分　类　号____________　　　　　　　　密　级____________

U　D　C____________　　　　　　　　编　号____________

兰州财经大学

LANZHOU UNIVERSITY OF FINANCE AND ECONOMICS

博 士 学 位 论 文

论文题目　自相似高斯过程的多重自相交局部时及其非参数估计

研 究 生 姓 名:　张翠芸

指导教师姓名、职称:　郭精军教授

学 科、专 业 名 称:　统计学、统计学

研　究　方　向:　应用数理统计

提　交　日　期:　2023.12.21

独创性声明

本人声明所呈交的论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意。

学位论文作者签名：张翠芸　　签字日期：2023.12.21

导师签名：郭精军　　签字日期：2023、12.21

关于论文使用授权的说明

本人完全了解学校关于保留、使用学位论文的各项规定，同意（选择“同意”/“不同意”）以下事项：

1.学校有权保留本论文的复印件和磁盘，允许论文被查阅和借阅，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文；

2.学校有权将本人的学位论文提交至清华大学“中国学术期刊（光盘版）电子杂志社”用于出版和编入CNKI《中国知识资源总库》或其他同类数据库，传播本学位论文的全部或部分内容。

学位论文作者签名：张翠芸　　签字日期：2023.12.21

导师签名：郭精军　　签字日期：2023.12.21

Multiple self-intersection local time of self-similar Gaussian processes and its nonparametric estimation

Candidate :Zhang Cuiyun

Supervisor : Guo Jingjun

摘 要

近年来,高斯过程的占位时及其有限区间内的局部时都是国内外学者关注的热点问题且在金融风险模型中均有较为广泛的应用. 在金融市场中,许多期权的定价问题与期权的价格处于某个价格区间有关,称为与占位时有关的期权;在风险理论中,研究以各种随机过程为背景的保险风险模型的剩余价值过程处于某些水平区间的情况,由此来衡量保险公司的运营状况,因此研究各种随机过程的局部时和占位时对相关期权及风险理论有重要的作用. 随着局部时理论研究的不断深入及其应用领域的不断扩展,又产生了自相交局部时的概念. 目前,对于多重自相交局部时的研究大多基于布朗运动展开,而对于其它自相似高斯过程多重自相交局部时的研究并不完善. 此外,关于局部时和占位时的统计推断问题也是统计学研究的重点问题之一. 由于非参数统计方法对总体所要求的条件非常宽泛,往往具有较好的稳健性,所以基于离散观测研究占位时和局部时的非参数估计得到了广大学者的关注并且在金融统计领域中也越来越重要.

本文从自相似高斯过程、局部时、导数型局部时、局部时的统计推断等四个方面对国内外文献进行梳理、归纳与总结,充分掌握已有研究进展及未来可拓展之处,进而确定本文研究思路. 在此基础上,将自相似高斯过程二重自相交局部时的研究推广至多重的情形,证明其存在性等为后续研究奠定理论基础. 接着,基于自相似高斯过程多重自相交局部时的存在性结合占位时公式给出自相似高斯过程导数型多重自相交局部时的定义形式,运用不同的方法证明其相关性质. 最后,从应用的角度出发,在分数布朗运动局部时存在的基础上,给出分数布朗运动局部时和占位时的非参数估计并证明相关性质. 具体结论如下:

(1) 研究自相似高斯过程的多重自相交局部时. 首先利用 Fourier 分析方法结合强局部非确定性研究自相似高斯过程多重自相交局部时的存在性条件,并且在此基础上证得多重自相交局部时满足指数可积性. 接着,根据自相似高斯过程的局部非确定性考虑多重自相交局部时分别关于时间变量和空间变量的 Hölder

连续性. 最后, 借助 Malliavin 分析中的 Wiener 混沌展式证明自相似高斯过程多重自相交局部时的平滑性. 特别地, 给出一维分数布朗运动多重自相交局部时的 Wiener 混沌展式, 用混沌展式证明其满足 Meyer-Watanabe 意义下的平滑性, 也将相应的结果推广至 d 维分数布朗运动的情形, 而其它自相似高斯过程多重自相交局部时的平滑性类似可得证.

(2) 考虑自相似高斯过程导数型多重自相交局部时. 首先, 基于自相似高斯过程多重自相交局部时的存在性结合占位时公式, 给出自相似高斯过程多重自相交局部时关于空间变量的导数定义. 接着, 利用样本配置方法给出自相似高斯过程导数型多重自交局部时在 L^p 中的存在性条件和其关于空间变量满足的 Hölder 连续性条件. 最后, 借助混沌展式证明其满足 Meyer-Watanabe 意义下的平滑性. 为方便, 本文仅给出分数布朗运动导数型多重自相交局部时平滑性的证明, 关于其它自相似高斯过程的结论类似可得.

(3) 基于离散观测, 研究分数布朗运动占位时和局部时的非参数估计. 首先介绍分数布朗运动占位时和局部时的 Riemann 和估计, 通过分数布朗运动的特征函数和其满足的局部非确定性来给出 Riemann 和估计 L^2 逼近误差的精确上界. 接着通过矩估计方法结合链式论证证得占位时估计的中心极限定理, 而局部时估计的中心极限定理类似可证得. 最后为提高收敛速率, 简要介绍占位时和局部时的另一种非参数估计方法——条件期望估计. 利用分数布朗运动和条件期望的相关性质, 通过直接计算得到条件期望估计的中心极限定理.

关键词: 高斯过程 占位时 局部时 混沌展式 非参数估计

Abstract

In recent years, the occupation time of Gaussian process and its local times in finite interval have become the hot topic and have been widely used in financial and risk models. In the financial market, there are many options pricing problems related to the price of options in a certain price range, called options related to the occupation time; In risk theory, it is often necessary to study the residual value process of the insurance risk model in the background of various stochastic processes at certain level intervals, in order to measure the operation of the insurance company. Therefore, the study of local times and occupation time for various stochastic processes plays an important role in studying the options and the risk theory. With the deepening of the study of local times and the expansion of its application areas, the concept of intersection local times has emerged. At present, most of the studies on multiple self-intersection local times are based on Brownian motion, and the studies on multiple self-intersection local times for other self similar Gaussian processes are not perfect. In addition, the problems of statistical inference for local times and occupation time are one of the key issues in statistical research. Since the non-parametric statistical methods require very broad conditions on the population, they tend to be more robust, the non-parametric estimation of occupation time and local times based on discrete observations has gained much attention and become more and

more important in the field of financial statistics.

This paper combs, summarizes, and summarizes the domestic and international literature from four aspects: self similar Gaussian process, local time, the derivative of local time, and statistical inference of local time. In order to fully grasp the progress of existing research and future expansion, the research idea of this paper is determined. On this basis, the research on the double self-intersection local times of self similar Gaussian process is extended to the multiple case, and its existence is proved, which lays a theoretical foundation for subsequent research. Next, based on the existence of the multiple self-intersection local times for self similar Gaussian process and the formula of the occupation time, the definition of the derivative of multiple self-intersection local times for self similar Gaussian process is given, and its relevant properties are proved by different methods. Finally, from the perspective of application, the non- parametric estimation of the local times and occupation time of fractional Brownian motion are given, and its relevant properties are proved. The detailed conclusions are as follows:

(1) Study the multiple self-intersection local times for self similar Gaussian processes. Firstly, the existence condition of multiple self-intersection local times for self similar Gaussian processes investigated by using Fourier analysis combined with strong local nondeterminism, and on this basis it is proved that it satisfies

exponential integrability. And then, the $Hölder$ continuity conditions for multiple self-intersection local times with respect to time and space variables are considered according to the local nondeterminism, respectively. Finally, using the Wiener chaos decomposition method in the Malliavin calculus, the smoothness of the multiple self-intersection local times for self similar Gaussian processes is demonstrated. In particular, the Wiener chaos decomposition of the multiple self-intersection local times for one-dimensional fractional Brownian motion is given, and its smoothness in the sense of Meyer-Watanabe is proved by the Wiener chaos decomposition. We also extend the corresponding results to the case of d-dimensional fractional Brownian motion, and the smoothness of multiple self-intersection local times for other self similar Gaussian processes can be similarly proved.

(2) Consider the derivative of multiple self-intersection local times for self similar Gaussian processes. Firstly, we give the definition of the derivative of multiple self-intersection local times for self similar Gaussian processes with respect to the spatial variables by combining with the occupation time formula. Next, a sample configuration method is used to prove the existence of the derivative of multiple self-intersection local times in L^p and to show that it satisfies $Hölder$ continuity with respect to the spatial variables. Finally, it is proved that the derivative of multiple self-intersection local times for self similar Gaussian process

satisfies the smoothness in the Meyer-Watanabe sense by means of chaos expansion. For convenience, only the case of fractional Brownian motion is proved and other self similarity processes can be obtained similarly.

(3) Based on discrete observations, nonparametric estimations of occupation time and local times for fractional Brownian motion are investigated. In this study, we firstly introduce the Riemann sum estimations for the occupation time and local times for fractional Brownian motion, and give the exact upper bounds of L^2 approximation by the characteristic function and local nondeterminism of fractional Brownian motion. Then, by using the properties of fractional Brownian motion and the moment estimation method combined with the chain argument, the central limit theorem of occupation time estimation can be obtained, and the central limit theorem of local times estimation can be similarly proved. Finally, another nonparametric estimation method, conditional expectation estimation, is briefly introduced to improve the rate of convergence. Using the related properties of fractional Brownian motion and conditional expectation, the central limit theorem of conditional expectation estimation is obtained by direct computation.

Keywords: Gaussian processes; Occupation time; Local times; Chaos expansion; Nonparametric estimation

目　录

常用记号

$\mathbb{R}$	实数集合
$\mathbb{R}^d$	d-维欧氏空间
$\mathbb{N}$	正整数集合
L^p	$L^p(\Omega),\ p \geq 1$ 空间
P	概率
$\mathscr{H}$	为实值可分 Hilbert 空间
$\mathbb{E}$	数学期望
$(\Omega, \mathscr{F}, P)$	经典概率空间
$\langle\cdot,\cdot\rangle$	内积
$\Vert\cdot\Vert$	范数
$\imath$	$\sqrt{-1}$
$\xrightarrow{d}$	依分布收敛
$\xrightarrow{p}$	依概率收敛
$\overset{law}{=}$	同分布
$\square$	证毕, 述毕

1 引　言

1.1 研究背景与研究意义

1.1.1 研究背景

在现代数理金融领域, 高斯过程起着核心的作用. 1827 年英国植物学家布朗提出的布朗运动假设是现代资本市场理论的核心, 最早由 Bachelier 用它来描述标的资产价格的分布. 此外, 也可用来描述股价的未来走势, 短期利率等. 然而, 布朗运动所描述的股票当期价格与未来的预测有关, 而布朗运动的演变方式与未来的预测不相关, 没有依赖性, 因此它所描述的股价与实际市场有一定的差距. 1940 年, 作为布朗运动的推广, Kolmogorov [78] 首次提出分数布朗运动的概念, 由于其具有平稳增量性、自相似性和长记忆性, 被广泛应用于物理、电子通信、图像处理、数量金融等领域的随机模拟中.

由于分数布朗运动具有平稳增量, 因此不能较好地刻画金融时间序列的非平稳性, 从而学者们采用具有非平稳增量的更一般的高斯过程来描述金融资产价格变化的行为, 如 Bojdecki [11]给出的次分数布朗运动. 次分数布朗运动不仅有分数布朗运动的自相似性和长相依性等重要性质, 而且还具有更快的退化速度和非平稳的二阶矩增量. 此外, 次分数布朗运动可以用来刻画金融资产的随机波动性, 所以相比于分数布朗运动, 次分数布朗运动更能较好地刻画金融资产价格的变动. 随后 Houdre 和 Villa [54]提出了一种更具一般性的高斯过程——双分数布朗运动, 其不具有独立增量及平稳增量等性质, 可以用来描述股票价格非平稳波动等一般性的情况. 因此对此类高斯过程的研究不仅具有理论意义, 而且在各领域的应用中也有一定的价值.

高斯过程的占位时及其有限区间内的局部时都是近些年来国内外学者研究的两个热点问题. 局部时和占位时是随机过程的重要概念, 它们描述了随机过程

在某个时间点的“局部”行为和“占据”某个状态的时间长度. 占位时是指一个随机过程在某一区域内逗留的时间总和, 局部时是占位时相关的占位密度, 它们在金融风险模型中都有较为广泛的应用. 在期权定价方面, 局部时和占位时可以用来描述标的资产价格的动态变化, 进而影响期权的价值. 在风险理论方面, 局部时和占位时可以用来描述风险敞口的时间分布和变化. 综上可知, 研究随机过程的局部时和占位时对于理解金融市场的动态变化、期权定价和风险理论等方面都具有重要的意义. 此外, 占位时和局部时也是随机分析研究的重要内容, 是研究随机过程样本轨道性质的重要工具, 引起许多理论研究者和实际工作者的广泛兴趣.

随着对局部时理论研究的不断深入及其应用领域的不断扩展, Varadhan [120] 提出: 某些随机场的相交随机集在构建某些特定的欧氏量子场模型中有着重要的作用, 随后许多学者进行了这方面的研究. 它的出现有着广泛而深刻的应用背景, 也是物理、数学及金融学者们共同感兴趣的课题.

受到局部时空间积分的启发, 导数型相交局部时已发展为一个独立的研究课题. Rogers 和 Walsh [108] 在研究布朗运动的局部时和随机面积积分时, 分析了以下泛函

$$A(x,t)=\int_0^t \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x-B_s)\mathrm{d}s,$$

其中 B_s 为一维布朗运动. 可知 $A(B_t,t)$ 不是半鞅且证得过程

$$A(B_t,t)-\int_0^t L(B_s,s)\mathrm{d}B_s$$

有有限的非零 $\frac{4}{3}$-变差, 其中

$$L(B_s,t)=\int_0^t \delta(B_s-x)\mathrm{d}s$$

表示布朗运动 B 在 x 处的局部时. 2005年, Rosen [107] 用一种新的方法来研究过

程 $A(B_t,t)$. 若令 $h(x):=\mathbf{1}_{[0,\infty)}(x)$, 则形式上有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}h(x)=\delta(x),\quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}h(x)=\delta'(x),$$

其中 δ 表示 Dirac delta 函数且 δ' 表示 Schwartz 分布意义下 δ 函数的导数. 因此, 对于函数 h 由 Itô 公式可得

$$A(B_t,t)-\int_0^t L(B_s,s)\mathrm{d}B_s=t+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^s\delta'(B_s-B_r)\mathrm{d}r\mathrm{d}s.$$

然而, 正如 Jung 和 Markowsky [71] 提到的, 这一定义有些模棱两可, 因为如果把函数 h 的定义变为 $h(x):=\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$, A 的定义为

$$A(x,t)=\int_0^t\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x-B_s)\mathrm{d}s,$$

则用 Itô 公式可得

$$A(B_t,t)-\int_0^t L(B_s,s)\mathrm{d}B_s=\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^s\delta'(B_s-B_r)\mathrm{d}r\mathrm{d}s.$$

这一观察结果表明对于 $A(B_t,t)$ 的两个不同定义上面结论几乎一致. 因此, 以上述 Itô 公式为基础, Rosen [107] 证得布朗运动 B 的导数型自相交局部时

$$\alpha'(x,t):=\int_0^t\int_0^s\delta'(B_s-B_r-x)\mathrm{d}r\mathrm{d}s$$

存在且给出占位时公式

$$\int_0^t\int_0^s f'(B_s-B_r-x)\mathrm{d}r\mathrm{d}s=-\int_{\mathbb{R}}f(x)\alpha'(x,t)\mathrm{d}x,$$

其中 $f\in C^1(\mathbb{R})$ 且 $t>0$. 此后, 受到占位时公式的启发, 学者们都纷纷介入了各种高斯过程导数型二重局部时的研究.

