambda_s^2 + \lambda_v^2) + \left(\frac{\delta}{1-\delta} \sigma_v \lambda_v - \alpha_v \right) A(t) + \frac{1}{2} \sigma_v^2 A^2(t) \\ + \frac{1}{2} \frac{\delta}{1-\delta} \sigma_v^2 A^2(t) = 0 \\ A(T) = 0 \end{cases}, \tag{6.2.12}$$

$$\begin{cases} B'(t) + \delta + \frac{1}{2} \frac{\delta}{1-\delta} \sigma_r^2 B^2(t) + \left(\frac{\delta}{1-\delta} \lambda_r - \alpha_r \right) B(t) + \frac{1}{2} \sigma_r^2 B^2(t) \\ + \frac{1}{2} \frac{\delta}{1-\delta} \frac{\lambda_r^2}{\sigma_r^2} = 0 \\ B(T) = 0 \end{cases}, \tag{6.2.13}$$

$$\begin{cases} D'(t) - \beta + \lambda \delta - \tilde{\lambda} + (1-\delta) \frac{\lambda^{\frac{\delta}{\delta-1}}}{\tilde{\lambda}^{\frac{1}{\delta-1}}} + \alpha_v \theta_v A(t) + \alpha_r \theta_r B(t) = 0 \\ D(T) = 0 \end{cases}. \tag{6.2.14}$$

接下来分别求方程组(6.2.12), (6.2.13)及(6.2.14)的解.

针对方程组(6.2.12), 令

$$\begin{aligned}
a_v &= \frac{1}{1-\delta} \sigma_v^2, \\
b_v &= \frac{\delta}{1-\delta} \sigma_v \lambda_v - \alpha_v, \\
c_v &= \frac{\delta}{1-\delta} (\lambda_s^2 + \lambda_v^2), \\
d_v &= \sqrt{b_v^2 - a_v c_v}, \tag{6.2.15}
\end{aligned}$$

此时, 方程组(6.2.12)可简记为

$$\begin{cases} A'(t) = - \left[\frac{1}{2}a_v A^2(t) + b_v A(t) + \frac{1}{2}c_v \right] \\ A(T) = 0 \end{cases} \quad (6.2.16)$$

假定 $b_v^2 - a_v c_v > 0$, 则方程

$$\frac{1}{2}a_v A^2(t) + b_v A(t) + \frac{1}{2}c_v = 0,$$

有两个不相等的根 $A_1 = \frac{-b_v + d_v}{a_v}$ 和 $A_2 = \frac{-b_v - d_v}{a_v}$, 此时, 根据式(6.2.16), 有

$$A'(t) = -\frac{1}{2}a_v(A(t) - A_1)(A(t) - A_2), \quad (6.2.17)$$

即

$$\frac{A'(t)}{(A(t) - A_1)(A(t) - A_2)} = -\frac{1}{2}a_v, \quad (6.2.18)$$

对式(6.2.18)两边积分可得

$$\int_{A(t)}^{A(T)} \frac{1}{(\alpha(t) - A_1)(\alpha(t) - A_2)} d\alpha = -\int_0^t \frac{1}{2}a_v ds,$$

则

$$\frac{1}{A_1 - A_2} \int_{A(t)}^{A(T)} \left(\frac{1}{\alpha(t) - A_1} - \frac{1}{\alpha(t) - A_2} \right) d\alpha = -\frac{1}{2}a_v(T - t),$$

$$\int_{A(t)}^{A(T)} \left(\frac{1}{\alpha(t) - A_1} - \frac{1}{\alpha(t) - A_2} \right) d\alpha = -d_v(T - t),$$

$$\ln \left(\frac{A_1}{A_2} \right) - \ln \left(\frac{A(t) - A_1}{A(t) - A_2} \right) = -d_v(T - t),$$

$$\frac{A(t) - A_2}{A(t) - A_1} = \frac{A_2}{A_1} e^{-d_v(T-t)},$$

$$\frac{A_2 - A_1}{A(t) - A_1} = \frac{A_1 - A_2 e^{-d_v(T-t)}}{A_1},$$

从而有

$$A(t) = \frac{A_1(A_2 - A_1)}{A_1 - A_2 e^{-d_v(T-t)}} + A_1 = \frac{A_1 A_2 (1 - e^{-d_v(T-t)})}{A_1 - A_2 e^{-d_v(T-t)}}. \quad (6.2.19)$$

针对方程组(6.2.13), 令

$$\begin{aligned} a_r &= \frac{1}{1-\delta} \sigma_r^2, \\ b_r &= \frac{\delta}{1-\delta} \lambda_r - \alpha_r, \\ c_r &= 2\delta + \frac{\delta}{1-\delta} \frac{\lambda_r^2}{\sigma_r^2}, \\ d_r &= \sqrt{b_r^2 - a_r c_r}, \end{aligned} \quad (6.2.20)$$

此时, 方程组(6.2.13)简记为

$$\begin{cases} B'(t) = - \left[\frac{1}{2} a_r B^2(t) + b_r B(t) + \frac{1}{2} c_r \right] \\ B(T) = 0 \end{cases} \quad (6.2.21)$$

假定 $b_r^2 - a_r c_r > 0$, 则方程

$$\frac{1}{2} a_r B^2(t) + b_r B(t) + \frac{1}{2} c_r = 0,$$

有两个不相等的根 $B_1 = \frac{-b_r + d_r}{a_r}$ 和 $B_2 = \frac{-b_r - d_r}{a_r}$, 此时, 根据式(6.2.21), 有

$$B'(t) = -\frac{1}{2} a_r (B(t) - B_1)(B(t) - B_2), \quad (6.2.22)$$

即

$$\frac{B'(t)}{(B(t) - B_1)(B(t) - B_2)} = -\frac{1}{2} a_r, \quad (6.2.23)$$

上式两边积分可获得

$$B(t) = \frac{B_1 B_2 (1 - e^{-d_r(T-t)})}{B_1 - B_2 e^{-d_r(T-t)}}. \quad (6.2.24)$$

针对方程(6.2.14), 令

$$c = -\beta + \lambda \delta - \tilde{\lambda} + (1 - \delta) \frac{\lambda^{\frac{\delta}{\delta-1}}}{\tilde{\lambda}^{\frac{1}{\delta-1}}}, \quad (6.2.25)$$

则

$$\begin{cases} D'(t) = -(\alpha_v \theta_v A(t) + \alpha_r \theta_r B(t) + c) \\ D(T) = 0 \end{cases}, \quad (6.2.26)$$

(6.2.26)式两边积分可得

$$D(t) = \int_t^T \alpha_v \theta_v A(s) ds + \int_t^T \alpha_r \theta_r B(s) ds + c(T - t). \quad (6.2.27)$$

又因为

$$\begin{aligned}
\int_t^T \alpha_v \theta_v A(t) dt &= \alpha_v \theta_v \int_t^T A(s) ds \\
&= \alpha_v \theta_v \left[\int_t^T \frac{A_1(A_2 - A_1)}{A_1 - A_2 e^{-d_v(T-s)}} ds + \int_t^T A_1 ds \right] \\
&= \alpha_v \theta_v \left[A_1(A_2 - A_1) \int_t^T \frac{1}{A_1 - A_2 e^{-d_v(T-s)}} ds + A_1(T-t) \right] \quad (6.2.28) \\
&= \alpha_v \theta_v \left[A_1(A_2 - A_1) \int_{-(T-t)}^0 \frac{1}{A_1 - A_2 e^{d_v z}} dz + A_1(T-t) \right] \\
&= \alpha_v \theta_v A_2(T-t) + \frac{\alpha_v \theta_v (A_1 - A_2)}{d_v} \ln \frac{A_1 - A_2}{A_1 - A_2 e^{-d_v(T-t)}}.
\end{aligned}$$

同理可得

$$\int_t^T \alpha_r \theta_r B(s) ds = \alpha_r \theta_r B_2(T-t) + \frac{\alpha_r \theta_r (B_1 - B_2)}{d_r} \ln \frac{B_1 - B_2}{B_1 - B_2 e^{-d_r(T-t)}}. \quad (6.2.29)$$

将式(6.2.28)和式(6.2.29)代入式(6.2.27)获得

$$\begin{aligned}
D(t) &= \frac{\alpha_v \theta_v (A_1 - A_2)}{d_v} \ln \frac{A_1 - A_2}{A_1 - A_2 e^{-d_v(T-t)}} + \alpha_v \theta_v A_2(T-t) + c(T-t) \\
&\quad + \frac{\alpha_r \theta_r (B_1 - B_2)}{d_r} \ln \frac{B_1 - B_2}{B_1 - B_2 e^{-d_r(T-t)}} + \alpha_r \theta_r B_2(T-t). \quad (6.2.30)
\end{aligned}$$

此外, 将 $h(v_t, r_t, t)$ 的表达式代入式(6.2.8)可得最优风险敞口(6.2.4), 即

$$\begin{cases} \pi_1^* = \frac{\lambda_s}{1-\delta} \\ \pi_2^* = \frac{\lambda_v}{1-\delta} + \frac{\sigma_v}{1-\delta} A(t) \\ \pi_3^* = \frac{\lambda_r}{(1-\delta)\sigma_r^2} + \frac{1}{1-\delta} B(t) \\ \pi_4^* = \left(\frac{\lambda}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\delta-1}} - 1 \end{cases},$$

进一步, 根据风险敞口与投资策略的关系式(6.1.8), 可获得最优投资策略(6.2.5)式, 即

$$\begin{bmatrix} \pi_s(t) & \pi_b(t) & \pi_{o1}(t) & \pi_{o2}(t) \end{bmatrix}^T = G^{-1} \begin{bmatrix} \pi_1^* & \pi_2^* & \pi_3^* & \pi_4^* \end{bmatrix}^T,$$

其中, G 的表达式如(6.1.9)所示, 根据矩阵初等变换的方法求解 G^{-1} , 最终获得

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} E^{1*} - \frac{C^{1*}}{C^{2*}}(1 + E^{1*}B^{1*}) & E^{2*} \left(\frac{C^{1*}B^{1*}}{C^{2*}} - 1 \right) & 0 & F^{1*} + \frac{C^{1*}}{C^{2*}}F^{2*} \\ -E^{1*}A^{1*} - \frac{D^{*2}}{C^{2*}}(1 + E^{1*}B^{1*}) & E^{2*} \left(\frac{D^{*2}B^{1*}}{C^{2*}} + A^{1*} \right) & -\frac{1}{Z} & \frac{\eta}{\kappa Z} + \frac{D^{*2}}{C^{2*}}F^{2*} \\ -E^{1*} - \frac{D^{*1}}{C^{2*}}(1 + E^{1*}B^{1*}) & E^{2*} \left(\frac{D^{*1}B^{1*}}{C^{2*}} + 1 \right) & 0 & \frac{D^{*2}}{\kappa C^{2*}}F^{2*} \\ \frac{1}{C^{2*}}(1 + E^{1*}B^{1*}) & -E^{2*} \frac{B^{1*}}{C^{2*}} & 0 & -\frac{1}{\kappa C^{2*}}F^{2*} \end{bmatrix}, \quad (6.2.31)$$

其中

$$\begin{aligned} A^{1*} &= \frac{1}{Z} \left(\frac{g_r^1 + g_s^1 S_t \eta}{O_t^1} - \frac{\Delta g^1 \eta}{\kappa O_t^1} \right), & A^{2*} &= \frac{1}{Z} \left(\frac{g_r^2 + g_s^2 S_t \eta}{O_t^2} - \frac{\Delta g^2 \eta}{\kappa O_t^2} \right), \\ B^{1*} &= \left(\frac{g_s^1 S_t}{O_t^1} - \frac{\Delta g^1}{\kappa O_t^1} \right) F^{1*}, & B^{2*} &= \left(\frac{g_s^2 S_t}{O_t^2} - \frac{\Delta g^2}{\kappa O_t^2} \right) F^{1*}, \\ C^{1*} &= \frac{O_t^1}{O_t^2} \left(\frac{\Delta g^2}{\Delta g^1} - \frac{g_v^2}{g_v^1} \right), & C^{2*} &= B^{2*} - \frac{O_t^1 g_v^2}{O_t^2 g_v^1} B^{1*}, \\ D^{1*} &= \frac{O_t^1 g_v^2}{O_t^2 g_v^1}, & D^{2*} &= \frac{O_t^1 g_v^2}{O_t^2 g_v^1} A^{1*} - A^{2*}, \\ E^{1*} &= \frac{\rho E^{2*}}{\sqrt{1 - \rho^2}}, & E^{2*} &= \frac{O_t^1}{g_v^1 \sigma_v}, \\ F^{1*} &= \frac{O_t^1}{\Delta g^1}, & F^{2*} &= \sqrt{1 - \rho^2} \left(a + \frac{b}{v_t} \right). \end{aligned} \quad (6.2.32)$$

下面给出最优解定义良好的条件.