近年来, 在局部时存在的基础上基于离散观测研究占位时和局部时的统计推断也始终是一个经典问题. 统计推断作为现代数理金融中的一个重要分支, 被广

泛应用于科学、工程和金融等各个领域. 一般来说, 连续时间模型在数学上比离散时间模型更易于处理, 但统计推断通常仅限于离散观测. 如果时间网格划分足够精细, 可以认为离散模型的统计性质近似于连续模型的相关性质. 另一方面, 布朗运动以及更普遍高斯过程的占位时和局部时在某些类型的路径依赖期权的定价中起着重要作用. 一般来说, 这类期权的价格取决于连续时间价格过程在某个指定区间内的停留时间. 然而, 在实际市场中, 只能在有限的观察点处得到高斯过程的值, 因此使用离散观测对自相似高斯过程的占位时和局部时进行非参数估计具有重要的应用价值.

1.1.2 研究意义

自相似高斯过程作为一类重要的随机过程, 常用于刻画各类金融资产的价格波动情况, 因而被广泛应用于金融模型中. 例如, 可用来描述股价的未来走势、短期利率等. 因此, 研究自相似高斯过程的样本轨道性质 (相交局部时) 在实际研究中具有十分重要的意义. 另一方面, 局部时作为占位时的密度函数也是随机过程理论研究的热点问题, 它们的出现有着广泛而深刻的应用背景, 是物理、数学及金融学者们共同感兴趣的课题且对我们进一步研究金融市场中的各类期权定价及风险模型有着重要的理论意义和现实意义.

1.1.2.1 理论意义

(1) 研究自相似高斯过程的多重自相交局部时 (MSLT), 旨在将自相似高斯过程二重局部时的研究推广至多重的情形. 目前关于自相似高斯过程自相交局部时的研究多见于二重的情形, 对其 MSLT 的研究并不完善. 一方面自相似高斯过程作为比布朗运动更一般的高斯过程, 其既不是 Markov 过程也不是半鞅, 这就意味着适应于布朗运动的一些标准方法不能直接用于自相似高斯过程. 另一方面由于自相似高斯过程的增量是非独立的且多重局部时自身结构的复杂性, 这也给自相

似高斯过程 MSLT 的相关计算增加了很大难度. 因此本文的研究进一步推广了自相交局部时的理论研究, 也有利于研究人员更深层认识自相似高斯过程, 使得这类过程有更广泛的应用.

(2) 在自相似高斯过程 MSLT 存在的基础上, 受到二重自相交局部时高阶导数定义的启发, 研究自相似高斯过程导数型多重自相交局部时 (DMSLT). 因为目前学者们多研究布朗运动和分数布朗运动的导数型二重自相交局部时, 而对于自相似高斯过程 DMSLT 还没有给出具体的定义. 另一方面, 由于其比导数型二重自相交局部时的积分结构复杂且自相似高斯过程满足的局部非确定性不能在证明过程中直接应用, 因此本文研究自相似高斯过程一阶 DMSLT, 并且用样本配置等方法证明它的相关性质具有重要的理论意义且为更高阶导数型多重局部时的研究奠定基础.

(3) 近年来, 基于离散观测的占位时和局部时的统计推断始终是一个经典问题. 目前关于占位时和局部时的非参数估计多关注布朗运动和其它一些 Markov 过程, 且对于非参数估计值的理论性质也鲜有系统的研究, 所以本文将占位时和局部时的非参数估计推广至非 Markov 过程, 研究分数布朗运动占位时和局部时的非参数估计, 给出其相关理论性质的证明. 这不仅在理论上具有深远的意义, 而且推动了我们对非 Markov 过程占位时和局部时的深入理解.

1.1.2.2 现实意义

(1) 研究高斯过程的占位时和局部时可以更好地理解衍生品价格的变化规律. 由自相似高斯过程的性质可知, 在实际应用中, 通常会将高斯过程用于定价一些复杂的衍生品, 如期权、期货等. 而高斯过程的占位时和局部时可以描述这个过程中标的资产价格在一定时间段内处于某个价格水平或价格区间的情况, 从而帮助我们更好地理解衍生品价格的变化规律, 为定价和风险控制提供依据.

(2) 研究高斯过程的占位时和局部时可以进一步拓展金融衍生品市场的理论

探索和应用领域. 高斯过程作为一种重要的随机过程, 已经在金融衍生品市场中得到了广泛应用. 而与占位时和局部时相关的衍生品是近年来推出的备受投资者和研究人员关注的产品, 这些合约的一个决定性特征是行权回报取决于标的资产在预定区域花费的时间. 通常情况下, 占位区域的规格涉及平面障碍, 从这个意义上说, 这些合约可以被视为一种广义的障碍期权. 因此研究随机过程的局部时和占位时对于理解金融市场的动态变化、期权定价和风险理论等方面都具有重要的意义, 引起许多理论研究者和实际工作者的广泛兴趣.

(3) 研究高斯过程的占位时和局部时可以为处理数据提供更加丰富和有效的方法. 在实际应用中, 通常会采集标的资产价格的数据, 并利用这些数据来估计高斯过程的参数. 而高斯过程的占位时和局部时可以提供更加细致的数据分析方法, 如计算标的资产价格处于某个价格水平或价格区间的概率、计算标的资产价格在一定时间段内的平均水平等等, 从而可以更好地帮助我们处理和分析数据.

(4) 实际应用中, 许多与占位时和局部时相关的期权都是基于离散时间观测的. 换句话说, 此类衍生品指定了一系列参考日期, 占位时和局部时是通过监测日期中标的价格低于或高于某个水平或介于两个水平之间的部分来定义的, 进而基于离散观测研究占位时和局部时的统计推断具有重要的现实意义和广泛的应用背景. 此外, 本文对分数布朗运动占位时和局部时的非参数估计研究既可以完善这类过程的统计理论又可以为处理数据提供更加丰富和有效的方法.

综上, 研究自相似高斯过程的占位时和局部时具有重要的理论意义和应用价值. 它们不仅可以帮助我们更好地理解自相似高斯过程的性质和行为, 也为相关领域的研究和应用提供更精确的信息和工具.

1.2 研究现状

1.2.1 自相似高斯过程的研究现状

设随机过程 $\{X_t,\ t\in T\}$, 若对任意 $t_1,\cdots,t_n\in T$, $X_{t_1},\cdots,X_{t_n}$ 服从 n 维正态分布, 则 $\{X_t,\ t\in T\}$ 称为高斯随机过程. 特别地, 高斯过程的有限维分布完全由其数学期望和协方差函数决定.

经典的布朗运动是增量满足独立性和平稳性的高斯过程, 其最早是 1827 年由英国生物学家布朗在观察花粉微粒液面上的"无规则运动"提出的. 布朗运动假设是现代资本市场理论的核心, 可用来描述股价的未来走势、短期利率等, 它在物理学和金融学都有着非凡的意义.

作为布朗运动的一种推广, 分数布朗运动是一类连续的具有平稳增量的自相似高斯过程, 所谓自相似性就是对任意 $a>0$, 一定存在 $b>0$, 使得过程 $\{X_{at}\}_{t\geq 0}$ 与 $\{bX_t\}_{t\geq 0}$ 具有相同分布. Kolmogorov [78] 称其为维纳螺旋, Mandelbrot-Van Ness [91]将其赋名为分数布朗运动. 由于其具有平稳增量性、自相似性和长记忆性, 被广泛地应用在物理学、电子通信、图像过程、数量金融等领域的随机模拟中. 然而该过程并不能很好地刻画所有的随机现象, 如当湍流中增量不具有平稳性时, 由分数布朗运动作为随机模型来刻画该现象是不精确的. 为处理这种情况, Bojdecki [11]和 Francesco Russo 等 [106]分别引入了一种比分数布朗运动更一般的自相似高斯过程, 即次分数布朗运动和双分数布朗运动.

对于给定的 $H_0\in(0,1)$, $K_0\in(0,1]$, $\mathbb{R}$ 上指数为 H_0 和 K_0 的双分数布朗运动 $B^{H_0,K_0}=\{B_t^{H_0,K_0},\ 0\leq t\leq T\}$ 为零均值自相似高斯过程, 其协方差函数为

$$\mathbb{E}\left[B_s^{H_0,K_0}B_t^{H_0,K_0}\right]=\frac{1}{2^{K_0}}\left[(s^{2H_0}+t^{2H_0})^{K_0}-|t-s|^{2H_0K_0}\right], \tag{1.2.1}$$

其中 $s,\ t\geq 0$. 显然, 若 $K_0=1$, 则过程 $B^{H_0,1}$ 是指数为 H_0 的分数布朗运动. 这个过程最初是 2003 年由 Houdré 和 Villa [54]提出的, 也是分数布朗运动的拓展. 一般

地, 当 $K_0 \neq 1$, $H_0 \neq \frac{1}{2}$ 时, B^{H_0,K_0} 既不是半鞅也不是 Markov 过程, 因此许多 Itô 随机分析的技术不能直接用来处理 B^{H_0,K_0}.

2004 年, Bojdecki [11] 等引入并研究了一类相当特殊的自相似高斯过程, 作为布朗运动的扩展, 它保留了分数布朗运动的许多性质. 这一过程是由具有泊松初始条件的分支粒子系统的占位时波动引起的, 称为次分数布朗运动. Hurst 参数为 $H \in (0,1)$ 的次分数布朗运动 $S^H = \{S_t^H,\ t \geq 0\}$ 为零均值自相似高斯过程, 对所有 $s,\ t \geq 0$, 其协方差函数为

$$\mathbb{E}\left[S_t^H S_s^H\right] = s^{2H} + t^{2H} - \frac{1}{2}\left[(s+t)^{2H} + |t-s|^{2H}\right].$$

当 $H = \frac{1}{2}$ 时, S^H 与标准布朗运动 B 一致. S^H 既不是半鞅也不是 Markov 过程, 除非 $H = \frac{1}{2}$, 所以许多来自随机分析的强大技术在处理 S^H 时不适用. 此外, 次分数布朗运动具有类似于分数布朗运动的性质 (自相似、长相依性、Hölder 路径), 但其增量不是平稳的, 关于次分数布朗运动的更多工作可见文献 [88, 112] 等.

1.2.2 局部时的研究现状

对于取值于 $\mathbb{R}^d$ 上的布朗运动 B_t $(t \in \mathbb{R}^N)$, 若 $x \in \mathbb{R}^d$ 为 B_t 的 k $(k \geq 2)$ 重点, 则存在互不相同的 $t_1, \cdots, t_k \in \mathbb{R}^N$, 使得 $x = B_{t_1} = \cdots = B_{t_k}$. 数学上高斯过程局部时的研究最初是由布朗运动重点的研究引入的, 被设想为“度量”布朗运动水平集的一种方式, 从而 k 重自相交局部时可定义为:

$$L_k(x,t) = \int \cdots \int_{0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k \leq t} \prod_{j=2}^{k} \delta\left(B_{t_j} - B_{t_{j-1}} - x_j\right) \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_k, \quad k \geq 2, \tag{1.2.2}$$

其中 $x = (x_2, \cdots, x_k)$, $\delta(x)$ 表示 Dirac delta 函数.

为了更精确, (1.2.2) 可定义为

$$L_{k,\varepsilon}(x,t) = \int \cdots \int_{0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k \leq t} \prod_{j=2}^{k} p_\varepsilon\left(B_{t_j} - B_{t_{j-1}} - x_j\right) \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_k,$$

其中

$$p_\varepsilon(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon}}$$

是方差为 ε 的中心高斯密度函数且当 $\varepsilon \to 0$ 时, $p_\varepsilon(x)$ 弱收敛于 Dirac delta 函数 $\delta(x)$.

由于相交局部时具有其特定的度量性, 即可把它当成度量水平集的随机测度, 从而它被许多研究者引入作为研究随机过程重点的一个强有力的工具 [8, 80, 116, 141]. 对于多重自相交局部时, 最初是由 Varadhan [120] 研究布朗运动的 $k=2$ 重自相交局部时引入的, 随后被推广至 $k \geq 2$ 的情形. Rosen [111] 借助 Fourier 分析法得到一个与 k 和 $k+1$ 重平面布朗运动自相交局部时相关的 Tanaka 公式. Shieh [115] 利用白噪声分析方法得到布朗运动 k 重局部时的存在性和 Tanaka 公式. Bass 和 Khoshnevisan [15] 运用单一 Markov 过程的加性函数给出 k 重自相交局部时的 Tanaka 公式和 $k \geq 4$ 时重整化自相交局部时关于所有变量的联合 Hölder 连续性.

由欧几里得量子场论中某些随机场的构造可知, 多重自相交局部时在数学物理中有非常重要的作用 [63]. 然而, 根据已有研究可知, 多重自相交局部时的研究多见于标准布朗运动, 而对于其更一般情况的自相似高斯过程的局部时研究多见于 $k=2$ 的情形.

对于分数布朗运动 $B^H = \{B_t^H, t \geq 0\}$, 固定 $T>0$, 则区间 $[0,T]$ 上 B^H 的二重自相交局部时定义为

$$L^H(\cdot, T) = \int_0^T \int_0^t \delta(B_t^H - B_s^H) \mathrm{d}s\mathrm{d}t,$$

其中 δ 表示 Dirac delta 函数. 当 $H \neq \frac{1}{2}$ 时, Rosen [111] 首次研究了平面分数布朗运动自相交局部时的情形, 随后 Hu 等 [56] 使用 Malliavin 积分对其进行了进一步研究, 证得对于 d 维分数布朗运动, 只要 Hurst 参数满足 $H < \frac{1}{d}$, $L^H(\cdot, T)$ 就在 L^2 中存在, 并给出分数布朗运动相交局部时的混沌展式, 利用混沌展式结合四阶矩定

理证明了重整化相交局部时中心极限定理. 然而, 与分数布朗运动的广泛研究相比, 对其它自相似高斯过程相交局部时的系统研究很少, 其主要原因是不具有平稳增量的自相似高斯过程的结构的复杂性. 2007 年, Tudor 和 Xiao [119] 将分数布朗运动二重自相交局部时的研究推广至双分数布朗运动, 给出双分数布朗运动的 Malliavin 积分及其局部时. 随后, Jiang 等 [21,67,114] 进一步研究双分数布朗运动局部时的相关性质. 此外, 次分数布朗运动相交局部时的研究可见 [113,127] .

1.2.3 导数型局部时的研究现状

近几十年来, 受到关于局部时空间积分的启发, 导数型自相交局部时已发展为一个独立的研究课题. 相应的结果不仅从一维丰富到多维, 而且从布朗运动延伸到更一般的自相似高斯过程. 在 [107] 中, Rosen 引入了 $\mathbb{R}$ 中布朗运动导数型二重自相交局部时的概念. 如果极限存在, 则它被定义为

$$L'(\cdot,T)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T\int_0^t \delta'_\varepsilon(B_t-B_s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$

更正式地, 可写为

$$L'(\cdot,T)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T\int_0^t p'_\varepsilon(B_t-B_s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$

Rosen 证得这个积分在 $\varepsilon\to 0$ 时收敛, 并给出一个占位时公式和关于 $L'(\cdot,T)$ 的一些其它性质. 基于 Rosen 在 [107] 中的相应结果, Yan 等 [127,128] 最先考虑了分数布朗运动的导数型自相交局部时. 分数布朗运动的导数型自相交局部时有两个版本: 一个是由 Tanaka 公式拓展的 (见文献 [71])

$$L'(\cdot,t)=-H\int_D \delta'_\varepsilon(B_t-B_s-y)(s-r)^{2H-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}s.$$

另一个来源于占位时公式 (见文献 [69])

$$L'(\cdot,t) = -\int_D \delta'_\varepsilon(B_t - B_s - y)\mathrm{d}r\mathrm{d}s, \tag{1.2.3}$$

其中 $D = \{(r,s) : 0 < r < s < t\}$. Jaramillo 和 Nualart [68,72]分别研究了分数布朗运动导数型自相交局部时 (1.2.3) 的渐近性质和其泛函极限定理. Yan 和 Yu [129] 将其推广至了多维分数布朗运动情形, 研究了多维分数布朗运动导数型二重自相交局部时的性质.

受到 Jung 和 Markowsky [69] 给出的分数布朗运动一阶导数型自相交局部时和 Guo 等 [46] 提出的分数布朗运动 k 阶导数型相交局部时的启发. Yu [133] 考虑分数布朗运动的 k 阶导数型自相交局部时:

$$\begin{aligned} L^{(k)}(y,t) &= \frac{\partial^k}{\partial y_1^{k_1}\cdots\partial y_d^{k_d}}\int_D \delta(B_s - B_r - y)\mathrm{d}r\mathrm{d}s \\ &= (-1)^k\int_D \delta^{(k)}(B_s - B_r - y)\mathrm{d}r\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

其中 $k = (k_1,\cdots,k_d)$, 每个 k_i 均为非负整数且有 $|k| = k_1 + k_2 + \cdots + k_d$,

$$\delta^{(k)}(y) = \frac{\partial^k}{\partial y_1^{k_1}\cdots\partial y_d^{k_d}}\delta(y)$$

表示 Dirac delta 函数 δ 的 k 阶偏导数, 证得 $L^{(k)}(y,t)$ 的存在性和 Hölder 连续性条件, 这些结果为后面基于 Malliavin 分析研究 $L^{(k)}(y,t)$ 的平滑性等奠定了基础. Shi [114] 将分数布朗运动导数型二重自相交局部时的研究拓展至双分数布朗运动的情形, 证明了双分数布朗运动导数型二重自相交局部时的分数平滑性, 其它更多自相似高斯过程的导数型二重自相交局部时的研究见文献 [29,53,113,127,134] 等.

1.2.4 局部时的统计推断

占位时是指一个随机过程处于某个区域内的时间总和, 而局部时是其相关的占位密度. 与占位时相关的衍生品是近年来推出的备受投资者和研究人员关注的产品, 这些合约的一个决定性特征是行权回报取决于标的资产在预定区域花费的时间. 通常情况下, 占位区域的规格涉及平面障碍, 从这个意义上说, 这些合约可以被视为一种广义的障碍期权. 一旦标的资产价格越过障碍, 障碍期权的收益就会被激活或消失, 这种障碍的不连续性对期权卖方和买方的风险管理都构成了障碍. 以淘汰障碍期权为例, 即使买方对整体市场趋势有正确的看法, 意外的价格跨越障碍也很容易使他或她在期权上的全部投资付之一炬. 此外, 正如 Chesney 等 [24]和 Linetsky [82]所说, 市场操纵者还喜欢利用收益与跨越障碍相关的事实, 推动基础价格触发跨越, 并从交易另一方的巨额损失中获利.

一些学者提出一系列与占位时相关的期权, 以减轻因障碍周围的不连续性而导致的障碍期权固有的风险管理困难. 现在的收益不仅取决于越过障碍, 还取决于标的资产价格在障碍上方或下方停留的时间. 因此, 期权购买者可以逐渐获得或失去价值. 其中最流行的例子之一是 Linetsky [82, 83]提出的阶梯期权, 该衍生品的收益按占位时确定的比率进行贴现. 在几何布朗运动 (GBM) 模型下, Linetsky [83] 推出了各种单障碍阶梯期权的封闭式定价公式, Davydov 和 Linetsky [32]通过 Laplace 逆运算研究了双障碍阶梯期权的定价. 第二个例子是在外汇和利率市场上交易的走廊期权, 该期权在到期时支付的金额与参考指数 (通常是汇率或利率) 所花费的时间有关, 该指数低于给定水平或在一个区间内. Fusai [41]通过研究带漂移项的布朗运动所花时间的分布, 在 GBM 模型下对该衍生品进行了定价. 另一种与占位时相关的重要期权是分位数期权, Miura [90] 建议将其作为标准障碍期权的替代方案. 分位数是确保期权生命周期内占位时的比例超过给定水平的最小障碍. Dassios [30]、Embrechts 等 [38] 和 Yor [130]提供了带有漂移的布朗运动的分位数分布公式. Akahori [2] 和 Dassios [30] 计算了 GBM 模

型 α-分位数期权的价格. Kwok 和 Lau [76] 基于 GBM 模型下的前向射击网格法开发了一种分位数期权定价算法. Leung 和 Kwok [77]推导了恒定方差弹性 (CEV) 过程下的占位时分布函数. Cai [22] 利用 Dassios [31] 开发的具有平稳和独立增量过程的分位数恒等式, 在超指数跳跃扩散模型下两次应用 Laplace 逆运算, 对固定和浮动分位数期权进行了数值定价.

实际上, 许多与占位时和局部时相关的期权都是基于离散时间观测的. 换句话说, 此类衍生品指定了一系列参考日期, 占位时是通过监测日期中标的价格低于或高于某个水平或介于两个水平之间的部分来定义的. 然而, 这些研究的共同特点是假定标的资产价格遵循 GBM 模型. 例如, Atkinson 和 Fusai [3] 使用布朗运动的 Spitzer 恒等式研究离散分位数期权; Fusai 和 Tagliani [42] 将偏微分方程的一些数值方法应用于价格离散的走廊期权的定价; Davydov 和 Linetsky [32] 考虑了离散观测下的阶梯期权; Cai, Chen 和 Wan [23]研究了 Kou 的双指数跳跃扩散模型 [75] 下, 占位时相关期权的定价和套期保值问题. 该模型假设标的资产收益遵循一个具有泊松跳跃强度和双指数分布跳跃大小的跳跃扩散过程, 相关的资产收益比正态分布具有更重的尾部, 因此该模型能够产生资产收益的非对称特征和股票期权的波动率微笑, 比 GBM 模型更好地匹配实验数据. 该模型还提供了许多定价问题的解析解, 包括欧氏和路径依赖的期权; Aoudia 等 [4] 将 [23] 中的结果进行了拓展, 为了对占位时期权 (如 (双屏障) 阶梯期权和分位数期权) 进行定价, 推导出了混合指数跳跃扩散过程的各种联合分布及其区间占位时.

除金融方面的应用之外, 也应强调关于扩散过程占位时和局部时的数学结果可能在应用概率的其它分支中找到的潜在应用, 其中应用最广泛的一个是在排队论中, 当服务时间或到达间隔时间具有重尾分布时, 队列长度过程的大流量限制通常由跳扩散过程给出 (参见 Whitt [122], 第6章). Cai, Chen 和 Wan [23]的结果可能对于那些想要研究交通繁忙队列中单级以上、以下或两级之间的占位时的人感兴趣. Cohen 和 Hooghiemstra [25]讨论了一种特殊的扩散布朗偏移的占位时及其与 M/M/1 队列的联系.

由于许多与占位时和局部时相关的期权都是基于离散时间观测的, 进而基于离散观测研究占位时和局部时的统计推断具有重要的理论意义与现实意义 [17,19,27,28]. 统计推断是现代数学金融中的一门重要学科, 被广泛应用于所有科学、工程和金融等领域 [136]. 一般来说, 连续时间模型在数学上比离散时间模型更易于处理, 但统计推断通常仅限于离散观测. 如果时间网格划分足够精细, 可以认为离散模型的统计性质近似于连续模型的相关性质. 近年来, 基于离散观测的占位时和局部时的统计推断始终是一个经典问题. 对于 $T>0$, 设 $X^H=\{X_t^H,\, t\geq 0\}$ 为概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的 $\mathbb{R}^d$ 值自相似高斯过程. 基于 $t_k=k\Delta_n$ 时随机过程 X^H 的离散观测值, 可测函数 f 有如下形式的积分型泛函:

$$\mathscr{O}_T(f)=\int_0^T f(X_t)\mathrm{d}t,\ \ L_T(y)=\frac{\mathrm{d}\mathscr{O}}{\mathrm{d}}(y),\ \ 0\leq t\leq T, \tag{1.2.4}$$

其中 $\Delta_n=\frac{1}{n}$, $k=1,\cdots,nT$, $\mathscr{O}_T(f)$ 称为随机过程 X^H 的占位时泛函. 特别地, 若 A 为 *Borel* 集合, 则 $\mathscr{O}_T(\mathbf{1}_A)$ 为占位时.

从统计学的观点来看, 占位时泛函也是估计在不变测度下遍历过程泛函的重要工具 (具体可见参考文献 [34,92]). 因为在适当的正则性假设下, 当 $T\to\infty$ 时, 由遍历性定理可得 $T^{-1}\mathscr{O}_T(f)\to\int f\mathrm{d}\mu$. 此外, $x\mapsto\int_0^T f(x+X_t)\mathrm{d}t$ 的平滑性在常微分方程的求解中也发挥着重要作用, 例如与噪声正则化现象相结合等 [26]. 特别地, 通过离散化估计占位时泛函在随机过程的数值分析和统计中是很自然出现的, 然而在数学上的挑战是确定 (1.2.4) 的最佳估计方法并求得其收敛速度, 其中典型的选择之一是 Riemann 和估计:

$$\hat{\mathscr{O}}_{T,n}(f)=\Delta_n\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}f(X_{t_{k-1}}),\quad \hat{L}_{T,n}(y)=\frac{\Delta_n}{h_n}\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\mathbf{1}_{[y-h_n,y+h_n]}(X_{t_{k-1}}^H), \tag{1.2.5}$$

其中 $h_n>0$ 为带宽参数.

在统计文献中, 主要用 (1.2.5) 来估计占位时泛函和局部时 (1.2.4), 然而它

的理论性质只在少数文献中系统地考虑过, 而且只针对相当特定的过程 X 和函数 f (见文献 [43, 70]). 对于非平滑函数 f, 占位时泛函 $\hat{\mathscr{O}}_{T,n}(f)$ 的 L^p 近似见文献 [7, 50, 79], 而其相关中心极限定理在 [6] 中给出详细证明. 对于平滑函数 f, 因为过程 $t \mapsto f(X_t)$ 又是连续的 Itô- 半鞅, 则其对应的占位时泛函研究更为广泛. [79] 中讨论了连续扩散模型占位时测度的估计问题, 并证得其最优收敛速度为 $n^{3/4}$. 依赖函数 f 的平滑性, Riemann 和估计的 L^2 误差上界及其弱极限定理见文献 [64].

在应用方面, 最重要的是当 f 是 Borel 集上的指示函数, 即 (1.2.4) 分别表示占位时和局部时时, 然而目前多研究布朗运动的情形且迄今为止所研究的过程均为 Markov 过程. 对于标量扩散过程 X 和 Borel 集合 A, 占位时和局部时的 Riemann 和估计见文献 [18, 70, 79, 103] 且得到 $\hat{\mathscr{O}}_{T,n}(A)$ 的收敛速率为 $\Delta_n^{3/4}$, $\hat{L}_{T,n}(y)$ 的收敛速率为 $\Delta_n^{1/4}$. 在布朗运动 (带漂移) 的情况下, Riemann 和估计的速率最优性可以从 [1, 61] 中得到, 但尚不清楚他们的方法是否可以扩展到跳跃过程, 或者 Riemann 和估计是否在达到最小渐近误差的意义上是渐近有效的. 最近, 在分析具有非退化系数的欧拉格式背景下, 学者们对占位时和局部时的 L^p 估计误差的数值分析 [10, 89, 97] 也产生了一些兴趣.

此外, 除 Riemann 和估计外, 学者们可能想知道是否可以使用不同的估计方法来提高收敛速率 Δ_n. 从概率的角度来看, 一个自然的估计方法是占位时和局部时的条件期望估计 $\mathbb{E}[\mathscr{O}_T(A)|\mathscr{G}_{t_k}]$, $\mathbb{E}[L_T(y)|\mathscr{G}_{t_k}]$, 其中 $\mathscr{G}_{t_k} = \sigma(X_{t_k}, k \in \{0, 1, \cdots, nT\})$ 是由 X_{t_k} 生成的 σ 代数. Altmeyer [6] 表明尽管条件期望估计通常没有解析表达式, 但它是概率论中的一个经典结果, 由梯形估计

$$\hat{\Theta}_{T,n}(f) = \Delta_n \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \frac{f(X_{t_{k-1}}) + f(X_{t_k})}{2} \tag{1.2.6}$$

给出, 并且证得梯形估计满足收敛速率为 Δ_n 的中心极限定理. 当 X 为布朗运动时, 通过证明 L^2 估计误差下界可知 Riemann 和估计 (1.2.5) 和梯形估计 (1.2.6) 都

是速率最优的, 并且后者在其渐近方差与最小 L^2 估计误差一致的意义上也是有效的. Altmeyer 和 Guéve [5] 通过研究条件期望 $\mathbb{E}[\mathscr{O}_T(A)|\mathscr{G}_{t_k}]$ 和 $\mathbb{E}[L_T(y)|\mathscr{G}_{t_k}]$ 来评估对称 α-stable $(0<\alpha\le 2)$ 过程占位时和局部时估计的最优性问题. 首先给出条件期望估计和 Riemann 和估计的渐近 L^2 估计误差的精确常数. 在这两种情况下, 证得占位时和局部时的收敛速度分别为 $\Delta_n^{\frac{1+\min(1,1/\alpha)}{2}}$, $\Delta_n^{\frac{1-1/\alpha}{2}}$. 特别地, 通过证明可知, 当 $\alpha\le 1$ 时, Riemann 和估计渐近有效且是速率最优的. 此外可知, 虽然条件期望是对未知参数 α 的显式估计, 但它们依赖于随机过程 X 的边际密度, 因此对于 $\alpha\le 2$ 无法给出解析表达式, 需要数值近似. 对于布朗运动, Altmeyer [1] 为证明其占位时 Riemann 和估计速率的一致性, 对 [5] 中的定理 5 进行拓展, 其关键思想是通过条件期望估计实现最小 L^2 误差,

$$\|\mathscr{O}_T(f)-\hat{\mathscr{O}}\|_{L^2}\ge\|\mathscr{O}_T(f)-\mathbb{E}[\mathscr{O}_T(A)|\mathscr{G}_{t_k}]\|_{L^2}, \tag{1.2.7}$$

其中 $\hat{\mathscr{O}}$ 表示 $\mathscr{O}_T(f)$ 的任意平方可积估计值且关于 σ 代数 $\mathscr{G}_{t_k}=\sigma(X_{t_k},\ k\in\{0,1,\cdots,nT\})$ 可测.