命题 6.1 若对任意的 $\delta < 1$, 且 $\delta \neq 0$ 满足以下条件

$$\begin{cases} \alpha_v^2 + \frac{\delta}{1 - \delta} \left[\frac{\delta}{1 - \delta} \sigma_v^2 \lambda_v^2 - 2\sigma_v \lambda_v \alpha_v - \frac{1}{1 - \delta} \sigma_v^2 (\lambda_v^2 + \lambda_s^2) \right] > 0 \\ \alpha_r^2 - \frac{\delta}{1 - \delta} \left[\lambda_r^2 + 2\lambda_r \sigma_r + 2\sigma_r^2 \right] > 0 \end{cases},$$

则函数 $H(x_t, v_t, r_t, t)$ 是HJB方程(6.2.1)定义良好的解.

证明 证明函数 $H(x_t, v_t, r_t, t)$ 有良好定义, 只需证 $H(x_t, v_t, r_t, t)$ 为实值有限函数.

(1)证明函数 $H(x_t, v_t, r_t, t)$ 为实值函数.

若 $H(x_t, v_t, r_t, t)$ 为实值函数, 则需保证 $A(t)$ 和 $B(t)$ 有实根, 即需满足 $b_v^2 - a_v c_v > 0$, 且 $b_r^2 - a_r c_r > 0$, 根据(6.2.15)式和(6.2.20)式, 有

$$\begin{cases} \alpha_v^2 + \frac{\delta}{1 - \delta} \left[\frac{\delta}{1 - \delta} \sigma_v^2 \lambda_v^2 - 2\sigma_v \lambda_v \alpha_v - \frac{1}{1 - \delta} \sigma_v^2 (\lambda_v^2 + \lambda_s^2) \right] > 0 \\ \alpha_r^2 - \frac{\delta}{1 - \delta} \left[\lambda_r^2 + 2\lambda_r \sigma_r + 2\sigma_r^2 \right] > 0 \end{cases},$$

(2)证明函数 $H(x_t, v_t, r_t, t)$ 有限.

根据 $H(x_t, v_t, r_t, t)$ 的表达式可知, 证明 $H(x_t, v_t, r_t, t)$ 有限只需证明 $h(v_t, r_t, t)$ 有限, 从而需证 $A(t)$ 、 $B(t)$ 和 $D(t)$ 有限.

当 $\delta < 0$ 时, $c_v < 0, c_r < 0$, 此时 $A(t) < 0, B(t) < 0$, 且 $D(t) < 0$, 则 $h(v_t, r_t, t)$ 有限;

当 $0 < \delta < 1$ 时, $c_v > 0, c_r > 0$, 此时 $A(t) > 0, B(t) > 0$, 要使 $A(t), B(t)$ 有限, 需证明 $A_1 - A_2 e^{-d_v(T-t)} \neq 0$, 且 $B_1 - B_2 e^{-d_v(T-t)} \neq 0$.

根据 a_v 和 c_v 的表达式可知

$$\begin{aligned} a_v c_v &= \frac{\delta}{(1-\delta)^2} \sigma_v^2 (\lambda_v^2 + \lambda_s^2) > 0, \\ &\Leftrightarrow d_v = \sqrt{b_v^2 - a_v c_v} < b_v, \\ &\Leftrightarrow \frac{b_v + d_v}{b_v - d_v} > 1, \\ &\Leftrightarrow -(b_v - d_v) \left(1 - \frac{b_v + d_v}{b_v - d_v} e^{-d_v(T-t)}\right) \neq 0, \\ &\Leftrightarrow -b_v + d_v + (b_v + d_v) e^{-d_v(T-t)} \neq 0, \\ &\Leftrightarrow \frac{-b_n + d_v}{a_v} - \frac{-b_v - d_v}{a_v} e^{-d_v(T-t)} \neq 0, \\ &\Leftrightarrow A_1 - A_2 e^{-d_v(T-t)} \neq 0. \end{aligned}$$

同理可得, $B_1 - B_2 e^{-d_v(T-t)} \neq 0$.

此时, 根据 $D(t)$ 的表达式可知 $D(t)$ 有限.

综上所述, 对于任意的 $\delta < 1$, 且 $\delta \neq 0$, 函数 $h(v_t, r_t, t)$ 有限, 从而可知 $H(x_t, v_t, r_t, t)$ 有限. 由此来看, 函数 $H(x_t, v_t, r_t, t)$ 为实值有限函数. 证毕.

下面给出验证性定理, 证明(6.2.3)所示 $H(x_t, v_t, r_t, t)$ 为值函数, 且(6.2.4)式所示风险敞口为最优风险敞口.

定理 6.2 对给定的初始条件 $(x_0, v_0, r_0, t_0) \in [0, T] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, 若函数 $H(x_t, v_t, r_t, t) : [0, T] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, 使得

- (1) $H(x_t, v_t, r_t, t)$ 是关于 t 一阶可微、关于 v 和 r 二阶可微的实值、有限函数;
- (2) $H(x_t, v_t, r_t, t)$ 满足方程(6.2.1)式, 对于正函数,

$$h(v_t, r_t, t) = \exp(A(t)v_t + B(t)r_t + D(t)),$$

有 $H(x_t, v_t, r_t, t) = e^{-\beta t} \frac{x_t^\delta}{\delta} h(v_t, r_t, t)$, 此时, 终端条件 $H(x_T, v_T, r_T, T) = e^{-\beta T} \frac{x_T^\delta}{\delta}$;

- (3) 方程(6.2.19)中函数 $A(t)$ 满足以下条件

$$-\frac{1}{2} \left[\frac{\sigma_v^2}{(1-\delta)^2} A^2(0) + \frac{2\delta\lambda_v\sigma_v}{(1-\delta)^2} A(0) + \frac{(\lambda_v^2 + \lambda_s^2)\delta^2}{(1-\delta)^2} \right] \geq -\frac{\alpha_v^2}{2\sigma_v^2}; \quad (6.2.33)$$

(4) 方程(6.2.24)中函数 $B(t)$ 满足以下条件

$$-\frac{1}{2} \left[\frac{\sigma_r^2}{(1-\delta)^2} B^2(0) + \frac{2\delta\lambda_r}{(1-\delta)^2} B(0) + \frac{\lambda_r^2 \delta^2}{(1-\delta)^2 \sigma_r^2} \right] \geq -\frac{\alpha_r^2}{2\sigma_r^2}. \quad (6.2.34)$$

则, 式(6.2.3)所示函数为值函数, 式(6.2.4)所示风险敞口为最优风险敞口, 式(6.2.5)所示投资策略为最优投资策略.

证明 条件(1)和条件(2)的证明过程详见命题6.1和定理6.1. 下证条件(3)和(4).

假定 $H(x_t, v_t, r_t, t) = e^{-\beta t} \frac{x_t^\delta}{\delta} h(x_t, v_t, r_t, t)$, 则可获得 $H(x_t, v_t, r_t, t)$ 满足如下动态微分方程

$$\begin{aligned} dH_t &= \frac{\partial H}{\partial t} dt + \frac{\partial H}{\partial x_t} dx_t + \frac{\partial H}{\partial v_t} dv_t + \frac{\partial H}{\partial r_t} dr_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial x_t^2} (dx_t)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial v_t^2} (dv_t)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial r_t^2} (dr_t)^2 + \frac{\partial^2 H}{\partial x_t \partial v_t} (dx_t)(dv_t) + \frac{\partial^2 H}{\partial x_t \partial r_t} (dx_t)(dr_t) + \tilde{\lambda} \Delta H \\ &= e^{-\beta t} \frac{x_t^\delta}{\delta} [\delta h(r_t + \pi_1^* \lambda_s v_t + \pi_2^* \lambda_v v_t + \pi_3^* \lambda_r r_t - \pi_4^* \lambda) + \alpha_v (\theta_v - v_t) h_v] dt \\ &\quad + e^{-\beta t} \frac{x_t^\delta}{\delta} \left[\frac{1}{2} \delta (1-\delta) h((\pi_1^*)^2 v_t + (\pi_2^*)^2 v_t + (\pi_3^*)^2 \sigma_r^2 r_t) + \frac{1}{2} \sigma_v^2 v_t h_{vv} \right] dt \\ &\quad + e^{-\beta t} \frac{x_t^\delta}{\delta} \left[\alpha_r (\theta_r - r_t) h_r + \delta \pi_2^* \sigma_v v_t h_v + \delta \pi_3^* \sigma_r^2 r_t h_r + \tilde{\lambda} h (1 + \pi_4^*)^\delta \right] dt \\ &\quad + e^{-\beta t} \frac{x_t^\delta}{\delta} h \left[\left(\left(\delta \pi_2^* + \frac{\sigma_v h_v}{h} \right) dW_{v,t} \right) \sqrt{v_t} + \left(\delta \pi_3^* + \frac{h_r}{h} \right) \sigma_r \sqrt{r_t} dW_{r,t} \right] \\ &\quad + e^{-\beta t} \frac{x_t^\delta}{\delta} \left[h_t dt - \beta h dt + \frac{1}{2} \sigma_r^2 r_t h_{rr} dt - \tilde{\lambda} h dt + h \delta \pi_1^* dW_{s,t} + h \pi_4^* dN_t \right]. \end{aligned}$$

进一步, 根据 $H(x_t, v_t, r_t, t)$ 和 $h(v_t, r_t, t)$ 的表达式及(6.2.7)式, 有

$$\begin{aligned} \frac{dH_t}{H_t} &= \delta \pi_1^* \sqrt{v_t} dW_{s,t} + \left(\delta \pi_2^* + \frac{h_v}{h} \sigma_v \right) \sqrt{v_t} dW_{v,t} + \left(\delta \pi_3^* + \frac{h_r}{h} \right) \sigma_r \sqrt{r_t} dW_{r,t} + \pi_4^* dN_t \\ &= \left(\frac{\delta \lambda_v}{1-\delta} + \frac{\sigma_v A(t)}{1-\delta} \right) \sqrt{v_t} dW_{v,t} + \left(\frac{\delta \lambda_r}{(1-\delta) \sigma_r} + \frac{\sigma_r B(t)}{1-\delta} \right) \sqrt{r_t} dW_{r,t} \\ &\quad + \frac{\delta \lambda_s}{1-\delta} \sqrt{v_t} dW_{s,t} + \left[\left(\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} \right)^{\frac{1}{1-\delta}} - 1 \right] dN_t. \end{aligned}$$

假定

$$\begin{cases} g_1(t) = \frac{\delta\lambda_s}{1-\delta} \\ g_2(t) = \frac{\delta\lambda_v}{1-\delta} + \frac{\sigma_v A(t)}{1-\delta} \\ g_3(t) = \frac{\delta\lambda_r}{(1-\delta)\sigma_r} + \frac{\sigma_r B(t)}{1-\delta}, \\ g_4(t) = \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\delta}} - 1 \end{cases}$$

则

$$\frac{dH_t}{H_t} = g_1(t)\sqrt{v_t}dW_{s,t} + g_2(t)\sqrt{v_t}dW_{v,t} + g_3(t)\sqrt{r_t}dW_{r,t} + g_4(t)dN_t.$$

令 $F(H_t) = \ln(H_t)$, 则利用Lévy-Itô公式, 有

$$\begin{aligned} dF(H_t) &= \frac{\partial F(H_t)}{\partial t}dt + \frac{\partial F(H_t)}{\partial H_t}H_t g_1(t)\sqrt{v_t}dW_{s,t} + \frac{\partial F(H_t)}{\partial H_t}H_t g_2(t)\sqrt{v_t}dW_{v,t} \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F(H_t)}{\partial H_t^2}H_t^2 g_3^2(t)r_t dt + \int_{R^0} (\ln(H_t + g_4(t)H_t) - \ln(H_t))dN_t \\ &\quad + \int_{R^0} \left\{ (\ln(H_t + g_4(t)H_t) - \ln(H_t)) - \frac{\partial F(H_t)}{\partial H_t}H_t g_4(t) \right\} v(d\xi)dt \\ &\quad + \frac{\partial F(H_t)}{\partial H_t}H_t g_3(t)\sqrt{r_t}dW_{r,t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F(H_t)}{\partial H_t^2}H_t^2 g_1^2(t)v_t dt \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F(H_t)}{\partial H_t^2}H_t^2 g_2^2(t)v_t dt \\ &= g_1(t)\sqrt{v_t}dW_{s,t} + g_2(t)\sqrt{v_t}dW_{v,t} + g_3(t)\sqrt{r_t}dW_{r,t} - \frac{1}{2}g_1^2(t)v_t dt \\ &\quad - \frac{1}{2}g_3^2(t)r_t dt + \int_{R^0} (\ln(1 + g_4(t)) - g_4(t))v(d\xi)dt \\ &\quad - \frac{1}{2}g_2^2(t)v_t dt + \int_{R^0} \ln(1 + g_4(t))dN_t. \end{aligned} \tag{6.2.35}$$