1.2.5 研究述评

通过文献梳理发现, 国内外学者对布朗运动的多重局部时、自相似高斯过程的二重自相交局部时、导数型二重自相交局部时、及 Markov 过程占位时和局部时的非参数估计等进行了深入系统的研究并取得了较为丰硕的成果, 但仍存在需进一步探讨的问题.

一是关于自相似高斯过程 MSLT 的研究. 现阶段关于多重局部时的研究多见于布朗运动, 而对于其它自相似高斯过程 MSLT 的研究大多数只停留在二重自相交局部时的探讨上, 鲜有将其拓展至更多重的情形. 二是通过占位时公式, 得到布朗运动及其它自相似高斯过程的一阶导数型二重自相交局部时, 且将分数布朗运动一阶导数型二重自相交局部时的研究推广至了高阶导数型的情形, 并广泛研究

了它们的相关性质. 但遗憾的是, 现有文献对于一般自相似高斯过程 MSLT 的导数型仍没给出具体定义和相应的研究. 三是对于局部时和占位时非参数估计的研究多见于 Markov 过程, 由于非 Markov 过程自身的复杂性, 关于非 Markov 过程占位时和局部时非参数估计的研究相对较少.

基于此, 本文首先给出自相似高斯过程 MSLT 的研究, 得到其存在性、Hölder 连续性等性质并尝试给出其 Wiener 混沌展式. 基于存在性条件并结合占位时公式, 本文也给出自相似高斯过程 MSLT 关于空间变量的导数型的定义, 并通过不同的方法证明存在性、平滑性等相关性质. 最后从应用的层面出发, 基于离散观测给出非 Markov 过程占位时和局部时的非参数估计研究.

1.3 研究思路与研究内容

1.3.1 研究思路

结合研究背景和目前的研究现状, 本研究着眼于局部时及其非参数估计问题, 只是本研究的侧重点在于自相似高斯过程的多重自相交局部时. 具体的研究思路是: 首先将二重自相交局部时的研究推广至自相似高斯过程 MSLT 的情形. 运用 Fourier 分析方法等得到 MSLT 的存在性条件, 并在此条件下证得其满足的不同性质. 接着在 MSLT 存在的基础上结合占位时公式, 给出 DMSLT 的定义并通过样本配置方法等证明其相关性质. 最后, 基于前面的结论将 Markov 过程占位时和局部时的非参数估计推广至非 Markov 过程, 给出离散观测下分数布朗运动占位时和局部时的两种非参数估计方法, 并研究其相应的渐近性质. 本文详细的研究思路见如下技术线路图:

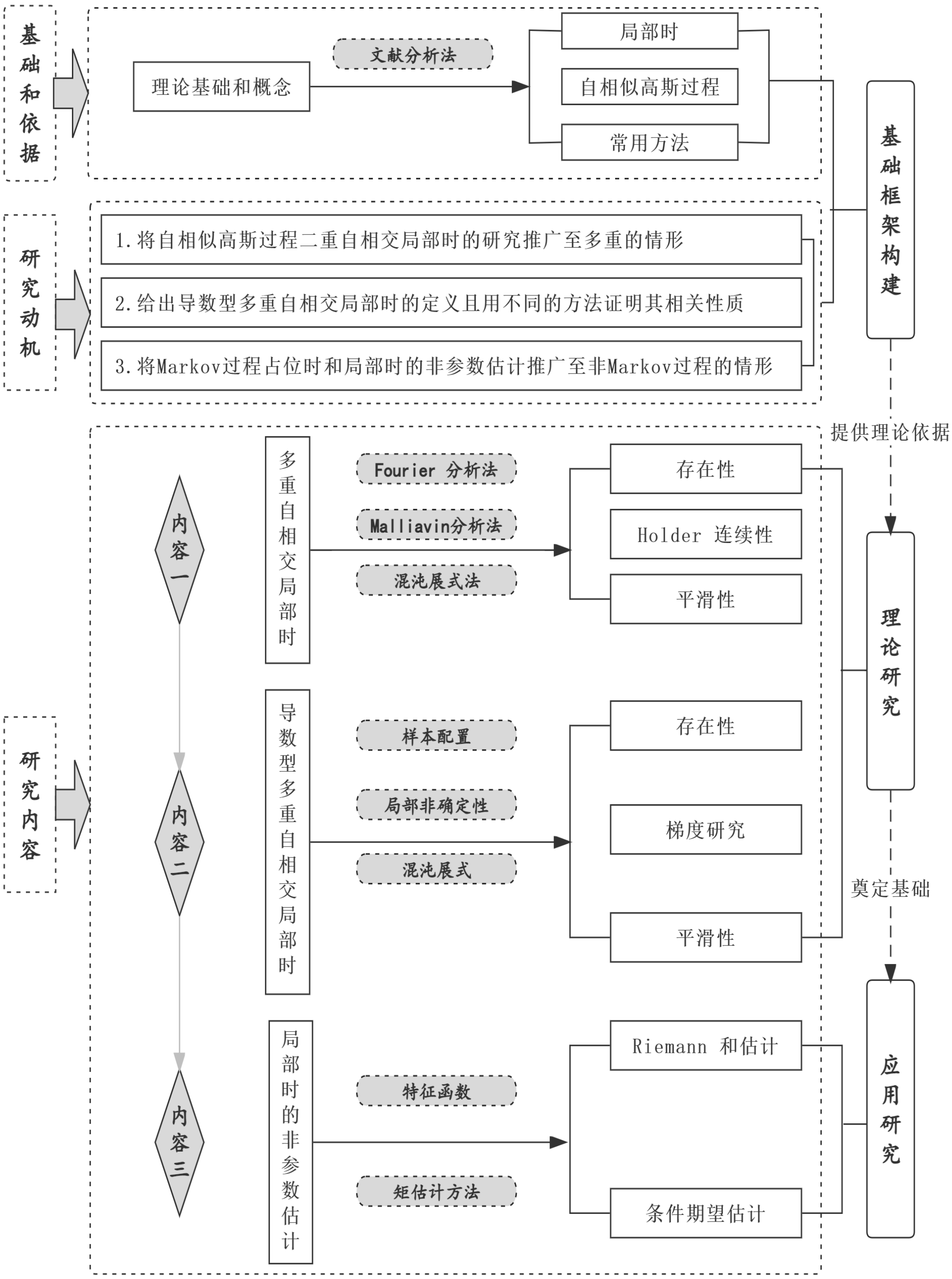
基础和依据
理论基础和概念
文献分析法
局部时
自相似高斯过程
常用方法
研究动机
1. 将自相似高斯过程二重自相交局部时的研究推广至多重的情形
2. 给出导数型多重自相交局部时的定义且用不同的方法证明其相关性质
3. 将Markov过程占位时和局部时的非参数估计推广至非Markov过程的情形
基础框架构建
提供理论依据
研究内容
内容一
多重自相交局部时
Fourier 分析法
Malliavin分析法
混沌展式法
存在性
Holder 连续性
平滑性
理论研究
内容二
导数型多重自相交局部时
样本配置
局部非确定性
混沌展式
存在性
梯度研究
平滑性
奠定基础
内容三
局部时的非参数估计
特征函数
矩估计方法
Riemann 和估计
条件期望估计
应用研究

图1: 技术路线图

1.3.2 研究内容

根据局部时及其非参数估计的重要性和必要性, 本文主要内容为自相似高斯过程的多重自相交局部时及其非参数估计统计性质的研究. 由于对于自相交局部时的研究目前多关注布朗运动的多重自相交局部时和其它自相似高斯过程二重自相交局部时且其非参数估计多为连续随机过程和平稳 Markov 过程. 在这种背景下, 研究自相似高斯过程的 MSLT 和其 DMSLT 拓展和完善了局部时的理论研究体系. 另外讨论其占位时和局部时非参数估计值的相关性质, 也为其应用奠定理论基础. 主要的研究内容分为如下几个方面:

(1) 自相似高斯过程 MSLT 的研究. 本部分的研究主要分为三个部分展开: 第一, MSLT 的存在性研究. 目前对于自相似高斯过程自相交局部时的研究多为二重的情形, 本部分首先推广至多重的情形, 证明其存在且为本文后续的证明奠定基础; 第二, MSLT 的 Hölder 连续性研究. 在存在性的基础上证明 MSLT 关于两个变量分别满足 Hölder 连续性并给出它们的阶; 第三, MSLT 的混沌展式研究. 借助 Malliavin 分析给出分数布朗运动 MSLT 的混沌展式, 并通过混沌展式证明其平滑性. 最后, 将相应的结果推广至高维分数布朗运动.

(2) 自相似高斯过程 DMSLT 的研究. 本部分的研究重点是给出 DMSLT 的定义形式并证明其存在性条件, 为后续相关性质的研究奠定基础. 由前面的分析可知 MSLT 存在, 则结合占位时公式, 首次给出 MSLT 关于空间变量一阶导数的定义形式并证明其存在性等. 接着, 在存在性条件下, 研究 MSLT 梯度的存在性、Hölder 连续性. 最后通过混沌展式法证明 DMSLT 的平滑性.

(3) 局部时的非参数估计统计性质研究. 因为占位时表示随机过程在某一区间内的时间总和, 而局部时是其占位密度. 本部分主要给出分数布朗运动占位时和局部时的非参数估计, 其中用到的非参数估计方法为 Riemann 和估计和条件期望估计. 首先用分数布朗运动的特征函数和局部非确定性证明 Riemann 和估计量 L^2 误差的精确上界. 而证明占位时 Riemann 和估计的中心极限定理是此部分

的难点, 由于分数布朗运动的特殊性质, 现有鞅方法和随机积分不可使用, 所以本文主要采用矩估计法结合链式论证的方法. 最后, 为提高收敛速率给出占位时和局部时的条件期望估计并得到其相关性质和中心极限定理.

1.4 结构安排

根据研究思路将全文分为六个章节, 各章具体内容如下:

第一章是绪论. 首先, 介绍本文的选题背景, 论述本文研究主题的重要性与必然性, 进而引出本文的研究意义; 其次, 从自相似高斯过程、局部时、导数型局部时、局部时的统计推断等四个方面对国内外文献进行梳理、归纳与总结, 明确局部时已有研究成果及其可拓展空间; 再次, 提出本文的研究思路和研究内容、结构安排等; 最后总结与概述本文创新之处.

第二章为相关概念与理论基础. 本章主要介绍后续工作中用到的相关概念和常用的方法. 首先介绍局部时的相关概念; 接着给出分数布朗运动、次分数布朗运动及双分数布朗运动等自相似高斯过程的相关概念和性质; 最后, 介绍后续证明主要结论时用到的相关技术和方法, 如 (强) 局部非确定性、Malliavin 分析、混沌展式等.

第三章为自相似高斯过程的 MSLT. 将目前多研究的自相似高斯过程二重自相交局部时推广至多重的情形. 首先运用 Fourier 分析方法结合自相似高斯过程的强局部非确定性证得 MSLT 在 $L^p(\Omega)$, $p \in [1,\infty)$ 中的存在性并证得其满足指数可积性. 接着, 在此基础上, 结合局部非确定性考虑 MSLT 分别关于时间变量和空间变量的 Hölder 连续性. 最后为证明 MSLT 在 Meyer-Watanabe 意义下的平滑性, 用 Malliavin 分析中的 Wiener 混沌分解法给出一维分数布朗运动 MSLT 的 Wiener 混沌展式并将其推广至 d $(d \geq 2)$ 维的情形, 其它自相似高斯过程的结论类似可证得.

第四章研究自相似高斯过程的 DMSLT. 对分数布朗运动导数型二重自相交

局部时的研究已经非常深入. 然而, 除了少数文献中证明的 $\mathbb{R}$ 中布朗运动的多重重整化自相交局部时的连续可微性之外, 对于自相似高斯过程 DMSLT 相应结果的研究仍很少. 首先, 基于 MSLT 的存在性条件结合占位时公式给出自相似高斯过程 DMSLT 的定义. 其次, 利用样本配置方法证得 DMSLT 在 $L^p(\Omega)$ 中的存在性条件并且证得其关于空间变量满足 Hölder 连续性. 再次, 根据 DMSLT 的定义可研究 MSLT 的梯度性质, 证得其存在性、联合 Hölder 连续性等. 最后, 借助 Hermite 多项式给出 DMSLT 的混沌展式证明其在 Meyer-Watanabe 意义下满足平滑性. 为方便, 仅给出分数布朗运动 DMSLT 平滑性的证明, 其它自相似过程的证明类似可得.

第五章为分数布朗运动占位时和局部时的非参数估计统计性质研究. 由于基于离散观测的占位时和局部时的非参数估计在数学、金融等方面有广泛应用且得到众多学者的研究, 但目前学者们多关注连续随机过程和平稳 Markov 过程等. 本章将其推广至分数布朗运动, 致力于研究基于离散观测的分数布朗运动占位时和局部时的 Riemann 和估计和条件期望估计. 首先给出分数布朗运动占位时和局部时 Riemann 和估计的 L^2 近似结果, 讨论一般情况下的一致性和收敛速度, 且通过矩估计方法得到占位时估计的中心极限定理. 最后为提高收敛速率, 介绍占位时和局部时的另一种非参数估计方法——条件期望估计, 得到条件期望估计的相关性质和中心极限定理.

第六章为结论与展望. 总结本文的重要研究结论, 并对未来研究进行展望.

1.5 创新之处

本文将以往研究的布朗运动多重自相交局部时和分数布朗运动二重自相交局部时推广至自相似高斯过程的多重自相交局部时, 并在其存在性的基础上结合占位时公式给出导数型多重自相交局部时的定义形式. 最后从应用的角度出发, 给出分数布朗运动占位时和局部时的非参数估计统计性质研究. 本文的创新点主

要体现在以下三个方面:

(1) 研究自相似高斯过程的 MSLT, 旨在将自相似高斯过程二重局部时的研究推广至多重自相交局部时. 因为已有研究大多讨论了二重自相交局部时的相关性质, 鲜有将其推广至自相似高斯过程 MSLT 的情形. 此外, 由于自相似高斯过程既不是 Markov 过程也不是半鞅, 这使得一些证明标准布朗运动多重局部时的随机分析工具不能被直接应用. 另一方面, 自相似高斯过程 MSLT 的结构更为复杂, 也给计算带来了很大的困难. 本文首先证得 MSLT 的存在性, 并且在此基础上证明 MSLT 的相关理论性质, 为后续研究奠定一定的理论基础.

(2) 研究自相似高斯过程的 DMSLT. 目前学者们对分数布朗运动导数型二重自相交局部时的研究已经非常深入, 而对于自相似高斯过程 DMSLT 还没有给出具体的定义. 另一方面, 自相似高斯过程 DMSLT 比导数型二重自相交局部时的积分结构复杂且自相似高斯过程满足的局部非确定性不能在证明过程中直接应用. 本文基于自相似高斯过程 MSLT 的存在性条件, 首先结合占位时公式给出自相似高斯过程 MSLT 一阶导数的定义形式. 为得到 DMSLT 的存在性等相关性质, 本文主要用样本配置和混沌展式等方法. 样本配置方法提供了一种运用局部非确定性的方法, 它在证明存在性和 Hölder 连续性方面起到至关重要的作用. 在存在性条件基础上, 利用 Hermite 多项式给出 DMSLT 的混沌展式证得 DMSLT 在 Meyer-Watanabe 意义下的平滑性. 结合高斯过程广泛的应用背景, 此类 DMSLT 的研究不仅为局部时相关的各类渐近性理论结果的证明提供有效的手段, 而且进一步拓展了导数型局部时的理论研究.

(3) 基于分数布朗运动二重自相交局部时的存在性, 从应用的角度出发, 将 Markov 过程占位时和局部时非参数估计拓展至非 Markov 的过程. 由于目前关于占位时和局部时的非参数估计问题多见于 Markov 过程的研究, 对非 Markov 过程, 如分数布朗运动占位时和局部时非参数估计研究并不完善. 本文首先介绍占位时和局部时的 Riemann 和估计, 通过分数布朗运动的特征函数和其满足的局

部非确定性给出 Riemann 和估计的 $L^2(\Omega)$ 逼近误差的精确上界. 由于分数布朗运动的特殊性质, 现有的鞅方法或随机积分表示无法直接用来证明估计值的中心极限定理, 所以本文利用分数布朗运动的性质, 通过矩估计方法结合链式论证证得占位时估计的中心极限定理, 而局部时估计的中心极限定理类似可得. 最后为提高收敛速率, 简要介绍占位时和局部时的另一种非参数估计方法——条件期望估计并得到其相关的性质.

2 相关概念与理论基础

本章首先介绍局部时的相关定义和性质等; 接着介绍分数布朗运动、次分数布朗运动和双分数布朗运动等自相似高斯过程的相关概念和基本性质; 最后给出本文后续证明过程中需要用到的一些经典方法, 如局部非确定性、 Malliavin 分析以及 Wiener 混沌展式等, 详细讨论参阅文献 [95, 98, 102, 118, 138, 139].

2.1 局部时

2.1.1 占位测度

令 $T\in\mathbb{R}$, $\{X=X(t),t\in T\}$ 为概率空间 $(\Omega,\ \mathscr{F},\ P)$ 上取值于 $\mathbb{R}^d$ 的随机过程, λ 表示 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 测度, 对于给定的集合 $A\in\mathscr{B}(T)$, 定义 A 上的占位测度为

$$\mu_A(B)=\lambda\left(A\cap X^{-1}(B)\right),\ \ B\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^d).$$

由占位测度的定义可知, $\mu_A(B)$ 表示在 A 这段时间内随机过程 X 在集合 B 里的时间. 若对于任意 $A\in\mathscr{B}(T)$, 均有 $\mu_A\ll\lambda$ 成立, 则称随机过程 X 满足局部时的条件, 此时将 Radon-Nikodym 导数 $\frac{\mathrm{d}\mu_A}{\mathrm{d}\lambda}$ 称为 A 上的占位密度, 记为 $L(x,A)$, 则有

$$\lambda\left(t\in A:X(t)\in B\right)=\int_B L(x,A)\mathrm{d}x,\ A\in\mathscr{B}(T),\ B\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^d).$$

占位密度 $L(x,A)$ 实际上就是在 A 这段时间内在点 x 所花的时间.

引理 2.1.1 [47] 设随机过程 X 满足局部时条件, 则 $L(x,A)$ 为一个核, 即

(i) 对每个固定的 A, $L(\cdot,A)$ 关于 $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ 可测;

(ii) 对每个固定的 x, $L(x,\cdot)$ 为 $\mathscr{B}(T)$ 上的有限测度,

此时, $L(x,A)$ 称为占位核且对每个 $T\times\mathbb{R}^d$ 上的 Borel 非负函数 $f(t,x)$ 有

$$\int_T f(t,X(t))\mathrm{d}t=\int_{\mathbb{R}^d}\int_T f(t,x)L(x,\mathrm{d}t)\mathrm{d}x.$$

接下来给出局部时的定义.

2.1.2 局部时

设 X 为定义在概率空间 $(\Omega,\ \mathscr{F},\ P)$ 上的实值随机过程, 用

$$\mu(A)=\int_0^1 \mathbf{1}_A(X(s))\mathrm{d}s$$

表示 $[0,1]$ 上的占位测度 μ, λ_n 表示 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度.

定义 2.1.1 [62] 若 $\mu\ll\lambda_1$, 则 Radon-Nikodym 导数 $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda_1}$ 存在且是 $[0,1]$ 上的局部时.

令 $L(u):=\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda_1}(u)$, 则对于任意的有界 Borel 函数 f 满足

$$\int_0^1 f(X(t))\mathrm{d}t=\int_{\mathbb{R}} f(u)L(u)\mathrm{d}u.$$

关于局部时还有另一种定义:

定义 2.1.2 [98] 设 X 为定义在概率空间 $(\Omega,\ \mathscr{F},\ P)$ 上的实值随机过程, 对于 $t>0$ 和 $x\in\mathbb{R}$, X 在 x 处直到时间 t 的局部时被定义为

$$L(x,t):=\int_0^t \delta_0\left(X_s-x\right)\mathrm{d}s, \tag{2.1.1}$$

其中 δ_0 表示 Dirac delta 函数. 通过用 Gaussian 核

$$P_\varepsilon(x):=\frac{1}{(2\pi\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}\exp\{-\frac{1}{2\varepsilon}x^2\} \tag{2.1.2}$$

逼近 δ_0, 可以得到 $L(x,t)$ 的一个严格定义

$$L_{\varepsilon}(x,t) := \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t P_{\varepsilon}\left(X_s - x\right) \mathrm{d}s. \tag{2.1.3}$$

2.2 自相似高斯过程

2.2.1 分数布朗运动

本小节首先给出分数布朗运动的基本性质, 更多细节可见参考文献 ([95, 98, 102] 等).

Kolomogorov [78] 首次提出分数布朗运动的概念, 随后由 Mandelbrot 和 Van 对其进行了专门的研究. 一维分数布朗运动 $B^H = \left\{B_t^H\right\}_{t\geq 0}$ 是均值函数为零的中心高斯过程, 其协方差函数定义为

$$\mathbb{E}\left[B_t^H B_s^H\right] = \frac{1}{2}\left[t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right],$$

其中 Hurst 参数 $H\in(0,1)$ 且决定了分数布朗运动的主要性质, 如自相似性、样本轨道的正则性、长记忆性等. 特别地, 当 $H = \frac{1}{2}$ 时, B^H 为经典布朗运动.

下面详细介绍分数布朗运动的性质:

(1) 自相似性: 分数布朗运动满足

$$\{B_{at}^H, t\geq 0\} \overset{law}{=} \{a^H B_t^H, t\geq 0\}$$

且是唯一一个具有平稳增量性的自相似高斯过程;

(2) 样本轨道的正则性: 对任意的 s, $t\geq 0$, 分数布朗运动满足

$$\mathbb{E}[\left(B_t^H - B_s^H\right)^2] = |t-s|^{2H}.$$

特别地, 对任意 $\delta\in(0,H)$, 分数布朗运动有 δ 阶 Hölder 连续的样本轨道;

(3) 分数布朗运动既不是 Markov 过程, 也不是半鞅 ($H=\frac{1}{2}$ 时除外). 当 $H>\frac{1}{2}$ 时, 分数布朗运动具有长相依性; 当 $H<\frac{1}{2}$ 时, 分数布朗运动呈现短记忆性.

接下来给出分数布朗运动的积分表示形式: 对于 $u\leq t$ 和 $H>\frac{1}{2}$, 定义

$$K_H(t,s)=c_H s^{\frac{1}{2}-H}\int_s^t u^{H-\frac{1}{2}}(u-s)^{H-\frac{3}{2}}\mathrm{d}u,$$

其中

$$c_H=\left[\frac{H(2H-1)}{\beta(2-2H,H-1/2)}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

对于 $H<\frac{1}{2}$,

$$K_H(t,s)=b_H\left(\frac{t}{s}\right)^{H-1/2}(t-s)^{H-1/2}-b_H\left(H-\frac{1}{2}\right)s^{1/2-H}\int_s^t u^{H-3/2}(u-s)^{H-1/2}\mathrm{d}u,$$

其中

$$b_H=\left[\frac{2H}{((1-2H)\beta\left(2-2H,H+1/2\right))}\right]^{\frac{1}{2}},$$

且 $\beta(\cdot,\cdot)$ 为 Beta 函数. 特别地, 对于 $H=\frac{1}{2}$, 有 $K_H(t,s)=\mathbf{1}_{[0,t]}(s)$.

另外也定义一个线性算子 K_H^*:

$$\left(K_H^*\mathbf{1}_{[0,t]}\right)(s)=K_H(t,s)\mathbf{1}_{[0,t]},$$

则分数布朗运动 B^H 具有如下积分表示形式

$$B_t^H=\int_0^t K_H(t,s)\mathrm{d}B_s=\int_0^T\left(K_H^*\mathbf{1}_{[0,t]}\right)(s)\mathrm{d}B_s,$$

且其协方差函数可写为

$$R_H(s,t)=\mathbb{E}\left[B_t^H B_s^H\right]=\int_0^{s\wedge t}K_H(t,r)K_H(s,r)\mathrm{d}r. \tag{2.2.1}$$

2.2.2 次分数布朗运动

本小节主要介绍次分数布朗运动的基本性质, 更多细节可见参考文献 ([11,113] 等).

定义 2.2.1 [11] 次分数布朗运动 $\{S_t^H, t \geq 0\}$ 是一个中心化自相似高斯过程, 其协方差函数满足

$$\mathbb{E}\left[S_t^H S_s^H\right] = t^{2H} + s^{2H} - \frac{1}{2}\left[(t+s)^{2H} + |t-s|^{2H}\right], \, t, \, s \geq 0,$$

其中 $H \in (0,1)$.

次分数布朗运动具有许多与分数布朗运动相同的性质, 如自相似性、长相依性、Hölder 连续性、既不是 Markov 过程也不是半鞅 ($H \neq \frac{1}{2}$). 值得注意的的是, 与分数布朗运动最大的区别是次分数布朗运动不具有平稳增量性且在非重叠间隔上的增量更弱相关. 此外, 它的协方差以更快的多项式速度递减. 当 $H = \frac{1}{2}$ 时, S^H 也为经典布朗运动.

次分数布朗运动为 H-自相似高斯过程且对任意 t, $s \geq 0$, 其增量满足

$$\left(2-2^{2H-1}\right)|t-s|^{2H} \leq \mathbb{E}\left[|S_t^H - S_s^H|^{2H}\right] \leq |t-s|^{2H}, \, H > \frac{1}{2},$$

$$|t-s|^{2H} \leq \mathbb{E}\left[|S_t^H - S_s^H|^{2H}\right] \leq \left(2-2^{2H-1}\right)|t-s|^{2H}, \, H < \frac{1}{2}.$$

特别地, 对任意 $\delta \in (0,H)$, 次分数布朗运动有 δ 阶 Hölder 连续轨道.

2.2.3 双分数布朗运动

定义 2.2.2 [114] 双分数布朗运动 $\{B_t^{H_0,K_0}, t \geq 0\}$ 是一个中心化高斯过程, 其协方差函数满足

$$\mathbb{E}\left[B_t^{H_0,K_0} B_s^{H_0,K_0}\right] = 2^{-K_0}\left[(t^{2H_0}+s^{2H_0})^{K_0} - |t-s|^{2H_0K_0}\right],\ t,\ s \geq 0,$$

其中 $H_0 \in (0,1)$, $K_0 \in (0,1]$.

由双分数布朗运动的协方差函数可知其增量满足:

(1)

$$\mathbb{E}\left[B_t^{H_0,K_0} - B_s^{H_0,K_0}\right]^2 = t^{2H_0K_0} + s^{2H_0K_0} - 2^{1-K_0}\left[(t^{2H_0}+s^{2H_0})^{K_0} - |t-s|^{2H_0K_0}\right],$$

则可得

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathbb{E}\left[B_t^{H_0,K_0} - B_s^{H_0,K_0}\right]^2}{\varepsilon^2 H_0 K_0} = 2^{1-K_0}.$$

由此可知双分数布朗运动只在小的增量上满足平稳性, 即与次分数布朗运动一样, 双分数布朗运动也不具有平稳增量性 (除了 $H_0 = \frac{1}{2}$, $K_0 = 0$ 的情形). 当 $K_0 = 1$ 时, $B^{H_0,1}$ 为 Hurst 参数 $H_0 \in (0,1)$ 的分数布朗运动.

(2) 双分数布朗运动 $\{B_t^{H_0,K_0}, t \geq 0\}$ 也为 $H = H_0K_0$-自相似高斯过程且对任意 s, $t \geq 0$, 有

$$2^{-K_0}|t-s|^{2H_0K_0} \leq \mathbb{E}\left[B_t^{H_0,K_0} - B_s^{H_0,K_0}\right]^2 \leq 2^{1-K_0}|t-s|^{2H_0K_0}.$$

特别地, 对任意 $\delta \in (0, H_0K_0)$, 双分数布朗运动有 δ 阶 Hölder 连续轨道.

2.3 常用的方法

2.3.1 局部非确定性

Berman [12]首次引入了高斯过程局部非确定性的概念. 随后, 很多学者深入研究了这一性质 (见文献 [102, 118, 124, 125, 140]).