对式(6.2.35)两边在区间 $[0, t]$ 上积分, 可得

$$\begin{aligned} F(H_t) - F(H_0) &= \int_0^t g_1(s)\sqrt{v_s}dW_{s,s} + \int_0^t g_2(s)\sqrt{v_s}dW_{v,s} + \int_0^t g_3(s)\sqrt{r_s}dW_{r,s} \\ &\quad + \int_0^t \int_{R^0} (\ln(1 + g_4(s)) - g_4(s))v(d\xi)ds - \int_0^t \frac{r_s}{2}g_3^2(s)ds \\ &\quad - \int_0^t \frac{v_s}{2}(g_1^2(s) + g_2^2(s))ds + \int_0^t \int_{R^0} \ln(1 + g_4(s))dN_s, \end{aligned}$$

则

$$H_t = H_0 \exp \left\{ \int_0^t g_1(s) \sqrt{v_s} dW_{s,s} + \int_0^t g_2(s) \sqrt{v_s} dW_{v,s} + \int_0^t g_3(s) \sqrt{r_s} dW_{r,s} - \frac{1}{2} \int_0^t (g_1^2(s) + g_2^2(s)) v_s ds - \frac{1}{2} \int_0^t g_3^2(s) r_s ds \right\} \exp \{ (\ln(1 + g_4) - g_4)t \} \\ \times \prod_{i=1}^{N_t} e^{I_i \ln(1 + g_4)}.$$

令

$$H_{11} = \exp \left\{ \int_0^t g_1(s) \sqrt{v_s} dW_{s,s} + \int_0^t g_2(s) \sqrt{v_s} dW_{v,s} - \frac{1}{2} \int_0^t (g_1^2(s) + g_2^2(s)) v_s ds \right\}, \\ H_{22} = \exp \left\{ \int_0^t g_3(s) \sqrt{r_s} dW_{r,s} - \frac{1}{2} \int_0^t g_3^2(s) r_s ds \right\}.$$

假定 H_{11} 和 H_{22} 在测度 \mathbb{Q} 下的连续样本路径是相互独立的, 且 H_{11} 和 H_{22} 均为鞅过程, 则根据Cherny(2006)定理2.4可得

$$H_1 = H_{11} \times H_{22} \\ = \exp \left\{ \int_0^t g_1(s) \sqrt{v_s} dW_{s,s} + \int_0^t g_2(s) \sqrt{v_s} dW_{v,s} - \frac{1}{2} \int_0^t (g_1^2(s) + g_2^2(s)) v_s ds \right\} \\ \times \exp \left\{ \int_0^t g_3(s) \sqrt{r_s} dW_{r,s} - \frac{1}{2} \int_0^t g_3^2(s) r_s ds \right\},$$

是一个鞅, 进一步可知 H_t 是一个鞅.

下证 H_{11} 和 H_{22} 为鞅过程.

根据Karatzas等(1998)推论5.13可知, 若

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^t (g_1^2(s) + g_2^2(s)) v_s ds \right) \right] < \infty,$$

则

$$H_{11} = \exp \left\{ \int_0^t g_1(s) \sqrt{v_s} dW_{s,s} + \int_0^t g_2(s) \sqrt{v_s} dW_{v,s} - \frac{1}{2} \int_0^t (g_1^2(s) + g_2^2(s)) v_s ds \right\},$$

是一个鞅.

若

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^t g_3^2(s) r_s ds \right) \right] < \infty,$$

则

$$H_{22} = \exp \left\{ \int_0^t g_3(s) \sqrt{r_s} dW_{r,s} - \frac{1}{2} \int_0^t g_3^2(s) r_s ds \right\},$$

是一个鞅.

进一步, 由于 v_t 和 r_t 均服从CIR过程, 根据Kraft(2005)命题5.1可知, 若

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^t (g_1^2(s) + g_2^2(s)) v_s ds \right) \right] < \infty,$$

则需要满足

$$\min \left(-\frac{1}{2} (g_1^2(t) + g_2^2(t)) \right) \geq -\frac{\alpha_v^2}{2\sigma_v^2}. \quad (6.2.36)$$

若

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^t g_3^2(s) r_s ds \right) \right] < \infty,$$

则需要满足

$$\min \left(-\frac{1}{2} g_3^2(t) \right) \geq -\frac{\alpha_r^2}{2\sigma_r^2}. \quad (6.2.37)$$

接下来将证明不等式(6.2.36)和式(6.2.37)成立的条件.

对于式(6.2.36), 有

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} (g_1^2(t) + g_2^2(t)) &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_v \delta}{1-\delta} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_v \delta}{1-\delta} + \frac{\sigma_v}{1-\delta} A(t) \right)^2 \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_v^2}{(1-\delta)^2} A^2(t) + \frac{2\delta\lambda_v\sigma_v}{(1-\delta)^2} A(t) + \frac{\delta^2(\lambda_v^2 + \lambda_s^2)}{(1-\delta)^2} \right), \end{aligned} \quad (6.2.38)$$

对(6.2.38)式关于 t 求偏导数, 有

$$\left(-\frac{1}{2} (g_1^2(t) + g_2^2(t)) \right)' = -\frac{\sigma_v}{(1-\delta)^2} A'(t) \left(\sigma_v A(t) + \delta\lambda_v \right). \quad (6.2.39)$$

将式(6.2.15)和式(6.2.19)代入(6.2.17), 有

$$A'(t) = -\frac{2c_v d_v^2 e^{-d_v(T-t)}}{(-b_v + d_v + (b_v + d_v)e^{-d_v(T-t)})^2}.$$

当 $\delta < 0$ 时, $A'(t) > 0$, 又根据 $A(T) = 0$, 有 $A(t) < 0$, 此时

$$\left(-\frac{1}{2}(g_1^2(t) + g_2^2(t))\right)' > 0,$$

则, 方程(6.2.38)在 $t = 0$ 时取最小值;

当 $0 < \delta < 1$ 时, $A'(t) < 0$, 又根据 $A(T) = 0$, 有 $A(t) > 0$, 此时

$$\left(-\frac{1}{2}(g_1^2(t) + g_2^2(t))\right)' > 0,$$

则, 方程(6.2.38)在 $t = 0$ 时取最小值.

综合来看, 方程(6.2.38)在 $\delta < 1$, 且 $\delta \neq 0$ 时, 在 $t = 0$ 时取最小值

$$\begin{aligned} \min \left[-\frac{1}{2}(g_1^2(t) + g_2^2(t)) \right] &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_v^2 A^2(0)}{(1-\delta)^2} + \frac{2\delta \lambda_v \sigma_v A(0)}{(1-\delta)^2} + \frac{\delta^2 (\lambda_v^2 + \lambda_s^2)}{(1-\delta)^2} \right) \\ &\geq -\frac{\alpha_v^2}{2\sigma_v^2}. \end{aligned}$$

同理可得

$$\min \left[-\frac{1}{2}g_3^2(t) \right] = -\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_r^2 B^2(0)}{(1-\delta)^2} + \frac{2\delta \lambda_r B(0)}{(1-\delta)^2} + \frac{\delta^2 \lambda_r^2}{(1-\delta)^2 \sigma_r^2} \right) \geq -\frac{\alpha_r^2}{2\sigma_r^2}.$$

下证 $H(x_t, v_t, r_t, t)$ 是最优值函数.

根据以上证明可知 $H(x_t, v_t, r_t, t)$ 是一个鞅, 则根据鞅的定义, 有

$$\mathbb{E}[U(x_T^{\pi^*}) | x_t = x, v_t = v, r_t = r] = H(x_t, v_t, r_t, t).$$

假定 π 是任意的可容许策略. 且定义过程 $L_t = \{x_t^{\pi^*}\}^{\delta-1} x_t^{\pi} h(v_t, r_t, t)$, 根据财富过程、波动率、利率满足的方程及Itô引理可得

$$\begin{aligned} dL_t &= (x_t^{\pi^*})^{\delta-1} x_t^{\pi} \left[h_t + (\delta-1)(r_t + \pi_1^* \lambda_s v_t + \pi_2^* \lambda_v v_t + \pi_3^* \lambda_r r_t - \lambda \pi_4^*) h + h r_t \right. \\ &\quad + h(\pi_1 \lambda_s v_t + \pi_2 \lambda_v v_t + \pi_3 \lambda_r r_t - \lambda \pi_4) + \frac{h}{2}(\delta-1)(\delta-2)[(\pi_1^*)^2 v_t \\ &\quad + (\pi_2^*)^2 v_t + (\pi_3^*)^2 r_t] + \frac{h_{vv}}{2} \sigma_v^2 v_t + h_v \alpha_v (\theta_v - v_t) + h_r \alpha_r (\theta_r - r_t) \\ &\quad + (\delta-1)h[(\pi_1^* \pi_1 + \pi_2^* \pi_2) v_t + \pi_3^* \pi_3 \sigma_r^2 r_t] + \frac{h_{rr}}{2} \sigma_r^2 r_t + h_v \pi_2 \sigma_v v_t \\ &\quad \left. + (\delta-1)h_v \pi_2^* \sigma_v v_t + (\delta-1)h_r \pi_3^* \sigma_r^2 r_t + h_r \pi_3 \sigma_r^2 r_t \right] dt \\ &\quad + (x_t^{\pi^*})^{\delta-1} x_t^{\pi} h(\delta-1) \pi_1^* \sqrt{v_t} dW_{s,t} + (x_t^{\pi^*})^{\delta-1} x_t^{\pi} h(\delta-1) \pi_3^* \sigma_r \sqrt{r_t} dW_{r,t} \\ &\quad + (x_t^{\pi^*})^{\delta-1} x_t^{\pi} h_v \sigma_v \sqrt{v_t} dW_{v,t} + (x_t^{\pi^*})^{\delta-1} x_t^{\pi} h_r \sigma_r \sqrt{r_t} dW_{r,t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (x_t^{\pi^*})^{\delta-1} x_t^{\pi} h \pi_1 \sqrt{v_t} dW_{s,t} + (x_t^{\pi^*})^{\delta-1} x_t^{\pi} h \pi_2 \sqrt{v_t} dW_{v,t} \\
& + (x_t^{\pi^*})^{\delta-1} x_t^{\pi} h \pi_3 \sigma_r \sqrt{r_t} dW_{r,t} + (\tilde{\lambda} \Delta L_1 dN_t + \tilde{\lambda} \Delta L_2 dN_t),
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\Delta L_1 & = ((1 + \pi_4^*)^{\delta-1} - 1) (x_t^{\pi^*})^{\delta-1} x_t^{\pi} h, \\
\Delta L_2 & = (x_t^{\pi^*})^{\delta-1} x_t^{\pi} \pi_4 h,
\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}
\frac{dL_t}{L_t} & = \frac{h_v}{h} \sigma_v \sqrt{v_t} dW_{v,t} + \frac{h_r}{h} \sigma_r \sqrt{r_t} dW_{r,t} + (\delta - 1) \pi_1^* \sqrt{v_t} dW_{s,t} + \pi_2 \sqrt{v_t} dW_{v,t} \\
& + (\delta - 1) \pi_3^* \sigma_r \sqrt{r_t} dW_{r,t} + \pi_1 \sqrt{v_t} dW_{s,t} + \pi_3 \sigma_r \sqrt{r_t} dW_{r,t} + \tilde{\lambda} \pi_4 dN_t \\
& + (\delta - 1) \pi_2^* \sqrt{v_t} dW_{v,t} + \tilde{\lambda} ((1 + \pi_4^*)^{\delta-1} - 1) dN_t,
\end{aligned}$$