局部非确定性的定义如下:

定义 2.3.1 [124] 设 X 为一维高斯过程, 对于任意的自然数 $n>0$ 及正实数 $t>0$, 存在正实数 $C_{n,t}>0$, 使得

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\left(X_{t_i}-X_{t_{i-1}}\right)\right) \geq C_{n,t}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\mathbb{E}\left(X_{t_i}-X_{t_{i-1}}\right)^2 \tag{2.3.1}$$

成立, 则称 X 满足局部非确定性, 其中 $0\leq t_1\leq\cdots\leq t_n\leq t$. 此外, 在很多情形中会将定义中的 $\mathbb{E}\left(X_{t_i}-X_{t_{i-1}}\right)^2$ 替换为函数 $\varphi\left(t_i-t_{i-1}\right)$, 其中函数 φ 非负且对于所有 $r>0$ 满足 $\varphi(0)=0$, $\varphi(r)>0$.

由 2.2 节的内容可知, B^H, S^H 和 B^{H_0,K_0} 均满足局部非确定性: 对任意 $n\in N$, 存在只依赖于 n 和 Hurst 参数 H 的常数 c_H, C_H, 使得对任意 $0=s_0<s_1<\cdots<s_n$, 满足

$$c_H\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2(s_i-s_{i-1})^{2H} \leq Var\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\cdot\left(B_{s_i}^H-B_{s_{i-1}}^H\right)\right) \leq C_H\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2(s_i-s_{i-1})^{2H}, \tag{2.3.2}$$

其中对于双分数布朗运动 B^{H_0,K_0}, (2.3.2) 中的 $H=H_0K_0$.

下面简要介绍一下强局部非确定性.

Pitt [105] 给出参数空间 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 中分数布朗运动 $\{B_t^H, t\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\}$ 满足强局部非确定性, 即对任意 $t\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 及 $0<r<|t|$, $0<r<|t|$, 有

$$Var\left(B_t^H|B_s^H,\ t>s\right)\geq Cr^{2H}, \tag{2.3.3}$$

其中 $H \in (0,1)$ 为一个与 $\{B_t^H,\ t \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\}$ 有关的参数, C 为常数. 随后, Tudor 和 Xiao [119]、Luan [84]分别证得双分数布朗运动和次分数布朗运动满足以下的 ϕ-强局部非确定性, 即

定义 2.3.2 [84] 设 $\{X_t, t \in \mathbb{R}\}$ 为实值高斯过程且对所有 $t \in T$ ($T \in \mathbb{R}$ 且是闭的) 满足 $0 < \mathbb{E}[X_t]^2 < \infty$, 则存在常数 $C > 0,\ r_0 > 0$, 使得对所有 $t \in T$ 和所有 $0 < r \leq \min\{|t|, r_0\}$,

$$Var\left(X_t | X_s,\ s \in T,\ r < |t-s| < r_0\right) \geq C\phi(r) \tag{2.3.4}$$

成立, 其中 $Var\left(X_t | X_s\right)$ 表示给定 X_s 下 X_t 的条件方差, ϕ 为给定函数且满足 $\phi(0) = 0,\ \phi(r) > 0,\ r > 0$.

事实上, 强局部非确定性与局部非确定性密切相关, 通过 Berman [13] 中的引理 5.4 可知, 如果一个高斯随机过程满足强局部非确定性, 则它也满足局部非确定性.

2.3.2 Malliavin 分析

接下来简单介绍一些关于分数布朗运动 Malliavin 分析的相关知识点 [55, 98], 作为研究分数布朗运动的关键性技术, 它在后续证明中起到至关重要的作用.

设 $W = \{W(h) : h \in \mathscr{H}\}$ 表示一个随机变量集合, 其中 $\mathscr{H}$ 为实值可分 Hilbert 空间. 若对任意 $h \in \mathscr{H}$, $W(h)$ 为中心化的高斯随机变量族且对任意 $h_1, h_2 \in \mathscr{H}$, 有

$$\mathbb{E}\left[W(h_1)W(h_2)\right] = \langle h_1, h_2 \rangle_{\mathscr{H}},$$

则称 W 为完备概率空间 $(\Omega,\ \mathscr{F},\ P)$ 上的高斯过程. 对于分数布朗运动 $B^H = \{B_t^H, t \geq 0\}$, 令 $\mathscr{H}$ 为示性函数生成线性空间的完备化空间, 其上的内积定义为

$$\left\langle \mathbf{1}_{[a,b]}, \mathbf{1}_{[c,d]} \right\rangle_{\mathscr{H}} := \mathbb{E}\left[\left(B_b^H - B_a^H\right)\left(B_d^H - B_c^H\right)\right].$$

因此, 分数布朗运动可由定义在 $\mathscr{H}$ 上的高斯过程 $B^H\left(\mathbf{1}_{[0,t]}\right)=B^H$ 得到.

映射 $\mathbf{1}_{[0,t]}\to B_t^H$ 可延拓为关于 $\mathscr{H}$ 与 $L^2(\Omega,\ \mathscr{F},\ P)$ 上的一个子空间的等距同构. 记 $W(h)$ 为 $h\in\mathscr{H}$ 的象, 对于整数 $q\in\mathbb{N}$, 令 $\mathscr{H}^{\otimes q}$ 和 $\mathscr{H}^{\odot q}$ 分别表示 $\mathscr{H}$ 的 q 阶张量积和对称张量积. 此外, 记 J_q 为 $L^2(\Omega,\ \mathscr{F},\ P)$ 空间上的 q 阶 Wiener 混沌投影, J_q 可表示为由变量

$$\{H_q(W(h)),\ h\in\mathscr{H},\ \|h\|_{\mathscr{H}}=1\}$$

生成的 $L^2(\Omega,\ \mathscr{F},\ P)$ 的闭子空间, 其中 $H_q(x)$ 是 q 阶 Hermite 多项式函数. 映射 $\mathbf{1}_{[0,t]}\to B_t^H$ 给出了空间 $\mathscr{H}^{\odot q}$ 和 J_q 之间的线性等距, 其中 $\mathscr{H}^{\odot q}$ 的范数为 $\sqrt{q!}\|\cdot\|_{\mathscr{H}^{\otimes q}}$, J_q 的范数为 L^2 范数. 若 $f,g\in\mathscr{H}$ 且 g 为一个连续可微具有紧支撑的函数, 则有

$$\langle f,g\rangle_{\mathscr{H}}=\int\int f(t)g'(s)\frac{\partial R_H(t,s)}{\partial t}\mathrm{d}s\mathrm{d}t,$$

其中 $R_H(t,s)=\mathbb{E}\left[B_t^HB_s^H\right]$.

对于一个光滑的柱形随机变量 $F=f\left(W(\varphi_1),\ldots,W(\varphi_n)\right)$, 其中 $\varphi_i\in\mathscr{H},f\in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ (f 和其偏导数均有界), 其 Malliavin 导数定义为

$$DF=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(W(\varphi_1),\ldots,W(\varphi_n)\right)\varphi_i.$$

通过迭代计算可定义其 k $(k\in\mathbb{N})$ 阶导数

$$D^kF=\sum_{j_1,j_2,\ldots,j_k=1}^n\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1}\cdots\partial x_{j_k}}\left(W(\varphi_1),\ldots,W(\varphi_n)\right)\varphi_{j_1}\otimes\cdots\otimes\varphi_{j_k},$$

则 D^kF 为 $L^2\left(\Omega,\mathscr{H}^{\otimes k}\right)$ 中的元素, 其中 $\mathscr{H}^{\otimes k}$ 表示 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$的 k-阶张量积.

2.3.3 混沌展式

接下来介绍 Wiener 混沌展式的相关知识点并且也得到 Sobolev-Watanabe 空间 $\mathbb{D}^{\alpha,p}$ 的表示形式 (详细内容可见文献 [58, 100]).

Wiener 混沌展式, 粗略地说即为一个平方可积的随机过程可分解为 n 重 Wiener 随机积分的正交和. 下面给出其详细定义:

设 $I_n(f_n)$ 表示对称核 $f_n \in L^2([0,T]^n)$ 关于 Wiener 过程的多重 Itô 随机积分, 则对于平方可积随机变量 F 的 Wiener 混沌展式为

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n),$$

其中 f_n 称为 F 的 n 阶混沌分量, 用 L 表示 Ornstein-Uhlenbeck 算子满足

$$LF = -n\sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n).$$

设 $B = \{B_t, t \geq 0\}$ 为定义在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的布朗运动, 其中 $\mathscr{F}$ 由 B 生成. 对于函数 $f : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$, 其对称化定义为

$$\tilde{f}(t_1, \cdots, t_n) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma} f\left(t_{\sigma(1)}, \cdots, t_{\sigma(n)}\right),$$

其中 $\sum$ 是 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 所有重排 σ 的和. 记对称的平方可积函数 $\tilde{f} : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ 组成的空间为 $L_s^2(\mathbb{R}_+^n)$, 则 $f \in L_s^2(\mathbb{R}_+^n)$ 的 n 重随机积分可定义为

$$I_n(f) = n!\int_0^{\infty}\int_0^{t_n}\cdots\int_0^{t_2} f(t_1, \cdots, t_n)\mathrm{d}B_{t_1}\cdots\mathrm{d}B_{t_n}.$$

注意到, 若 $f \in L^2\mathbb{R}_+$, $I_1(f) = B(f)$ 是 f 的 Wiener 积分. 若 $f \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$ 不一定对称, 则定义 $I_n(f) = I_n(\tilde{f})$, 由 Itô 随机积分性质可知, 对所有 n, $m \geq 1$, $f \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$, $g \in$

$L^2(\mathbb{R}_+^m)$ 有

$$\mathbb{E}(I_n(f)I_m(g)) = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ n!\langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}, & m = n. \end{cases}$$

接着介绍 n 重随机积分与 Hermite 多项式的关系.

对每个 $n \geq 0$, n-阶 Hermite 多项式 $H_n(x)$ 定义为

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right), \ n \geq 0 \tag{2.3.5}$$

且 $H_0(x) = 1$.

假设 X, Y 为两个满足联合 Gaussian 分布的随机变量且 $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 0$, $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(Y^2) = 1$, 则对所有 n, $m \geq 1$, 有

$$\mathbb{E}(H_n(X)H_m(Y)) = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{1}{n!}[\mathbb{E}(XY)]^n, & m = n. \end{cases} \tag{2.3.6}$$

此外 Hermite 多项式还有如下结论, 它在随后的证明中起到重要作用.

引理 2.3.1 [100] 设 X 为服从 $N(0,\sigma^2)$ 的随机变量, 则

$$\mathbb{E}[H_{2m}(X)] = \frac{\sqrt{(2m)!}\left(\sigma^2 - 1\right)^m}{2^m m!}, \tag{2.3.7}$$

若 n 为奇数, 则 $\mathbb{E}[H_n(X)] = 0$.

接下来给出 n 重随机积分与 Hermite 多项式的关系.

对于 $g \in L^2(\mathbb{R}_+)$, 有

$$I_n(g^{\otimes n}) = \|g\|^n_{L^2(\mathbb{R}_+)} H_n\left(\frac{B(g)}{\|g\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}} \right),$$

其中 $g^{\otimes n} = g(t_1)\cdots g(t_n)$, 对任意 $n \geq 1$, 记 n 重随机积分生成的空间为 $\mathbf{H}_n$, 其

为 $L^2(\Omega)$ 空间的闭子空间. 当 $n=0$ 时, $\mathbf{H}_0$ 为常数空间; 当 $n=1$ 时, $\mathbf{H}_1$ 与高斯空间 $\{B(g),\ g\in L^2(\mathbb{R}_+)\}$ 一致, 则可得 $L^2(\Omega)$ 上的正交分解

$$L^2(\Omega)=\bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathbf{H}_n.$$

从而, 对所有的 $F\in L^2(\Omega)$ 可分解为唯一的 n 重随机积分的和

$$F=\mathbb{E}(F)+\sum_{n=1}^{\infty}I_n(f_n),$$

其中 $f_n\in L^2(\mathbb{R}_+)$ 且上式称为 F 的 Wiener 混沌展式.

下面给出一个与 Wiener 混沌展式相关的结论.

引理 2.3.2 [100] 设 $\{F_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 为一族平方可积随机变量, 其混沌展式为

$$F_\varepsilon=\sum_{n=0}^{\infty}I_n\left(f_n^\varepsilon\right),$$

其中 f_n^ε 为对称的且属于 $L^2([0,T]^n)$.

假设

(1) 当 $\varepsilon\to 0$ 时, f_n^ε 在 $L^2([0,T]^n)$ 中收敛于对称函数 $f_n\in L^2([0,T]^n)$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sup_\varepsilon n!\,\|f_n^\varepsilon\|_2^2<\infty$,

则 F_ε 在 $L^2(\Omega)$ 中收敛于 $\sum_{n=0}^{\infty}I_n\left(f_n\right)$.

接下来介绍 Sobolev-Watanabe 空间 $\mathbb{D}^{\alpha,p}$ 的相关知识点.

若 $p\in(0,\infty)$ 且 $\alpha\in\mathbb{R}$, Sobolev-Watanabe 空间 $\mathbb{D}^{\alpha,p}$ 关于如下范数

$$\|F\|_{\alpha,p}=\left\|(Id-L)^{\frac{\alpha}{2}}F\right\|_{L^p(\Omega)}$$

定义为多项式随机变量集的闭包, 其中 Id 表示单位映射.

众所周知, 随机变量 F 属于 $\mathbb{D}^{\alpha,2}$ 当且仅当其混沌展式 $\sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)$ 满足:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1+n)^{\alpha}\left\|I_n(f_n)\right\|_2^2<\infty. \tag{2.3.8}$$

最后给出与 Wiener 混沌展式相关的 Stroock 公式 (见文献 [29, 101]):

引理 2.3.3 [29] 设 $F \in \mathbb{D}^{\infty,2}$, 则其 Wiener 混沌展式可写为:

$$F=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}I_n\left(\mathbb{E}\left[D^n F\right]\right). \tag{2.3.9}$$

3 自相似高斯过程的多重自相交局部时

由欧几里得量子场论中某些随机场的构造可知, 多重相交局部时在数学物理、金融等领域有非常重要的作用 [63,143]. 然而, 根据已有研究可知, 相交局部时的研究多见于二重的情形, 而对于自相似高斯过程的 MSLT 还没有给出详细的研究. 此外, 由于自相似高斯过程的特殊性质, 使得一些证明标准布朗运动多重局部时的随机分析工具不能被直接应用. 另一方面, 相比较于二重自相交局部时, MSLT 的结构更为繁冗, 计算更为复杂. 因此, 将二重自相交局部时的研究推广至自相似高斯过程 MSLT, 并证明其相关性质具有重要的理论意义和应用价值.

本章主要研究自相似高斯过程的 MSLT. 首先运用 Fourier 分析方法结合自相似高斯过程的强局部非确定性得到 MSLT 在 $L^p(\Omega)$, $p\in[1,\infty)$ 中的存在性条件并在此条件下证得其满足指数可积性. 接着, 根据自相似高斯过程满足的局部非确定性等考虑 MSLT 分别关于时间变量和空间变量的 Hölder 连续性. 特别地, 最后用 Malliavin 分析给出一维分数布朗运动 MSLT 的 Wiener 混沌展式, 通过该混沌展式证明其平滑性等相关性质且将相应结果推广至高维分数布朗运动, 其它自相似高斯过程 MSLT 的平滑性类似可得证.