进一步, 有

$$\begin{aligned}
\frac{dL_t}{L_t} & = A(t) \sigma_v \sqrt{v_t} dW_{v,t} + B(t) \sigma_r \sqrt{r_t} dW_{r,t} + (\delta - 1) \pi_1^* \sqrt{v_t} dW_{s,t} + \pi_2 \sqrt{v_t} dW_{v,t} \\
& + (\delta - 1) \pi_3^* \sigma_r \sqrt{r_t} dW_{r,t} + \pi_1 \sqrt{v_t} dW_{s,t} + \pi_3 \sigma_r \sqrt{r_t} dW_{r,t} + \tilde{\lambda} \pi_4 dN_t \\
& + (\delta - 1) \pi_2^* \sqrt{v_t} dW_{v,t} + \tilde{\lambda} ((1 + \pi_4^*)^{\delta-1} - 1) dN_t \\
& = ((\delta - 1) \pi_1^* + \pi_1) \sqrt{v_t} dW_{s,t} + (A(t) \sigma_v + (\delta - 1) \pi_2^* + \pi_2) \sqrt{v_t} dW_{v,t} \\
& + (B(t) + (\delta - 1) \pi_3^* + \pi_3) \sigma_r \sqrt{r_t} dW_{r,t} + \tilde{\lambda} ((1 + \pi_4^*)^{\delta-1} - 1 + \pi_4) dN_t \\
& = g_1^{L_t}(t) \sqrt{v_t} dW_{s,t} + g_2^{L_t}(t) \sqrt{v_t} dW_{v,t} + g_3^{L_t}(t) \sigma_r \sqrt{r_t} dW_{r,t} + g_4^{L_t}(t) dN_t,
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
g_1^{L_t}(t) & = ((\delta - 1) \pi_1^* + \pi_1), \\
g_2^{L_t}(t) & = (A(t) \sigma_v + (\delta - 1) \pi_2^* + \pi_2), \\
g_3^{L_t}(t) & = (B(t) + (\delta - 1) \pi_3^* + \pi_3), \\
g_4^{L_t}(t) & = \tilde{\lambda} ((1 + \pi_4^*)^{\delta-1} - 1 + \pi_4).
\end{aligned}$$

进一步, 根据 H_t 鞅性的证明过程, 同理可证 L_t 是一个鞅. 又根据函数 $h(v_t, r_t, t) = e^{A(t)v_t + B(t)r_t + D(t)}$ 恒大于零, 则 L_t 是一个上鞅, 从而有

$$\mathbb{E}[U(x_T^{\pi}) | \mathcal{F}_t] \leq \mathbb{E}[U(x_T^{\pi^*}) | \mathcal{F}_t] + \mathbb{E}[U_x(x_T^{\pi^*})(x_T^{\pi} - x_T^{\pi^*}) | \mathcal{F}_t]$$

$$\begin{aligned} &\leq \mathbb{E}[U(x_T^{\pi^*}) | \mathcal{F}_t] + L(\tilde{t}) - \delta \mathbb{E}[H(x_T^{\pi^*}, v_{\tilde{t}}, r_{\tilde{t}}, T) | \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}[U(x_T^{\pi^*}) | \mathcal{F}_t], \end{aligned}$$

即 $H^\pi(x_t, v_t, r_t, t) \leq H^{\pi^*}(x_t, v_t, r_t, t)$. 因此, $H^{\pi^*}(x_t, v_t, r_t, t)$ 是原始问题的最优解, 且 π^* 是最优投资策略.

本节中定理6.1给出了基于4/2-CIR跳扩散随机投资组合模型的最优风险敞口及最优投资策略. 在投资者持有资产银行存款、利率未定权益、股票指数及其衍生产品价格已知的前提下, 可获得相应模型的参数估计值. 根据估计所得参数值及(6.2.4)式和(6.2.5)式可得幂效用函数下投资者的最优风险敞口及投资者对每种资产的投资份额, 进而帮助投资者做出最优的投资决策. 此外, 命题6.1及定理6.2给出了值函数 $H(x_t, v_t, r_t, t)$ 定义良好的条件及HJB方程解、相关风险敞口和投资决策的最优性, 为定理6.1的应用提供了理论支撑.

注: 当4/2-CIR跳扩散随机混合模型中的 $\lambda = 0, \eta = 0$ 时, 该问题可退化为4/2随机波动率模型下最后投资组合问题(Cheng和Escobar-Anel, 2021); 当 $\lambda = 0, \eta \neq 0$ 时, 该问题可退化为4/2-CIR随机混合模型下的最优投资决策问题(Ma等, 2023).

6.3 基于4/2-CIR跳扩散投资组合模型的次优策略及效用损失

本小节主要考虑忽略跨期期限的次优风险敞口 $\pi^s = (\pi_1^s, \pi_2^s, \pi_3^s, \pi_4^s)^\top$, 并对投资者采用次优策略时的效用损失进行研究.

假定 $H^{\pi^s}(x_t, v_t, r_t, t) \leq H^{\pi^*}(x_t, v_t, r_t, t)$ 是次优策略 π^s 下投资者的值函数, 当且仅当 π^s 为最优策略时等号成立, $H^{\pi^*}(x_t, v_t, r_t, t)$ 如式(6.2.3)所示, $H^{\pi^s}(x_t, v_t, r_t, t)$ 满足以下方程

$$\begin{aligned} 0 = & H_t^{\pi^s} + x_t(r_t + \pi_1^s \lambda_s v_t + \pi_2^s \lambda_v v_t + \pi_3^s \lambda_r r_t - \lambda \pi_4^s) H_x^{\pi^s} + \alpha_r (\theta_r - r_t) H_r^{\pi^s} \\ & + \frac{1}{2} x_t^2 (\pi_1^{s2} v_t + \pi_2^{s2} v_t + \pi_3^{s2} \sigma_r^2 r_t) H_{xx}^{\pi^s} + \alpha_v (\theta_v - v_t) H_v^{\pi^s} + \frac{1}{2} \sigma_v^2 v_t H_{vv}^{\pi^s} \\ & + \frac{1}{2} \sigma_r^2 r_t H_{rr}^{\pi^s} + \pi_2^s x_t \sigma_v v_t H_{xv}^{\pi^s} + \pi_3^s x_t \sigma_r^2 r_t H_{xr}^{\pi^s} + \tilde{\lambda} \Delta H^{\pi^s}, \end{aligned} \quad (6.3.1)$$

其中, $\pi_1^s, \pi_2^s, \pi_3^s, \pi_4^s$ 为次优风险敞口, 边界条件 $H^{\pi^s}(x_T, v_T, r_T, T) = e^{-\beta T} \frac{x_T^\delta}{\delta}$, $\Delta H^{\pi^s} = H^{\pi^s}(x_t(1 + \pi_4^s), v_t, r_t, t) - H^{\pi^s}(x_t, v_t, r_t, t)$.

命题 6.2 偏微分方程(6.3.1)具有如下形式的解

$$H^{\pi^s}(x_t, v_t, r_t, t) = e^{-\beta t} \frac{x_t^\delta}{\delta} \exp\{A^s(t)v_t + B^s(t)r_t + D^s(t)\}, \quad (6.3.2)$$

此时, 次优风险敞口如下

$$\begin{cases} \pi_1^s = \frac{\lambda_s}{1-\delta} \\ \pi_2^s = \frac{\lambda_v}{1-\delta} \\ \pi_3^s = \frac{\lambda_r}{(1-\delta)\sigma_r^2} \\ \pi_4^s = \left(\frac{\lambda}{\bar{\lambda}}\right)^{\frac{1}{\delta-1}} - 1 \end{cases}, \quad (6.3.3)$$

次优投资策略为

$$\begin{bmatrix} \pi_s^s(t) & \pi_b^s(t) & \pi_{o1}^s(t) & \pi_{o2}^s(t) \end{bmatrix}^T = G^{-1} \begin{bmatrix} \pi_1^s & \pi_2^s & \pi_3^s & \pi_4^s \end{bmatrix}^T, \quad (6.3.4)$$

其中, G^{-1} 详见(6.2.31)式

$$\begin{aligned} A^s(t) &= \frac{A_1^s A_2^s (1 - e^{-d_v^s(T-t)})}{A_1^s - A_2^s e^{-d_v^s(T-t)}}, \\ B^s(t) &= \frac{B_1^s B_2^s (1 - e^{-d_r^s(T-t)})}{B_1^s - B_2^s e^{-d_r^s(T-t)}}, \\ D^s(t) &= \int_t^T \alpha_v \theta_v A^s(s) ds + \int_t^T \alpha_r \theta_r B^s(s) ds + c(T-t), \end{aligned}$$

且 c 的表达式详见式(6.2.25)

$$\begin{aligned} A_1^s &= \frac{-b_v^s + d_v^s}{a_v^s}, & A_2^s &= \frac{-b_v^s - d_v^s}{a_v^s}, & B_1^s &= \frac{-b_r^s + d_r^s}{a_r^s}, & B_2^s &= \frac{-b_r^s - d_r^s}{a_r^s}, \\ a_v^s &= \sigma_v^2, & b_v^s &= \frac{\delta \sigma_v}{1-\delta} \lambda_v - \alpha_v, & c_v^s &= \frac{\delta}{1-\delta} (\lambda_v^2 + \lambda_s^2), & d_v^s &= \sqrt{b_v^{s2} - a_v^s c_v^s}, \\ a_r^s &= \sigma_r^2, & b_r^s &= \frac{\delta}{1-\delta} \lambda_r - \alpha_r, & c_r^s &= 2\delta + \frac{\delta}{1-\delta} \frac{\lambda_r^2}{\sigma_r^2}, & d_r^s &= \sqrt{b_r^{s2} - a_r^s c_r^s}. \end{aligned}$$

证明过程同定理6.1, 故不在赘述.

本文以投资者采用次优策略时的财富损失百分比度量损失, 即

$$H^{\pi^*}(x_t(1-L^{\pi^s}), v_t, r_t, t) = H^{\pi^s}(x_t, v_t, r_t, t),$$

其中, H^{π^*} 和 H^{π^s} 表示投资者利用最优和次优策略下的值函数. 此外, 由于间接效用函数为指数仿射形式, 故损失 L^{π^s} 如下

$$L^{\pi^s} = 1 - \exp \left\{ \frac{1}{\delta} \left[(A^s(t) - A(t))v_t + (B^s(t) - B(t))r_t + (D^s(t) - D(t)) \right] \right\}. \quad (6.3.5)$$

下文给出了主要参数敏感性分析的数值示例, 以验证本文构建的4/2-CIR跳扩

散随机混合投资组合模型中各参数对最优风险敞口及损失函数的影响. 此外, 为体现本文所得最优投资策略的优点, 以投资者采用4/2随机波动率模型下投资决策及4/2-CIR随机混合模型下投资决策时的财富损失百分比度量不同模型下所得投资策略的优劣. 若损失函数为正, 则表明基于4/2-CIR跳扩散随机混合模型所得投资策略较优.

6.4 数值算例及分析

本节对幂效用函数下基于4/2-CIR跳扩散随机混合模型的最优风险敞口及效用损失进行数值分析, 探讨模型中重要参数对最优风险敞口及效用损失的影响. 在本节中, 除非另有说明, 模型参数值如下: $\lambda_s = 2.2472, \lambda_v = -6.6932, \sigma_v = 0.2941, \alpha_v = 2.8278, \theta_v = 0.0563, \delta = -0.8123, \lambda_r = -0.1132, \sigma_r = 0.0566, \alpha_r = 0.1300, \theta_r = 0.0025, \lambda = 0.3, \tilde{\lambda} = 0.1, \beta = 0.5, t = 0, T = 1, v_0 = 0.4, r_0 = 0.03, \rho = -0.2292, \kappa = 5, \eta = -0.5973$, 基本参数来源于Escobar等(2015, 2018), 主观贴现率是适当假定的.

6.4.1 4/2-CIR跳扩散投资组合模型参数对最优风险敞口的影响

图6.1-图6.3给出了4/2-CIR跳扩散随机混合投资组合模型中风险规避因子 δ 、投资期限 T 、股票风险溢价 λ_s 、波动率风险溢价 λ_v 、利率风险溢价 λ_r 及跳跃风险溢价 λ 对风险因子 $W_{s,t}, W_{v,t}, W_{r,t}$ 及 N_t 的最优风险敞口 $\pi_1^*, \pi_2^*, \pi_3^*, \pi_4^*$ 的影响.