3.1 问题综述

数学上布朗运动多重相交局部时的研究是由布朗运动重点的研究引入和带动的. 由于相交局部时具有其特定的度量性, 即可把它当成度量水平集的随机测度, 从而它被许多研究者引入作为研究布朗运动重点的一个强有力的工具. 对于 MSLT, 最初由 Varadhan [120] 研究布朗运动的 $k=2$ 重自相交局部时引入, 随着研究的深入, 学者们不仅将二重相交局部时扩展至 $k\geq 2$ 重的情形 [94,148], 而且还将布朗运动推广至其它自相似高斯过程 [49,56,57,73].

作为布朗运动的推广, 分数布朗运动具有平稳增量性、自相似性和长相依

性, 被广泛地应用于物理、电子通信、数量金融等领域的随机模拟中[142,147]. 因此, 用分数布朗运动随机模型描述股票价格、利率等随机现象更贴近实际生活, 而且研究它的样本轨道性质 (如相交局部时) 在现实研究中也具有非常重要的意义. Rosen[111]首次给出平面分数布朗运动的二重自相交局部时, 随后 Hu 和 Nualart[56] 将结果推广至 d 维的情形, 运用 Malliavin 分析给出 d 维分数布朗运动二重自相交局部时的存在性条件. Yu[131] 进一步研究了 d 维分数布朗运动二重自相交局部时, 给出其 Hölder 连续性和平滑性条件. 关于分数布朗运动二重局部时的更多研究可见 [67,69,104,121].

作为分数布朗运动的延伸, Song 等[118] 介绍并研究了一类特殊的高斯过程 $X^H = \{X_t^H,\, t \le 0\}$, 对一些参数 $H \in (0,1)$, 其满足自相似性, 即 X^H 有退化性质

$$X_{ct}^H \overset{law}{=} c^H X_t^H, \tag{3.1.1}$$

它保留了分数布朗运动的许多特性, 并将分数布朗运动作为一个特例. 特别地, 一些众所周知的高斯过程也具有这一特性, 如布朗运动、次分数布朗运动和双分数布朗运动. 关于此类自相似高斯过程二重自相交局部时的研究见 [60,102,118,135].

目前研究多重局部时用到的主要工具有 Fourier 分析[109]、白噪声分析[33,63]、Malliavin 计算[16,44,144] 等. 用 Fourier 分析处理局部时时, 往往要结合高斯过程的局部非确定性. Rosen[109] 用此方法证明了平面布朗运动的三重重整化相交局部时的联合连续性. Bass 和 Khoshnevisan[15] 将这些结果推广至平面布朗运动的 $k \ge 2$ 重相交局部时. 当使用白噪声分析方法时, 通常需要借助 S-变换这一工具. Shieh[115] 用白噪声分析方法证得平面布朗运动的 $k \ge 2$ 重相交局部时是一个 Hida 分布. Mendonça 和 Streit[94] 也基于白噪声分析方法得到布朗运动多重局部时混沌展式的核并讨论了其 L^2 特性. 由于 Malliavin 分析中的 Wiener 混沌展式研究局部时时, 需要的条件相对较少, 计算更为简单, 目前已成为分析局部时

的一种有力工具. 根据已有文献可知, 早在 1992 年 Nualart 和 Vives [100] 就给出布朗运动多重局部时的 Wiener 混沌展式并且证明了重整化多重局部时的存在性. 此后, Wiener 混沌展式被广泛应用于局部时的相关证明中 [65, 123].

然而与布朗运动多重局部时的广泛研究相比, 对自相似高斯过程 MSLT 的研究还不完善, 因此研究自相似高斯过程 MSLT 至关重要. 将布朗运动多重局部时的定义推广至其它更一般自相似高斯过程 X^H, 从而自相似高斯过程 k 重自相交局部时可定义为:

$$L_k^H(x,t)=\int_{\Delta_k}\delta(X_{t_2}^H-X_{t_1}^H-x_1)\ldots\delta(X_{t_k}^H-X_{t_{k-1}}^H-x_{k-1})\mathrm{d}\boldsymbol{t},\quad k\geq 1, \tag{3.1.2}$$

其中 $\Delta_k=\{(t_1,t_2,\cdots,t_k)\in[0,t]^k:0\leq t_1\leq\cdots\leq t_k\leq t\}$, $\boldsymbol{t}=(t_1,\cdots,t_k)$, $x=(x_1,\cdots,x_{k-1})$ 且 $\delta(x)$ 表示 Dirac delta 函数.

为了更精确, (3.1.2) 可定义为

$$L_{k,\varepsilon}^H(x,t)=\int_{\Delta_k}\prod_{j=1}^{k-1}p_\varepsilon\left(X_{t_{j+1}}^H-X_{t_j}^H-x_j\right)\mathrm{d}\boldsymbol{t}, \tag{3.1.3}$$

其中 $p_\varepsilon(x):=\frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}}e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon}}$ 是方差为 ε 的中心高斯密度函数且当 $\varepsilon\to 0$ 时, $p_\varepsilon(x)$ 弱收敛于 Dirac delta 函数 $\delta(x)$.

本章首要目标是将自相似高斯过程二重自相交局部时的研究推广至自相似高斯过程 MSLT, 证明其存在性、指数可积性及分别关于时间变量和空间变量的 Hölder 连续性. 特别地, 受到 Eddahbi [39] 工作的激励, 本章尝试将 [39] 中 $k=2$ 时分数布朗运动局部时混沌展式的研究推广至 $k\geq 2$ 时分数布朗运动自相交局部时的情况, 给出一维分数布朗运动 MSLT 的 Wiener 混沌展式, 在此基础上证明其在 Meyer-Watanabe 意义下的平滑性并将相关研究扩展至 d ($d\geq 2$) 维分数布朗运动.

本章的结构如下: 第二节主要通过 Fourier 分析方法结合强局部非确定性得到 MSLT 在 $L^p(\Omega)$, $p\in[1,\infty)$ 中的存在性条件并证得其满足指数可积性. 此

外, 根据自相似高斯过程满足的局部非确定性等考虑 MSLT 分别关于时间变量和空间变量的 Hölder 连续性. 第三节中借助 Malliavin 分析给出一维分数布朗运动 MSLT 的 Wiener 混沌展式, 并通过该展式证明在 Meyer-Watanabe 意义下的平滑性等相关性质且将相应结果推广至高维分数布朗运动, 其它自相似高斯过程 MSLT 的平滑性类似可得证.

3.2 MSLT 的存在性

令 $G^H=\{X^H|X^H=X_t^H,\ t\geq 0\}$, 其中 X_t^H 为一类满足自相似性、(强) 局部非确定性的中心高斯过程, H 为 Hurst 参数且 $H\in(0,1)$. 不难发现, 分数布朗运动、次分数布朗运动和双分数布朗运动均属于集合 G^H. 本小节将布朗运动多重局部时的研究推广至 G^H 中的高斯过程 X^H, 通过 Fourier 分析法结合 X^H 的 (强) 局部非确定性给出 X^H 的 MSLT 的相关结论.

令

$$p_\varepsilon(x):=\frac{1}{2\pi\varepsilon}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\varepsilon}}=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{\iota\xi x}\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon\xi^2}{2}}\mathrm{d}\xi$$

表示方差为 ε 的中心高斯密度函数. 一般来讲, Dirac delta 函数 $\delta(x)$ 可以用热核 $p_\varepsilon(x)$ 逼近, 故可以得到高斯过程 $X^H\in G^H$ 的 MSLT 的如下逼近形式

$$\begin{aligned}L_{\varepsilon,k}^H(x,t)&:=\int_{\Delta_k}p_\varepsilon(X_{t_2}^H-X_{t_1}^H-x_1)\cdots p_\varepsilon(X_{t_k}^H-X_{t_{k-1}}^H-x_{k-1})\mathrm{d}\boldsymbol{t}\\&=\frac{1}{(2\pi)^{k-1}}\int_{\mathbb{R}^{k-1}}\int_{\Delta_k}\prod_{j=1}^{k-1}\mathrm{e}^{\iota\xi_j(X_{t_{j+1}}^H-X_{t_j}^H-x_j)}\prod_{j=1}^{k-1}\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon\xi_j^2}{2}}\mathrm{d}\boldsymbol{t}\mathrm{d}\boldsymbol{\xi},\ \ k\geq 2,\end{aligned}\tag{3.2.1}$$

其中 $\Delta_k=\{(t_1,t_2,\cdots,t_k)\in[0,t]^k:0\leq t_1\leq\cdots\leq t_k\leq t\}$, $\mathrm{d}\boldsymbol{t}=\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_k$, $\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}=\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\cdots\mathrm{d}\xi_{k-1}$. 本章主要研究 (3.2.1) 的相关性质.

这一小节主要考虑由 (3.2.1) 定义的自相似高斯过程 $X^H\in G^H$ 的 MSLT 在 $L^p(\Omega)$, $p\in[1,\infty)$ 中的存在性和 Hölder 连续性等. 在证明主要结论前, 首先给

出自相似高斯过程 X^H 强局部非确定性的相关结论.

引理 3.2.1 对于自相似高斯过程 $X^H \in G^H$, $0<H<1$, 存在常数 $0<C<\infty$ 使得

$$Var\left(X_{t_{m+1}}^H - X_{t_m}^H | X_{t_2}^H - X_{t_1}^H, \cdots, X_{t_m}^H - X_{t_{m-1}}^H\right) \geq \min_{1\leq k\leq m} C|t_{m+1}-t_k|^{2H}, \tag{3.2.2}$$

其中 $m\geq 1$ 且 $0\leq t_1\leq\cdots\leq t_m\leq t$.

证明. 由文献 [121] 中的定义可得

$$\begin{aligned}
&Var\left(X_{t_{m+1}}^H - X_{t_m}^H | X_{t_2}^H - X_{t_1}^H, \cdots, X_{t_m}^H - X_{t_{m-1}}^H\right)\\
&= \inf_{a_i\in\mathbb{R}, 1\leq i\leq m} \mathbb{E}\left(X_{t_{m+1}}^H - X_{t_m}^H - \sum_{i=1}^{m-1} a_i\left(X_{t_{i+1}}^H - X_{t_i}^H\right)\right)^2\\
&= \inf_{b_i\in\mathbb{R}, 1\leq i\leq m} \mathbb{E}\left(X_{t_{m+1}}^H - \sum_{i=1}^{m} b_i X_{t_i}^H\right)^2\\
&= Var\left(X_{t_{m+1}}^H | X_{t_1}^H, X_{t_2}^H, \cdots, X_{t_m}^H\right)\\
&\geq \min_{1\leq k\leq m} C|t_{m+1}-t_k|^{2H},
\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

其中 $b_1=-a_1$, $b_i=a_{i-1}-a_i$, $i=2,\cdots,m-1$ 且 $b_m=1-a_{m-1}$. □

下面给出的基本积分结果对于证明指数可积性至关重要.

引理 3.2.2 对于高斯过程 X^H, $0<H<1$ 和任意 $T>0$, 存在常数 K 使得

$$\int_{[0,T]_\leq} \prod_{j=1}^m (s_j - s_{j-1})^{-H} \mathrm{d}s \leq \frac{K^m T^{m(1-H)}}{\Gamma(1+m(1-H))}, \tag{3.2.4}$$

其中 $[0,T]_\leq = \{0=s_0\leq s_1\leq s_2\leq\cdots\leq s_m\leq T\}$.

证明. 利用 Beta 函数的特性和递归算法, 可以得出以下结论

$$\int_{[0,T]_\leq} \prod_{j=1}^m (s_j - s_{j-1})^{-H} \mathrm{d}s = \frac{[\Gamma(1-H)]^m}{\Gamma(1+m(1-H))} T^{m(1-H)},$$

其中 Γ 为 Gamma 函数. 由于 Γ 在 $(0,1)$ 上有界, 则式 (3.2.4) 成立. □

下面给出 G^H 中 MSLT 的存在性和指数可积性.

定理 3.2.1 设 X^H, $0<H<1$ 为集合 G^H 中的高斯过程, 对 $p\in[1,\infty)$, $L_k^H(x,t)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中存在. 即, 当 $\varepsilon\to 0$ 时, 由式 (3.2.1) 定义的 $L_{\varepsilon,k}^H(x,t)$ 收敛于 $L_k^H(x,t)$. 此外, $L_k^H(x,t)$ 满足指数可积性, 即存在常数 γ, $\lambda>0$ 使得

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\gamma|L_k^H(x,t)|^\lambda\right)\right]<\infty. \tag{3.2.5}$$

证明. 首先给出 $L_k^H(x,t)$ 存在性的证明.

对于偶数 $m>1$, 有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\left|L_{\varepsilon,k}^H(x,t)\right|^m\right)\\
&=\frac{1}{(2\pi)^{m(k-1)}}\int_{\mathbb{R}^{m(k-1)}}\int_{(\Delta_k)^m}\mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{l=1}^m\sum_{j=1}^{k-1}\imath\xi_j^l\left(X_{t_{j+1}^l}^H-X_{t_j^l}^H-x_j\right)\right)\right]\\
&\times\exp\left\{-\sum_{l=1}^m\sum_{j=1}^{k-1}\frac{\varepsilon|\xi_j^l|^2}{2}\right\}\mathrm{d}t^l\mathrm{d}\xi^l\\
&\le\frac{C}{(2\pi)^{m(k-1)}}\int_{\mathbb{R}^{m(k-1)}}\int_{(\Delta_k)^m}\mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{l=1}^m\sum_{j=1}^{k-1}\imath\xi_j^l\left(X_{t_{j+1}^l}^H-X_{t_j^l}^H\right)\right)\right]\mathrm{d}t^l\mathrm{d}\xi^l,
\end{aligned}\tag{3.2.6}$$

其中 $\mathrm{d}t^l=\prod_{l=1}^m\prod_{j=1}^k\mathrm{d}t_j^l$, $\mathrm{d}\xi^l=\prod_{l=1}^m\prod_{j=1}^{k-1}\mathrm{d}\xi_j^l$.