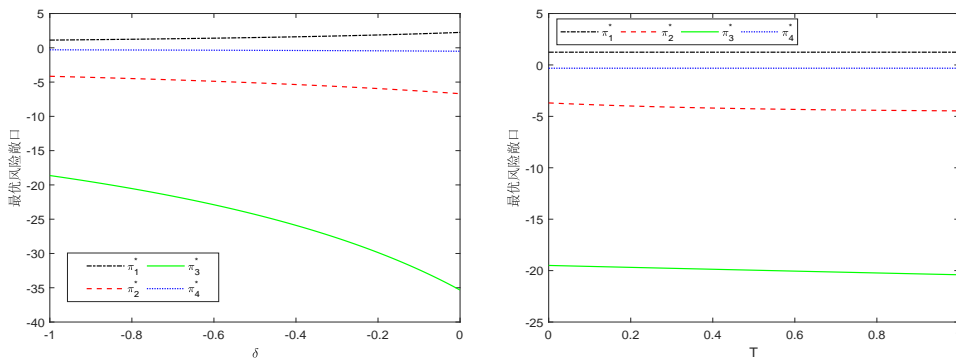


图6.1 参数 δ 和 T 对最优风险敞口的影响

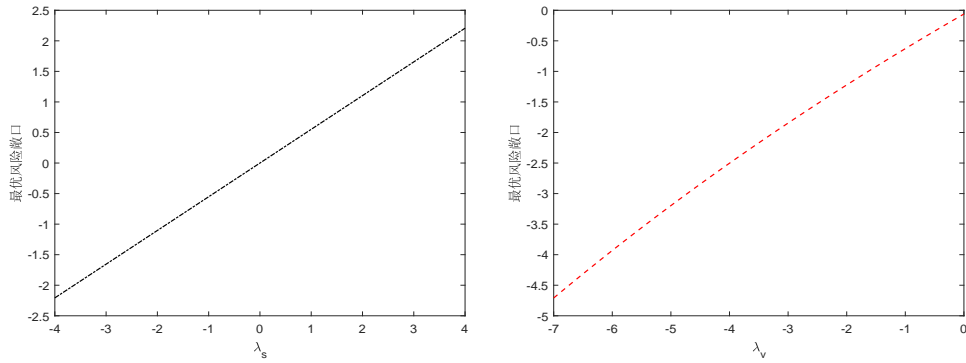


图6.2 参数 λ_s 和 λ_v 对最优风险敞口的影响

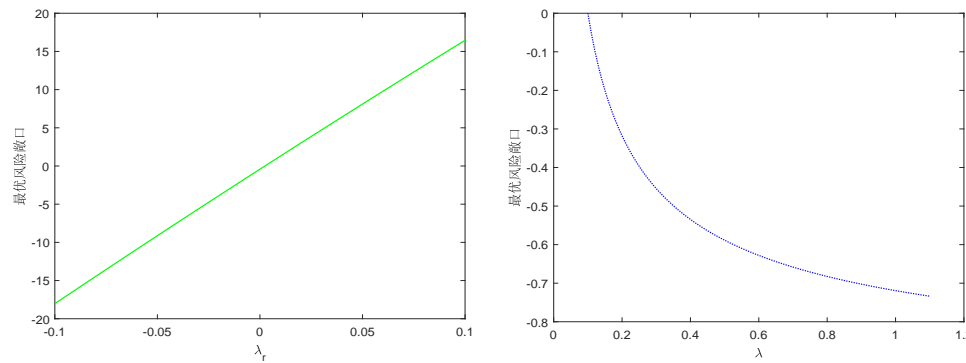


图6.3 参数 λ_r 和 λ 对最优风险敞口的影响

图6.1表明, 股票风险因子、波动率风险因子、利率风险因子及跳跃风险因子的最优风险敞口 π_1^* , π_2^* , π_3^* , π_4^* 的绝对值随着 δ 的递减而下降. 这主要是因为 δ 越小, 风险厌恶系数 $1 - \delta$ 越大, 风险厌恶型投资者为承担较少的风险, 使得投资较为保守. 此外, 投资期限 T 对波动率风险因子和利率风险因子的最优风险敞口 π_2^* 和 π_3^* 具有一定影响, 而对股票风险因子和跳跃风险因子的最优风险敞口 π_1^* 和 π_4^* 的影响不显著.

图6.2分别给出了股票风险溢价参数 λ_s 与最优风险敞口 π_1^* 的关系及波动率风险溢价参数 λ_v 与最优风险敞口 π_2^* 的关系. 具体来看, 风险因子 $W_{s,t}$ 的最优风险敞口 π_1^* 随股票风险溢价参数 λ_s 的增加而增大; 风险因子 $W_{v,t}$ 的最优风险敞口 π_2^* 随波动率风险溢价参数 λ_v 的增加而增大. 总之, 最优风险敞口随风险溢价参数的增加而增大. 风险溢价参数为正时, 随着风险溢价参数的增加投资者对风险的容忍度越大, 更愿意采取激进的投资策略来补偿增加的风险, 从而使投资风险增加, 最优风险敞口也随之增大. 当风险溢价为负时, 最优风险敞口也为负, 此时投资者会采取较为稳健的投资策略, 以降低风险并保护自己的投资收益.

图6.3所示为利率风险溢价参数 λ_r 和跳风险溢价参数 λ 对风险因子 $W_{r,t}$ 和 N_t 的最优风险敞口 π_3^* 和 π_4^* 的影响. 首先, 风险因子 $W_{r,t}$ 的最优风险敞口 π_3^* 随着 λ_r 的增加

而增大. 风险溢价参数为负时, 相应的最优风险敞口也为负, 投资者将会通过稳健的投资策略降低风险. 其次, 图6.3 表明, 风险因子 N_t 的最优风险敞口 π_4^* 为负值, 即在具有跳跃风险的情况下, 为降低风险投资者会采取较为稳健的投资策略. 此外, 随着跳跃强度的增加, 最优风险敞口的绝对值增大, 这是因为跳跃强度越大, 投资者面临的投资风险增加, 最优风险敞口也随之增加.

6.4.2 4/2-CIR跳扩散投资组合模型参数对效用损失的影响

在金融市场投资问题中, 投资者忽略跨期对冲策略会致使短视行为的发生, 使得投资策略并非最优策略, 进而导致效用的损失. 基于6.2.3节的讨论, 本小节通过数值计算的方法, 深入分析模型主要参数对短视损失的影响.

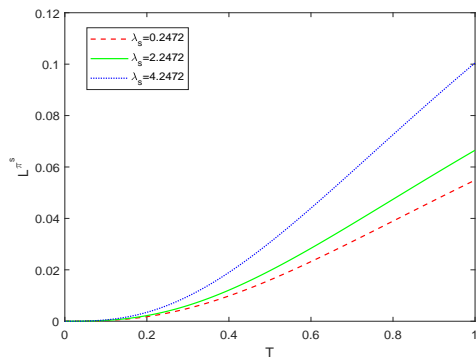


图6.4 参数 λ_β 对短视损失的影响

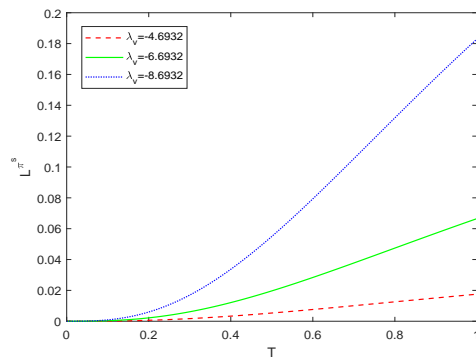


图6.5 参数 λ_γ 对短视损失的影响

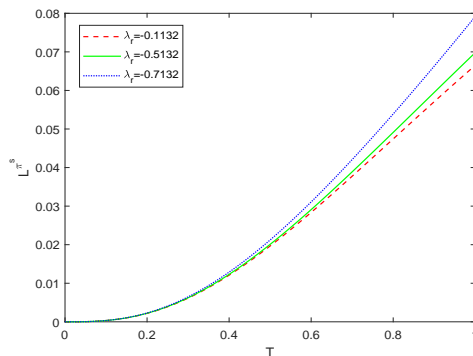


图6.6 参数 λ_r 对短视损失的影响

图6.4表明, 风险溢价因子为正时, 短视损失随风险溢价因子的增加而增大. 这主要是由于当风险溢价因子为正时, 随着风险溢价因子的增大, 投资者对风险的容忍度越高, 更愿意采取激进的投资策略, 使得短视损失的风险增加, 导致短视损失增加. 图6.5-6.6表明, 当风险溢价因子为负时, 短视损失随风险溢价因子的增加而减小. 这主要是因为风险溢价因子为负时, 随着风险溢价因子的增大, 投资者对

风险的容忍度越低,更愿意采取保守的决策,从而使得短视损失减小.

为体现本文所得投资策略的优点,将4/2-CIR模型下的投资策略分别与4/2随机波动率模型下的投资策略及4/2-CIR随机混合模型下的投资策略进行对比,以采用不同模型时所产生的效用损失来分析投资决策的优劣,结果详见图6.8-6.9.

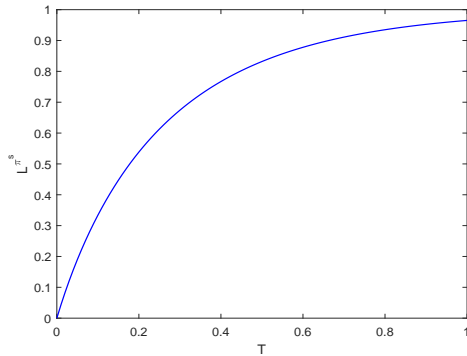


图6.7 忽略跳特征引起的损失

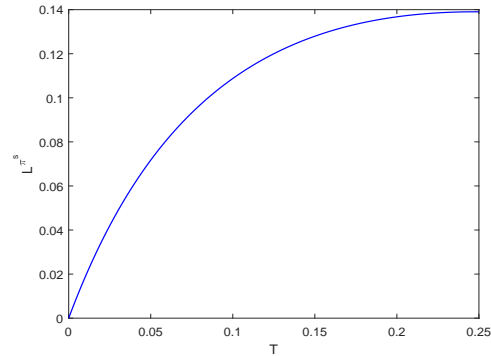


图6.8 忽略跳及利率随机性引起的损失

图6.7所示为忽略跳特征所引起的损失.由图可知损失函数值大于零,即与4/2-CIR跳扩散随机混合模型下的投资策略相比,采用4/2-CIR随机混合模型所得策略进行投资会增加投资者的损失.图6.8为忽略跳及利率随机性特征引起的损失.图6.8所示损失函数值为正,说明相比于4/2随机波动率模型下的投资策略,4/2-CIR跳扩散随机混合模型下的投资决策更优.此外,图6.7-6.8表明,随着投资时间的增加,损失函数不断增大,说明时间投资时间越长,资产跳跃特征及市场利率随机性特征对投资决策的影响越显著.

6.5 本章小结

金融资产数据呈现出尖峰、厚尾、非对称、跳跃及波动率集聚等特征,并且随着国家经济政策、金融市场状况等的不断变化,市场利率不再是一个常数,而是随机变化的.因此,基于已有研究成果,本章在期望效用最大化准则下,研究了基于4/2-CIR跳扩散随机混合模型的最优投资决策问题.首先,构建了4/2-CIR跳扩散随机混合投资组合模型,并在金融市场由货币市场账户、零息债券、股票指数及股票衍生品组成的假定下,获得了终端财富满足的动态方程.其次,基于4/2-CIR跳扩散投资组合模型,获得了幂效用函数下最优投资问题值函数所满足的HJB方程,并应用动态规划原理和变量代换等方法获得了最优风险敞口、最优值函数及最优投资策略的解析表达式.接着,对4/2-CIR跳扩散投资组合模型下的次优策略及短视效用进行分析.最后,给出数值算例,分析投资组合模型主要参

数对最优风险敞口和短视损失的影响.

结果表明: (1) 风险厌恶系数越大, 最优风险敞口越小, 即风险厌恶系数越大, 表明投资者为降低风险, 使得投资较为保守, 从而使最优风险敞口减小; (2) 投资期限对波动率风险因子及利率风险因子的最优风险敞口具有一定的影响, 而对股票风险因子及跳跃风险因子的最优风险敞口的影响不显著; (3) 股票风险因子、波动率风险因子及利率风险因子所对应的最优风险敞口随相关风险溢价参数的增加而增大, 且当风险溢价参数为负时, 相应的最优风险敞口也为负, 此时投资者为降低风险会采取较为稳健的投资策略; (4) 跳跃风险的最优风险敞口随跳跃强度的增加而减小, 随着跳跃强度的增加, 投资者所面临的跳跃风险越大, 并且在具有跳跃的情况下, 最优风险敞口为负, 意味着投资者为降低跳跃风险而采取更为稳健的投资, 致使最优风险敞口减小; (5) 风险溢价因子为正时, 短视损失随溢价因子的增加而增大; 风险溢价因子为负时, 短视损失随风险溢价因子的增加而减小. (6) 与现有基于4/2-CIR随机混合模型及4/2随机波动率模型的投资决策相比, 本文所得4/2-CIR跳扩散随机混合模型下的投资决策最优. 这表明对持有资产价格趋势及市场利率随机性的精确刻画, 有助于投资者做出最优的投资决策、减少投资风险.

7 总结与展望

本章从构建模型、期权定价精度及投资组合策略三方面对全文进行总结. 此外, 基于现有研究提出了有待进一步探究的问题.

7.1 全文总结

本文基于金融基础资产动态变动特征及市场利率随机性特征对期权定价及最优投资问题进行研究, 旨在通过精确描述金融资产数据特征及市场利率随机波动特征, 改善期权定价模型的定价精度及优化投资组合模型的投资决策. 首先, 以标的资产价格动态变化特征及市场利率的随机性特征为切入点, 分别构建了4/2-CIR随机混合模型、4/2跳扩散随机混合模型及4/2-CIR跳扩散随机混合模型, 并通过Itô引理、傅里叶变换及欧拉变换等获得了相应模型下的欧式期权定价公式. 其次, 通过数值模拟及实证算例分析不同视角下模型的定价性能及精度. 最后, 在效用函数最大化准则下构建最优投资组合模型, 根据动态规划原理及随机控制理论获得基于此模型下投资组合问题的最优解, 并通过数值例子分析模型参数对最优风险敞口及效用损失的影响. 具体如下:

(1) 基于金融资产价格的动态变化特征及利率随机波动特征, 依次构建了4/2-CIR随机混合期权定价模型、4/2跳扩散随机混合期权定价模型及4/2-CIR跳扩散随机混合期权定价模型, 并获得了相关模型下期权标的对数资产价格的特征函数及欧式期权定价公式. 其中, 4/2-CIR随机混合模型主要考虑了金融基础资产波动率随机性及市场利率随机性对定价结果的影响; 4/2跳扩散随机混合模型主要关注金融市场基础资产数据的随机波动、尖峰、厚尾及跳跃扩散等特征; 4/2-CIR跳扩散随机混合模型综合考虑了金融资产的非正态特征及市场利率的随机性特征.

(2) 数值分析及实证分析结果表明4/2-CIR随机混合期权定价模型、4/2跳扩散随机混合期权定价模型及4/2-CIR跳扩散随机混合在欧式期权定价中表现出较优的定价性能. 具体来讲, 首先文中通过数值例子探讨市场利率对期权定价结果的影响, 表明4/2-CIR随机混合模型构建的合理和有效性. 其次, 对期权标的资产描述性统计分析进一步确定了基础资产的动态变化特征, 表明利用4/2跳扩散过程可以高效拟合基础资产价格的动态变动趋势. 最后, 第三章至第五章分别选取了标的资产对应时间段内不同时间的期权值进行实证分析. 从各章节分别来看, 第三章的实证结果表明相比于4/2随机波动率及经典B-S模型而言, 4/2-CIR随机混

合模型在欧式期权定价过程中表现出了较优的定价结果;第四章实证分析表明相比于基准4/2随机波动率模型、3/2随机波动率模型及Heston随机波动率模型而言,4/2跳扩散随机混合模型下的定价性能更优;第五章实证结果表明与同时考虑随机利率及随机波动特征的4/2-CIR及仅考虑标的资产动态变化特征的4/2跳扩散随机混合模型相比,综合考虑期权标的资产动态变化特征及市场利率随机性的4/2-CIR跳扩散随机混合模型在欧式期权定价中的定价精度更高.此外,结合第三章与第五章的实证结果可知,4/2-CIR随机混合模型对于不同时期的期权均表现出较为良好的定价表现;由第四章及第五章的实证结果可知,4/2跳扩散随机混合模型对不同时期的期权同样表现出较为良好的定价性能.总之,本文基于不同视角构建的期权定价模型均能对欧式期权进行合理定价,相对而言,4/2-CIR跳扩散随机混合模型的定价性能更优.

(3) 基于4/2-CIR跳扩散随机混合模型下最优投资组合问题.首先,根据4/2随机混合模型在期权定价中的表现,构建了4/2-CIR跳扩散投资组合模型.其次,通过动态规划及最优化理论获得了该模型下的最优风险敞口、最优投资策略及效用损失,并通过验证性定理证明了HJB方程解的最优性及投资策略的最优性特征.最后,通过数值算例分析了模型参数对最优风险敞口及效用损失的影响,并根据采用不同模型下投资策略所得损失函数值,分析本文所得投资决策的优势.研究表明,风险厌恶系数、投资期限、股票风险溢价参数、波动率风险溢价参数、利率风险溢价参数以及跳跃强度对最优风险敞口具有显著影响.短视损失随正风险溢价的增大而增大,随负风险溢价因子的增大而减小.此外,与现有基于4/2随机波动率模型及4/2-CIR随机混合模型所得投资决策相比,本文基于4/2-CIR跳扩散随机混合模型所得投资决策最优.

7.2 研究展望

本文基于金融市场数据的动态变化特征及市场利率的随机变动特征,对期权定价及投资组合问题展开了较为系统的研究,围绕期权定价及投资组合研究的主要过程,即模型构建、期权定价公式及最优投资策略的求解、模型参数分析及实证分析的步骤进行深入研究,为期权定价及投资组合理论与方法提供了新的研究思路,具有一定的理论及实际意义.但由于金融市场及金融衍生产品的不断发展,加之个人精力和时间的限制,仍存在一些不足之处有待进一步完善:

(1) 本文仅研究了所构建模型对欧式期权的定价性能,但随着金融市场的发

展,期权的品种也在逐渐增加,越来越多的奇异期权引起了广大学者和投资者的关注.因此,为适应金融市场及金融衍生产品的发展,在后续的研究中可以尝试对美式、亚式及障碍期权等进行研究.

(2) 本文在投资组合研究过程中,根据所构建模型通过数值例子分析了模型参数对最优风险敞口和效用损失的影响,并未结合实际数据进行分析.因此,后续可根据已有模型进行实证分析,探讨模型在实际市场中的决策效果.

(3) 目前已有研究证明投资者情绪对期权定价及投资策略具有一定的影响,而本文在期权定价及投资组合模型的构建中仅考虑了期权标的资产的动态变化特征及市场利率的随机波动特征,并未考虑投资者情绪对期权定价及投资决策的影响.因此,后续可以在期权定价和投资组合模型的构建过程中引入投资者情绪指标,探讨其对期权定价及投资策略的具体影响.

参考文献

- [1] Ahlip R, Rutkowski M. Pricing of foreign exchange options under the Heston stochastic volatility model and CIR interest rates[J]. *Quantitative Finance*, 2013, 13(6): 955-966.
- [2] Ahlip R, Rutkowski M. Pricing of foreign exchange options under the MPT stochastic volatility model and the CIR interest rates[J]. *The European Journal of Finance*, 2016, 22(7): 551-571.
- [3] Ahlip R, Park L A F, Prodan A. Pricing currency options in the Heston/CIR double exponential jump-diffusion model[J]. *International Journal of Financial Engineering*, 2017, 4(1): 1750013, doi: 10.1142/s242478631750013x.
- [4] Black F, Scholes M S. The pricing of options and corporate liabilities[J]. *Journal of Political Economy*, 1973, 81(3): 637-654.
- [5] Bartlett B. Hedging under SABR model[J]. *Wilmott Magazine*, 2006, 4(6): 2-4.
- [6] Beliaeva N A, Nawalkha S K, Soto G M. Pricing American interest rate options under the jump-extended Vasicek model[J]. *Journal of Derivatives*, 2008, 16(1): 29.
- [7] Baldeaux J. Exact simulation of the 3/2 model[J]. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 2012, 15(5): 1250032, doi: 10.1142/S021902491250032X.
- [8] Baldeaux J, Badran A. Consistent modelling of VIX and equity derivatives using a 3/2 plus jumps model[J]. *Applied Mathematical Finance*, 2014, 21(4): 299-312.
- [9] Berthe E, Dang D M, Ortiz-Gracia L. A Shannon wavelet method for pricing foreign exchange options under the Heston multi-factor CIR model[J]. *Applied Numerical Mathematics*, 2019, 136: 1-22.
- [10] Cox J C, Ingersoll J E, Ross S A. A theory of the term structure of interest rates [J]. *Econometrica*, 1985, 53(2): 385-408.
- [11] Carr P, Geman H, Madan D B, et al. The fine structure of asset returns: an empirical investigation[J]. *The Journal of Business*, 2002, 75(2): 305-332.
- [12] Chacko G, Viceira L M. Dynamic consumption and portfolio choice with stochastic volatility in incomplete markets[J]. *The Review of Financial Studies*, 2005, 18(4): 1369-1402.
- [13] Carr P, Sun J. A new approach for option pricing under stochastic volatility[J]. *Review of Derivatives Research*, 2007, 10: 87-150.
- [14] Černý A, Kallsen J. Mean-variance hedging and optimal investment in Heston's model with correlation[J]. *Mathematical Finance: An International Journal of Mathematics, Statistics and Financial Economics*, 2008, 18(3): 473-492.
- [15] Cai N, Chen N, Wan X. Pricing double-barrier options under a flexible jump diffusion model[J]. *Operations Research Letters*, 2009, 37(3): 163-167.
- [16] Cai N, Chen N, Wan X. Occupation times of jump-diffusion processes with double exponential jumps and the pricing of options[J]. *Mathematics of Operations Research*, 2010, 35(2): 412-437.
- [17] Chang M H, Pang T, Yang Y. A stochastic portfolio optimization model with bounded memory[J]. *Mathematics of Operations Research*, 2011, 36(4): 604-619.
- [18] Choe G H. *Stochastic Analysis for Finance with Simulations*[M]. Springer, Berlin, 2016.

- [19] Chen R D, Li Z X, Zeng L Y, et al. Option pricing under the double exponential jump-diffusion model with stochastic volatility and interest rate[J]. *Journal of Management Science and Engineering*, 2017, 2(4): 252-289.
- [20] Chen S N, Hsu P P. Pricing and hedging barrier options under a Markov-modulated double exponential jump diffusion-CIR model[J]. *International Review of Economics and Finance*, 2018, 56: 330-346.
- [21] Cheng Y, Escobar-Anel M, Gong Z. Generalized mean-reverting 4/2 factor model[J]. *Journal of Risk and Financial Management*, 2019, 12(4): 159, doi: 10.3390/jrfm12040159.
- [22] Chang Y, Wang Y. Option pricing under double stochastic volatility model with stochastic interest rates and double exponential jumps with stochastic intensity[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2020, 2020(3): 1-13.
- [23] Cheng Y, Escobar-Anel M. Optimal investment strategy in the family of 4/2 stochastic volatility models[J]. *Quantitative Finance*, 2021, 21(10): 1723-1751.
- [24] Cheng Y, Escobar-Anel M. Robust portfolio choice under the 4/2 stochastic volatility model[J]. *IMA Journal of Management Mathematics*, 2023, 34(1): 221-256.
- [25] Cheng Y, Escobar-Anel M. Optimal consumption and robust portfolio choice for the 3/2 and 4/2 stochastic volatility models[J]. *Mathematics*, 2023, 11(18): 4020, doi: 10.3390/math11184020.
- [26] Cretarola A, Figá-Talamanca G, Patacca M. Sentiment-driven mean reversion in the 4/2 stochastic volatility model with jumps[J]. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 2024, 40(2): 281-305.
- [27] Cao J, Kim J H, Liu W, et al. Rescaling the double-mean-reverting 4/2 stochastic volatility model for derivative pricing[J]. *Finance Research Letters*, 2023, 58: 104374, doi: 10.1016/j.frl.2023.104374.
- [28] Cherny A. *Stochastic Calculus to Mathematical Finance*[M]. Springer, Berlin, 2006.
- [29] Dai M, Jiang L, Li P, et al. Finite horizon optimal investment and consumption with transaction costs[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2009, 48(2): 1134-1154.
- [30] Drimus G G. Options on realized variance by transform methods: a non-affine stochastic volatility model[J]. *Quantitative Finance*, 2012, 12(11): 1679-1694.
- [31] Deng G. Pricing American put option on zero-coupon bond in a jump-extended CIR model[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2015, 22(1-3): 186-196.
- [32] Egloff D, Leippold M, Wu L. The term structure of variance swap rates and optimal variance swap investments[J]. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 2010, 45(5): 1279-1310.
- [33] Escobar M, Ferrando S, Rubtsov A. Dynamic derivative strategies with stochastic interest rates and model uncertainty[J]. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2018, 86: 49-71.
- [34] Escobar-Anel M, Gong Z. The mean-reverting 4/2 stochastic volatility model: Properties and financial applications[J]. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 2020, 36(5): 836-856.
- [35] El-Khatib Y, Makumbe Z S, Vives J. Approximate option pricing under a two-factor Heston - Kou stochastic volatility model[J]. *Computational Management Science*, 2024, 21(1): 3, doi: 10.1007/s10287-023-00486-8.
- [36] Fleming W H, Zariphopoulou T. An optimal investment/consumption model with borrowing[J]. *Mathematics of Operations Research*, 1991, 16(4): 802-822.

- [37] Fallah S, Mehrdoust F. American option pricing under double Heston stochastic volatility model: simulation and strong convergence analysis[J]. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 2019, 89(7): 1322-1339.
- [38] Fu Y, Zhou S, Li X, et al. Multi-assets Asian rainbow options pricing with stochastic interest rates obeying the Vasicek model[J]. *AIMS Mathematics*, 2023, 8(5): 10685-10710.
- [39] Goard J, Mazur M. Stochastic volatility models and the pricing of VIX options[J]. *Mathematical Finance: An International Journal of Mathematics, Statistics and Financial Economics*, 2013, 23(3): 439-458.
- [40] Goard J. In-arrears interest rate derivatives under the 3/2 model[J]. *Modern Economy*, 2015, 6(6): 707-716.
- [41] Gong X, Zhuang X. Option pricing for stochastic volatility model with infinite activity Lévy jumps[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2016, 455: 1-10.
- [42] Grasselli M. The 4/2 stochastic volatility model: a unified approach for the Heston and the 3/2 model[J]. *Mathematical Finance*, 2017, 27(4): 1013-1034.
- [43] Gudmundsson H, Vyncke D. On the calibration of the 3/2 model[J]. *European Journal of Operational Research*, 2019, 276(3): 1178-1192.
- [44] Guo Z. Option pricing under the Heston model where the interest rate follows the Vasicek model[J]. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 2021, 50(12): 2930-2937.
- [45] Gnoatto A, Grasselli M, Platen E. Calibration to FX triangles of the 4/2 model under the benchmark approach[J]. *Decisions in Economics and Finance*, 2022, 45(1): 1-34.
- [46] Hull J, White A. The pricing of options on assets with stochastic volatilities[J]. *Finance*, 1987, 42 (2): 281-300.
- [47] Hull J, White A. Pricing interest-rate-derivative securities[J]. *The Review of Financial Studies*, 1990, 3(4): 573-592.
- [48] Heston S L. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options[J]. *The Review of Financial Studies*, 1993, 6(2): 327-343.
- [49] Heston S L. A simple new formula for options with stochastic volatility[J]. *Social Science Electronic Publishing*, 1997, 15(4): 23-44.
- [50] Haowen F. European option pricing formula under stochastic interest rate[J]. *Progress in Applied Mathematics*, 2012, 4(1): 14-21.
- [51] Hu W, Zhou J. Backward simulation methods for pricing American options under the CIR process[J]. *Quantitative Finance*, 2017, 17(11): 1683-1695.
- [52] He X J, Zhu S P. A closed-form pricing formula for European options under the Heston model with stochastic interest rate[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2018, 335: 323-333.
- [53] He X J, Chen W. A semianalytical formula for European options under a hybrid Heston-Cox-Ingersoll-Ross model with regime switching[J]. *International Journal of Finance and Economics*, 2021, 26(1): 343-352.
- [54] Huang S, Guo X. Valuation of European-style vulnerable options under the non-affine stochastic volatility and double exponential jump[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2022, 158: 112003, doi: 10.1016/j.chaos.2022.112003.

- [55] Hata H, Yasuda K. Expected power utility maximization with delay for insurers under the 4/2 stochastic volatility model[J]. *Mathematical Control and Related Fields*, 2022: 0-0, doi: 10.3934/mcrf.2022055.
- [56] He X J, Chen W. Pricing foreign exchange options under a hybrid Heston-Cox-Ingersoll-Ross model with regime switching[J]. *IMA Journal of Management Mathematics*, 2022, 33(2): 255-272.
- [57] Huang C S, O'Hara J G, Mataramvura S. Highly efficient Shannon wavelet-based pricing of power options under the double exponential jump framework with stochastic jump intensity and volatility[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2022, 414: 126669, doi: 10.1016/j.amc.2021.126669.
- [58] He X J, Lin S. Analytically pricing European options under a hybrid stochastic volatility and interest rate model with a general correlation structure[J]. *Journal of Futures Markets*, 2023, 43(7): 951-967.
- [59] Jeanblanc M, You M, Chesney M. *Mathematical Methods for Financial Markets*[M]. London: Springer Finance, Springer, 2009.
- [60] Karatzas I, Shreve S E. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*[M]. Springer, 1998.
- [61] Kou S G, Wang H. Option pricing under a double exponential jump diffusion model[J]. *Management Science*, 2004, 50(9): 1178-1192.
- [62] Kwok Y K. *Mathematical Models of Financial Derivatives*[M]. Springer, 2008.
- [63] Kraft H. Optimal portfolios and Heston's stochastic volatility model: an explicit solution for power utility[J]. *Quantitative Finance*, 2005, 5(3): 303-313.
- [64] Lanczos C. A precision approximation of the gamma function[J]. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Series B: Numerical Analysis*, 1964, 1(1): 86-96.
- [65] Liu J. Portfolio selection in stochastic environments[J]. *The Review of Financial Studies*, 2007, 20(1): 1-39.
- [66] Liang L Z J, Lemmens D, Tempere J. Generalized pricing formulas for stochastic volatility jump diffusion models applied to the exponential Vasicek model[J]. *The European Physical Journal B*, 2010, 75: 335-342.
- [67] Lee M K, Yang S J, Kim J H. A closed form solution for vulnerable options with Heston's stochastic volatility[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2016, 86: 23-27.
- [68] Lin W, Li S, Luo X, et al. Consistent pricing of VIX and equity derivatives with the 4/2 stochastic volatility plus jumps model[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2017, 447(2): 778-797.
- [69] Li D, Shen Y, Zeng Y. Dynamic derivative-based investment strategy for mean-variance asset-liability management with stochastic volatility[J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2018, 78: 72-86.
- [70] Liu Y, Jiang I M, Hsu W. Compound option pricing under a double exponential jump-diffusion model[J]. *The North American Journal of Economics and Finance*, 2018, 43: 30-53.
- [71] Luo P, Xiong J, Yang J, et al. Real options under a double exponential jump-diffusion model with regime switching and partial information[J]. *Quantitative Finance*, 2019, 19(6): 1061-1073.
- [72] Liu Z. Option pricing formulas in a new uncertain mean-reverting stock model with floating interest rate[J]. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2020, 2020(1): 1-8.

- [73] Lin Q, Riedel F. Optimal consumption and portfolio choice with ambiguous interest rates and volatility[J]. *Economic Theory*, 2021, 71(3): 1189-1202.
- [74] Lin S, He X J. Analytically pricing European options under a new two-factor Heston model with regime switching[J]. *Computational Economics*, 2022, 59(3): 1069-1085.
- [75] Lv W, Jiang P. Foreign exchange option pricing under the 4/2 stochastic volatility model with CIR interest rates[J]. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 2024, 53(7): 2670-2687.
- [76] Lv G, Xu P, Zhang Y. Pricing of vulnerable options based on an uncertain CIR interest rate model[J]. *AIMS Mathematics*, 2023, 8(5): 11113-11130.
- [77] Lin X C S, Miao D W C, Lee Y I, et al. Option pricing under a double-exponential jump-diffusion model with varying severity of jumps[J]. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 2024, 38(1): 39-64.
- [78] Merton R C. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model[J]. *Journal of Economic Theory*, 1971, 3(4): 373-413.
- [79] Merton R C. Theory of rational option pricing[J]. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 1973, 4(1):141-183.
- [80] Merton R C. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous[J]. *Journal of Financial Economics*, 1976 3(1): 125-144.
- [81] Madan D B, Seneta E. The variance gamma (VG) model for share market returns[J]. *Journal of Business*, 1990: 511-524.
- [82] Maghsoodi Y. Solution of the extended CIR term structure and bond option valuation[J]. *Mathematical Finance*, 1996, 6(1): 89-109.
- [83] Ma Y, Chen L, Lyu J. Option valuation under double exponential jump with stochastic intensity, stochastic interest rates and Markov regime-switching stochastic volatility[J]. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 2023, 52(7): 2043-2056.
- [84] Ma A, Zhang C, Wang Y. Optimal consumption and investment problem under 4/2-CIR stochastic hybrid model[J]. *Mathematics*, 2023, 11(17): 3695, doi: 10.3390/math11173695.
- [85] Nardin M, Perger W F, Bhalla A. Numerical evaluation of the confluent hypergeometric function for complex arguments of large magnitudes [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1992, 39(2): 193-200.
- [86] Nunno G D, Øksendal B, Proske F. *Malliavin Calculus for Lévy Processes with Applications to Finance*[M]. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2008.
- [87] Noh E J, Kim J H. An optimal portfolio model with stochastic volatility and stochastic interest rate[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2011, 375(2): 510-522.
- [88] Najafi A R, Mehrdoust F, Shirinpour S. Pricing American put option on zero-coupon bond under fractional CIR model with transaction cost[J]. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 2018, 47(3): 864-870.
- [89] Stein E M, Stein J C. Stock price distributions with stochastic volatility: an analytic approach[J]. *The Review of Financial Studies*, 1991, 4(4): 727-752.
- [90] Shreve S E. *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*[M]. Springer, New York, 2004.
- [91] Samimia O, Mehrdoust F. Vasicek interest rate model under Lévy process and pricing bond option[J]. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 2024, 53(1): 529-545.

- [92] Shi Z, Lyu P, Ma J. High-order methods for the option pricing under multivariate rough volatility models[J]. *Computers and Mathematics with Applications*, 2023, 139: 173-183.
- [93] Scott L O. Pricing stock options in a jump-diffusion model with stochastic volatility and interest rates: applications of Fourier inversion methods[J]. Blackwell Publishers Inc, 1997, 7(4): 413-426.
- [94] Savku E, Weber G W. Stochastic differential games for optimal investment problems in a Markov regime-switching jump-diffusion market[J]. *Annals of Operations Research*, 2022, 312(2): 1171-1196.
- [95] Vasicek O. An equilibrium characterization of the term structure[J]. *Journal of Financial Economics*, 1977, 5(2): 177-188.
- [96] Vila J L, Zariphopoulou T. Optimal consumption and portfolio choice with borrowing constraints[J]. *Journal of Economic Theory*, 1997, 77(2): 402-431.
- [97] Wei P, Yang C, Zhuang Y. Robust consumption and portfolio choice with derivatives trading[J]. *European Journal of Operational Research*, 2023, 304(2): 832-850.
- [98] Wang W, Muravey D, Shen Y, et al. Optimal investment and reinsurance strategies under 4/2 stochastic volatility model[J]. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2023, 2023(5): 413-449.
- [99] Yuen C H, Zheng W, Kwok Y K. Pricing exotic discrete variance swaps under the 3/2-stochastic volatility models[J]. *Applied Mathematical Finance*, 2015, 22(5): 421-449.
- [100] Yan J A. *Introduction to Stochastic Finance*[M]. Springer, 2018.
- [101] Yang Y, Liu S, Wu Y, et al. Pricing of volatility derivatives in a Heston - CIR model with Markov-modulated jump diffusion[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2021, 393: 113277, doi: 10.1016/j.cam.2020.113277.
- [102] Yang S, Jia Z, Wu Q, et al. Homotopy analysis method for portfolio optimization problem under the 3/2 model[J]. *Journal of Systems Science and Complexity*, 2021, 34: 1087-1101.
- [103] Ye W, Wu B, Chen P. Pricing VIX derivatives using a stochastic volatility model with a flexible jump structure[J]. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 2023, 37(1): 245-274.
- [104] Zhang L H, Zhang W G, Xu W J, et al. The double exponential jump diffusion model for pricing European options under fuzzy environments[J]. *Economic Modelling*, 2012, 29(3): 780-786.
- [105] Zeng X, Taksar M. A stochastic volatility model and optimal portfolio selection[J]. *Quantitative Finance*, 2013, 13(10): 1547-1558.
- [106] Zheng W, Zeng P. Pricing timer options and variance derivatives with closed-form partial transform under the 3/2 model[J]. *Applied Mathematical Finance*, 2016, 23(5): 344-373.
- [107] Zhang X, Shu H, Kan X, Fang Y. The call option pricing based on investment strategy with stochastic interest rate [J]. *Journal of Mathematical Finance*, 2018, 8(1): 43-57.
- [108] Zhu Y L, Wang K, Ren Y. Dynamics of a mean-reverting stochastic volatility equation with regime switching[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2019, 11(1): 105110-1-105110-11.
- [109] Zhu S, Wang B. Unified approach for the affine and non-affine models: an empirical analysis on the S&P 500 volatility dynamics[J]. *Computational Economics*, 2019, 53: 1421-1442.
- [110] Zhang Y. Dynamic optimal mean-variance portfolio selection with a 3/2 stochastic volatility[J]. *Risks*, 2021, 9(4): 61, doi: 10.3390/risks9040061.

- [111] Zhang Y. Dynamic optimal mean-variance investment with mispricing in the family of 4/2 stochastic volatility models[J]. *Mathematics*, 2021, 9(18): 2293, doi: 10.3390/math9182293.
- [112] Zhang Y. Mean-variance asset-liability management under CIR interest rate and the family of 4/2 stochastic volatility models with derivative trading[J]. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 2023, 19(6): 4022-4063.
- [113] Zhang Y. Robust optimal investment strategies for mean-variance asset-liability management under 4/2 stochastic volatility models[J]. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 2023, 25(1): 20, doi: 10.1007/s11009-023-10007-4.
- [114] 安翔, 郭精军. 混合次分数跳扩散模型下回望期权的定价及模拟[J]. *山东大学学报(理学版)*, 2022, 57(04): 100-110.
- [115] 巢文, 邹辉文. 基于双指数跳跃扩散模型的长寿债券定价研究[J]. *中国管理科学*, 2017, 25(9): 46-52.
- [116] 陈有杰, 宋翌, 黄晴, 等. 双指数仿射跳扩散模型下两类奇异期权定价[J]. *数学的实践与认识*, 2023, 53(9): 12-24.
- [117] 邓国和, 杨向群. 随机波动率与双指数跳扩散组合模型的美式期权定价[J]. *应用数学学报*, 2009, 32(2): 236-255.
- [118] 邓国和, 黄艳华. 双指数跳扩散模型的美式二值期权定价[J]. *高校应用数学学报A辑*, 2011, 26(1): 21-26.
- [119] 邓国和. 随机波动率跳跃扩散模型下复合期权定价[J]. *数理统计与管理*, 2015, 34(5): 910-922.
- [120] 郭精军, 张亚芳. 次分数Vasicek随机利率模型下的欧式期权定价[J]. *应用数学*, 2017, 30(3): 503-511.
- [121] 郭精军, 彭波. 基于混合高斯过程和跳环境下带交易费用的资产定价及模拟分析[J]. *应用数学学报*, 2022, 45(02): 168-180.
- [122] 李静, 周峤. Heston随机波动率模型下一类多资产期权的定价[J]. *系统工程学报*, 2012, 27(3): 320-326.
- [123] 柳向东, 杨飞, 彭智. 随机波动率模型下的VIX期权定价[J]. *应用数学学报*, 2015, 38(2): 285-292.
- [124] 林炜, 李胜宏, 陈小航. 在4/2随机波动率下正态调和稳态过程模型对期权的定价和对冲[J]. *中国科学:数学*, 2018, 48(1): 201-212.
- [125] 林建伟, 李慧敏. 双指数跳扩散模型下具有破产重组公司债券定价[J]. *工程数学学报*, 2020, 37(1): 16-26.
- [126] 林建伟, 王志焕. 随机利率背景下含有信用增进条款公司债券的定价[J]. *系统科学与数学*, 2021, 41(7): 1938-1955.
- [127] 李丹萍, 林玉容, 曾燕. 随机利率与随机波动率模型下保险公司的均衡再保险-投资策略[J]. *计量经济学报*, 2021, 1(4): 904-920.
- [128] 柳向东, 洪绍鹏. 基于非对称跳跃粗糙随机波动率模型的期权定价研究[J]. *系统工程理论与实践*, 2023, 43(2): 350-370.
- [129] 马娟, 樊顺厚, 常浩. Heston模型下基于HARA效用准则的资产-负债管理策略[J]. *系统科学与数学*, 2017, 37(5): 1259-1271.
- [130] 孙景云, 郭精军. 随机利率环境下一类跳扩散相依风险资产的最优投资策略[J]. *运筹学学报*, 2020, 24(03): 101-114.

- [131] 吴桑, 许超, 董迎辉. 具有随机利率的跳扩散模型下的脆弱期权的定价[J]. 应用数学学报, 2019, 42(4): 518-534.
- [132] 吴鑫育, 李心丹, 马超群. 基于随机波动率模型的上证50ETF 期权定价研究[J]. 数理统计与管理, 2019, 38(1): 115-131.
- [133] 王宜峰, 孙丽尧, 蒋一琛. 基于傅里叶变换的银行触发性理财产品定价[J]. 系统科学与数学, 2018, 38(2): 236-246.
- [134] 王波, 朱顺伟, 邓亚东, 等. 4/2随机波动率模型下的期权定价[J]. 系统管理学报, 2020, 29(1): 192-198.
- [135] 吴胤昊, 陈荣达, 汪圣楠, 等. 随机利率随机波动率混合指数跳扩散模型下的期权定价[J]. 系统科学与数学, 2022, 42(8): 2207-2234.
- [136] 谢超强, 吕文元, 陈进. 基于Heston随机波动率模型和风险偏好视角的资产负债管理[J]. 运筹与管理, 2018, 27(6): 156-161.
- [137] 张初兵, 荣喜民, 侯如靖, 等. Heston模型下确定缴费型养老金的投资组合优化[J]. 系统工程, 2012, 30(12): 39-44.
- [138] 周伟, 何建敏, 余德建. 随机跳变广义双指数分布下的双重跳跃扩散模型及应用[J]. 系统工程理论与实践, 2013, 33(11): 2746-2756.

攻读博士学位期间承担的科研任务及主要成果

一、攻读博士学位期间主持和参加的科研项目

1. 国家自然科学基金地区科学基金项目《混合高斯Heston资产价格模型构建及其在投资组合中的应用》(71961013), 参加人, 在研.
2. 国家自然科学基金地区科学基金项目《基于集成框架的欧式期权价格预测及应用》(72361016), 参加人, 在研.
3. 甘肃省优秀研究生“创新之星”项目《模糊随机环境下碳期权定价及实证研究》(2021CXZC-700), 主持人, 结项.
4. 兰州财经大学博士研究生科研创新项目《模糊随机环境下欧式期权定价研究》(2021D06), 主持人, 结项.
5. 甘肃省哲学社会科学规划项目《基于隐马尔科夫模型的生态文明程度指数测评指标体系设计与测度》, 参加人, 结项.

二、攻读博士学位期间发表的学术论文

1. Optimal consumption and investment problem under 4/2-CIR stochastic hybrid model[J]. Mathematics (SCI, First author), 2023, 11(17): 3695.
2. 均值回复跳扩散随机波动率模型下的欧式期权定价研究[J]. 应用数学学报 (CSCD, 第一作者), 2024, 47(2): 333-354.
3. 基于4/2-CIR模型的欧式期权定价及实证研究[J]. 运筹与管理(CSSCI扩, 第二作者), 2023, 33(3).
4. “双碳”目标下基于Heston模型的碳期权定价及实证分析[J]. 终审中.

致谢

时光荏苒,回首五年的博士研究生学习生活,百感交集,也很庆幸愚钝的我终将赶上离站的末班车.思绪回到二零一九年九月,信心十足满怀憧憬的步入让很多人望而却步的博士研究生行列,但很快体会到那些关于博士研究生生活不易的传说多么的真切.一路走来经历了作为一名博士研究生会遇见的大部分问题,但所幸有恩师,师长以及亲朋好友的帮助与鼓励,此刻终于将要为博士求学生涯划上圆满的句号.值此之际,我想对一直以来帮助我、鼓励我的恩师、同门、亲友及同学们表达最诚挚的感谢!

首先我要衷心感谢我的导师郭精军教授,从硕士期间就被郭老师严谨的科研态度以及为人谦逊的人格魅力所吸引.何其有幸,能够在老师门下学习硕博八年时间.八年来您不厌其烦的将我从一个科研小白变为如今略有小成的研究生,这一路走来已记不清占用了多少老师的休息时间,记不清多少次老师百忙之中为我指点迷津,更记不清多少次老师为我忙里偷闲的修改论文,是您润物细无声的指导带给了我柳暗花明又一村的欣喜,是您一定要能坐得住冷板凳的劝慰让我明白了独上高楼,望尽天涯路的不易.同时,郭老师深厚的学术造诣、严谨的治学风格、精益求精的工作作风及谦和的为人处事方式都深深感染和激励着我.古人云,一日为师,终生为父,郭老师不仅是我学业导师,更是我人生导师.感谢老师八年来对我的悉心教导和不断鼓励,让我硕博八年的回忆充满感激;感谢老师对我论文的悉心指导和严格把关,让我在科研的道路上不再恐慌;感谢老师的谆谆教诲和言传身教,让我在生活中重拾信心!

其次感谢帮助与支持我的老师和同学们.感谢傅德印教授、庞智强教授、黄恒君教授、王永瑜教授、韩君教授、刘明教授、肖强教授等对我博士学习阶段给予的指导和帮助,老师们为我论文提出的宝贵意见和建议,使得我的论文内容更加完整、逻辑思路更加严谨.感谢孙景云教授在论文写作和学习生活中对我的帮助和照顾,很幸运能在博士学习阶段遇见孙老师,孙老师为我解答研究过程中的疑难问题,拓宽了我的研究方向.感谢程钦良副教授和宋彦玲师姐对我生活和科研上的帮助,感谢在我最迷茫无助的时候你们的细心开导和鼓励;感谢在我最绝望的时候你们的肯定和支持;感谢你们为我博士生活增添了不一样的色彩.感谢19级博士班的同学和老师们,在充满荆棘的博士生活中带给我无比珍贵的欢声笑语和美好回忆.感谢我亦师亦友的同窗张翠芸、杨燕燕和徐琦阳博士在读博期间对我的陪伴、鼓励和支持,因你们的陪伴与鼓励让我变得更加勇敢、更加自信、更加阳光!

感谢关心和帮助我的同门们.感谢伏广彬老师、赵正玲博士、马钰老师、谢雁老师、李娟娟老师、汪育兵、康维义、马小雯、任玉丹、王龙等师弟师妹们.感谢你们在我论文撰写和修改过程中给予的宝贵意见和建议,让我对论文的写作更有信心;感谢你们在学习和生活中给予我诸多的帮助和鼓励,让我的生活充满欢乐.感谢程志勇师兄不厌其烦的帮我修改论文,答疑解惑,愿我们的耕耘终将有收获!

感谢我的家人挚友.感谢我的父母和公婆,是您们无条件的关爱和付出,让我的学习生活没有后顾之忧.感谢您们对我和朵朵的照顾与疼爱,您们是我最坚强的后盾也是我最温暖的避风港.感谢我的爱人董广明,在各方压力席卷而来时,你毫不犹豫的支持让我有了继续前行的勇气;感谢你在我最脆弱的时候一直陪在我身边,让我觉得生活并没有那么糟糕;感谢你一路以来给予我物质和精神上的支持,让我踏踏实实做自己想做的事;感谢你在我即将奔溃的时候为我加油打气,让我看到新的希望和可能;人生路漫漫,感恩有你一生相伴.感谢我亲爱的朵朵宝贝,小小的你却带给妈妈无限的能量.虽然一孕傻三年的传说并不是无中生有,但我并不后悔在人生最艰难的时候生下了你,你的聪明伶俐、乖巧可爱成为我灰暗生活的一道光,因为你我才有了走到最后的勇气和毅力.感谢宝贝选我们做爸爸妈妈,也感谢宝贝带给我们的无限幸福和快乐.感谢我的小姑子和弟弟们对我的照顾与关爱,感谢你们一直陪在我身边照顾我鼓励我.感谢我的挚友赵翠及家人,在我最需要陪伴和肯定的日子里都有你的影子.感谢在我需要安慰和鼓励时你总是及时出现,在我论文遇到问题时陪我一起寻找解决方案,愿未来我们能携手共进,终将所愿皆可得!

马爱琴

二零二四年三月于兰州财经大学图书馆