由 [52] 中样本重新排列的方法, 对任意固定的 j, 设 π^j 表示 $\{t_j^l,\ l=1,\cdots,m\}$ 的一组重排, 记

$$\triangle(\pi^1,\cdots,\pi^{k-1})=\left\{t_j^l\in(\Delta_k)^m|t_j^{\pi^j(l)}\le t_j^{\pi^j(l+1)},\ l=1,\cdots,m\right\},$$

其中当 $l=m$ 时, 规定 $t_j^{\pi^j(m+1)}=t_{j+1}^{\pi^{j+1}(1)}$. 结合高斯过程的局部非确定性 (2.3.1) 得

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{l=1}^m\sum_{j=1}^{k-1}\imath\xi_j^l\left(X_{t_{j+1}^l}^H-X_{t_j^l}^H\right)\right)\right]\le\exp\left(-C_H\sum_{l=1}^m\sum_{j=1}^k(u_j^l)^2\left(t_j^{\pi^j(l+1)}-t_j^{\pi^j(l)}\right)^{2H}\right), \tag{3.2.7}$$

其中 u_j^l 为 $\xi_j^{\pi^j(l)}$ 的适当变量变换, 选取

$$u_j^l = \sum_{r\le l} \xi_j^{\pi^j(r)} + \sum_{r>l} \xi_{j-1}^{\pi^j(r)}.$$

特别地, 记 $\xi_0^{\pi^0(l)} = 0,\ l = 1,\cdots,m.$

由式 (3.2.7) 可得

$$\begin{aligned}
&\int_{(\Delta_k)^m} \mathbb{E}\left[\exp\left(\iota \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^{k-1} \xi_j^l \left(X^H_{t^l_{j+1}} - X^H_{t^l_j}\right)\right)\right] \mathrm{d}t^l \\
&= C \int_{(\Delta_k)^m} \exp\left[-\frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^{k-1} \xi_j^l \left(X^H_{t^l_{j+1}} - X^H_{t^l_j}\right)\right)^2\right] \mathrm{d}t^l \\
&\le C(mk)! \sum_{\pi^1,\cdots,\pi^k} \int_{\triangle(\pi^1,\cdots,\pi^k)} \exp\left[-C_H \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^k |u_j^l|^2 \left(t_j^{\pi^j(l+1)} - t_j^{\pi^j(l)}\right)^{2H}\right] \mathrm{d}t^l \\
&\le C_H \prod_{l=1}^m \prod_{j=1}^k \frac{(mk)!}{|u_j^l|^{\frac{1}{H}}} \left(\Gamma\left(\frac{1}{2H}\right)\right)^{mk}. \qquad (3.2.8)
\end{aligned}$$

综上, (3.2.6) 可重写为

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\left|L^H_{\varepsilon,k}(x,t)\right|^m\right) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{m(k-1)}} \int_{\mathbb{R}^{m(k-1)}} \int_{(\Delta_k)^m} \mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^{k-1} \iota \xi_j^l \left(X^H_{t^l_{j+1}} - X^H_{t^l_j} - x_j\right)\right)\right] \\
&\times \exp\left\{-\sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\varepsilon|\xi_j^l|^2}{2}\right\} \mathrm{d}t^l \mathrm{d}\xi^l \\
&\le \frac{C}{(2\pi)^{m(k-1)}} \int_{\mathbb{R}^{mk}} \prod_{l=1}^m \prod_{j=1}^k \frac{(mk)!}{|u_j^l|^{\frac{1}{H}}} \mathrm{d}u^l \\
&\le C \frac{(mk)!}{(2\pi)^{m(k-1)}} \prod_{i=1}^k \left(\int_{\mathbb{R}^{mk}} \left(\prod_{l=1}^m \prod_{j\ne i} \frac{1}{|u_j^l|^{\frac{1}{H}}}\right)^{\frac{k}{k-1}} \mathrm{d}u^l\right)^{\frac{1}{k}} < \infty, \qquad (3.2.9)
\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{d}u^l = \prod_{l=1}^m \prod_{j=1}^k \mathrm{d}u_j^l$.

接下来为证明 $L_k^H(x,t)$ 的存在性, 还需说明 $\{L^H_{k,\varepsilon}(x,t),\ \varepsilon > 0\}$ 是一个 Cauchy 列.

对任意 ε, $\eta>0$, 根据式 (3.2.1), 可得

$$
\begin{aligned}
L^H_{\varepsilon,k}(x,t)-L^H_{\eta,k}(x,t)=&\frac{1}{(2\pi)^{(k-1)}}\int_{\mathbb{R}^{(k-1)}}\int_{\Delta_k}\prod_{j=1}^{k-1}\exp\left(\iota\xi_j\left(X^H_{t_{j+1}}-X^H_{t_j}-x_j\right)\right)\\
&\times\left(\prod_{j=1}^{k-1}\exp\left(-\frac{\varepsilon|\xi_j|^2}{2}\right)-\prod_{j=1}^{k-1}\exp\left(-\frac{\eta|\xi_j|^2}{2}\right)\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}\xi. \quad (3.2.10)
\end{aligned}
$$

当偶数 $m>1$ 时, 根据不等式

$$
\prod_{l=1}^{m}\left|\exp\left(-\frac{\varepsilon|\xi^l|^2}{2}\right)-\exp\left(-\frac{\eta|\xi^l|^2}{2}\right)\right|\le\prod_{l=1}^{m}\left(|\xi^l|^2|\varepsilon-\eta|\right)^{\delta},\quad \delta\in(0,1],
$$

可得

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left|L^H_{\varepsilon,k}(x,t)-L^H_{\eta,k}(x,t)\right|^m\right]\\
&\le\frac{1}{(2\pi)^{m(k-1)}}\int_{\mathbb{R}^{m(k-1)}}\int_{(\Delta_k)^m}\mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{k-1}\iota\xi_j^l\left(X^H_{t^l_{j+1}}-X^H_{t^l_j}-x_j\right)\right)\right]\\
&\times\prod_{l=1}^{m}\left|\exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^{k-1}\varepsilon|\xi_j^l|^2}{2}\right)-\exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^{k-1}\eta|\xi_j^l|^2}{2}\right)\right|\mathrm{d}t^l\mathrm{d}\xi^l\\
&=\frac{1}{(2\pi)^{m(k-1)}}\int_{\mathbb{R}^{m(k-1)}}\int_{(\Delta_k)^m}\mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{k-1}\iota\xi_j^l\left(X^H_{t^l_{j+1}}-X^H_{t^l_j}-x_j\right)\right)\right]\\
&\times\prod_{l=1}^{m}\left|\exp\left(-\frac{\varepsilon|\xi^l|^2}{2}\right)-\exp\left(-\frac{\eta|\xi^l|^2}{2}\right)\right|\mathrm{d}t^l\mathrm{d}\xi^l\\
&\le C\frac{|\varepsilon-\eta|^{m\delta}}{(2\pi)^{m(k-1)}}\int_{\mathbb{R}^{m(k-1)}}\int_{(\Delta_k)^m}\mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{k-1}\iota\xi_j^l\left(X^H_{t^l_{j+1}}-X^H_{t^l_j}-x_j\right)\right)\right]\\
&\times\prod_{l=1}^{m}|\xi^l|^{2\delta}\mathrm{d}t^l\mathrm{d}\xi^l, \quad (3.2.11)
\end{aligned}
$$

其中 $\xi^l=(\xi^l_1,\cdots,\xi^l_{k-1})$ 且由控制收敛定理可知, 仅需证明式 (3.2.11) 有限.

为方便, 记

$$
A^l=\mathbb{E}\left(X^H_{t^{\pi(l+1)}}-X^H_{t^{\pi(l)}},\,X^H_{t^{\pi(k+1)}}-X^H_{t^{\pi(k)}}\right)_{1\le l,k\le m},
$$

则

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{m(k-1)}}\int_{\triangle(\pi^1,\cdots,\pi^k)}\mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{k-1}\iota\xi_j^l\left(X^H_{t_j^{\pi^j(l+1)}}-X^H_{t_j^{\pi^j(l)}}\right)\right)\right]\prod_{l=1}^{m}|\xi^l|^{2\delta}\mathrm{d}t^l\mathrm{d}\xi^l\\
=&\int_{\mathbb{R}^{m(k-1)}}\int_{\triangle(\pi^1,\cdots,\pi^k)}\exp\left[-\frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{k}\xi_j^l\left(X^H_{t_j^{\pi^j(l+1)}}-X^H_{t_j^{\pi^j(l)}}\right)\right)^2\right]\prod_{l=1}^{m}|\xi^l|^{2\delta}\mathrm{d}t^l\mathrm{d}\xi^l\\
=&\int_{\mathbb{R}^{m(k-1)}}\int_{\triangle(\pi^1,\cdots,\pi^k)}\exp\left[-\frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\sum_{l=1}^{m}\xi^l\left(X^H_{t^{\pi(l+1)}}-X^H_{t^{\pi(l)}}\right)\right)^2\right]\prod_{l=1}^{m}|\xi^l|^{2\delta}\mathrm{d}t^l\mathrm{d}\xi^l\\
=&\int_{\mathbb{R}^{m(k-1)}}\int_{\triangle(\pi^1,\cdots,\pi^k)}\exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{P}A^l(\boldsymbol{P})^T\right)\prod_{l=1}^{m}|\xi^l|^{2\delta}\mathrm{d}t^l\mathrm{d}\xi^l,
\end{aligned}\tag{3.2.12}$$

其中 $\boldsymbol{P}=(\xi^1,\cdots,\xi^m)$ 且 $t^{\pi(l)}=(t_1^{\pi^1(l)},\cdots,t_k^{\pi^k(l)})$.

由定义可知 A^l 为严格正定矩阵, 所以 $\sqrt{A^l}$ 存在. 此外, 存在对称矩阵 $B=(b_{i,j})_{1\le i,j\le m}$ 使得 $(A^l)^{-1}=BB$ 且

$$\frac{|A^l_{l,l}|}{|A^l|}=\sum_{n=1}^{m}(b_{l,n})^2,\tag{3.2.13}$$

其中 $A^l_{l,l}$ 是矩阵 A^l 取掉 l 行和 l 列后的矩阵, $|A^l|$, $|A^l_{l,l}|$ 分别表示矩阵 A^l 和 $A^l_{l,l}$ 对应的行列式.

由变量代换 $\boldsymbol{\xi}^l=\sqrt{A^l}\boldsymbol{P}^T$ 且结合式 (3.2.13) 可得

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{m(k-1)}}\int_{\triangle(\pi^1,\cdots,\pi^k)}\exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{P}A^l\boldsymbol{P}^T\right)\prod_{l=1}^{m}\left(|\xi^l|^2|\varepsilon-\eta|\right)^{\delta}\mathrm{d}t^l\mathrm{d}\xi^l\\
\le&|\varepsilon-\eta|^{m\delta}\int_{\mathbb{R}^{mk}}\int_{\triangle(\pi^1,\cdots,\pi^k)}\frac{1}{|A^l|^{\frac{1}{2}}}\exp\left(-\frac{1}{2}|\boldsymbol{\xi}^l|^2\right)\prod_{l=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{n=1}^{m}b_{l,n}\xi_j^n\right)^2\right)^{\delta}\mathrm{d}t^l\mathrm{d}\xi,
\end{aligned}\tag{3.2.14}$$

其中 $\mathrm{d}\xi=\prod_{n=1}^{m}\prod_{j=1}^{k}\mathrm{d}\xi_j^n$. 进一步, 由 Cauchy-Schwartz 不等式可知

$$\left(\sum_{n=1}^{m}b_{l,n}\xi_j^n\right)^2\le\sum_{n=1}^{m}\left(b_{l,n}\right)^2\sum_{n=1}^{m}\left(\xi_j^n\right)^2.\tag{3.2.15}$$

因此, (3.2.11) 可重写为

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left|L^H_{\varepsilon,k}(x,t)-L^H_{\eta,k}(x,t)\right|^m\right]\\
&\le|\varepsilon-\eta|^{m\delta}\int_{\mathbb{R}^{mk}}\int_{\triangle(\pi^1,\cdots,\pi^k)}\frac{1}{|A^l|^{\frac{1}{2}}}\exp\left(-\frac{1}{2}|\xi^l|^2\right)\prod_{l=1}^m\left(\sum_{j=1}^k\left(\sum_{n=1}^m b_{l,n}\xi_j^n\right)^2\right)^\delta \mathrm{d}t^l\mathrm{d}\xi\\
&\le|\varepsilon-\eta|^{m\delta}\int_{\mathbb{R}^{mk}}\int_{\triangle(\pi^1,\cdots,\pi^k)}\frac{1}{|A^l|^{\frac{1}{2}}}\prod_{l=1}^m\left(\frac{|A^l_{l,l}|}{|A^l|}\right)^\delta\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^m|\xi^l|^2\right)\\
&\times\left(\sum_{j=1}^k\left(\sum_{n=1}^m\xi_j^n\right)^2\right)^{m\delta}\mathrm{d}t^l\mathrm{d}\xi. \qquad (3.2.16)
\end{aligned}
$$

另外, 根据式 (3.2.13) 和引理 3.2.1 有

$$
\begin{aligned}
|A^l|&=Var\left(X^H_{t^{\pi(2)}}-X^H_{t^{\pi(1)}}\right)\prod_{l=2}^m Var\left(X^H_{t^{\pi(l+1)}}-X^H_{t^{\pi(l)}}|X^H_{t^{\pi(l)}}-X^H_{t^{\pi(l-1)}},\cdots,X^H_{t^{\pi(2)}}-X^H_{t^{\pi(1)}}\right)\\
&\ge\prod_{l=1}^m Var\left(X^H_{t^{\pi(l+1)}}|X^H_{t^{\pi(1)}},\cdots,X^H_{t^{\pi(l)}}\right)\\
&\ge C\prod_{l=1}^m\min_{1\le k\le l}\left|t^{\pi(l+1)}-t^{\pi(k)}\right|^{2H}, \qquad (3.2.17)
\end{aligned}
$$

且

$$
\begin{aligned}
\frac{|A^l|}{|A^l_{l,l}|}&=Var\left(X^H_{t^{\pi(l+1)}}-X^H_{t^{\pi(l)}}|X^H_{t^{\pi(j+1)}}-X^H_{t^{\pi(j)}},\ j=1,\cdots,l-1,l+1,\cdots,m\right)\\
&=\inf_{b_i\in R,1\le i\le m}\mathbb{E}\left(X^H_{t^{\pi(l+1)}}-\sum_{i=1}^m b_iX^H_{t^{\pi(i)}}\right)^2\\
&=Var\left(X^H_{t^{\pi(l+1)}}|X^H_{t^{\pi(1)}},\cdots,X^H_{t^{\pi(m)}}\right)\\
&\ge C\min_{1\le i\le m}|t^{\pi(l+1)}-t^{\pi(i)}|^{2H}. \qquad (3.2.18)
\end{aligned}
$$

结合式 (3.2.17) 和 (3.2.18) 可得

$$
\int_{\triangle(\pi^1,\cdots,\pi^k)}\frac{1}{|A^l|^{\frac{1}{2}}}\prod_{l=1}^m\left(\frac{|A^l_{l,l}|}{|A^l|}\right)^\delta\mathrm{d}t^l
$$

$$\leq C\int_{\triangle(\pi^1,\cdots,\pi^k)}\prod_{l=1}^{m}\min_{1\leq k\leq l}\left|t^{\pi(l+1)}-t^{\pi(k)}\right|^{-H}\prod_{l=1}^{m}\left(\min_{1\leq i\leq m}|t^{\pi(l+1)}-t^{\pi(i)}|^{2H}\right)^{-\delta}\mathrm{d}t^l. \tag{3.2.19}$$

所以由 [121] 中的引理 2.4 可知式 (3.2.19) 有限. 进一步, 由

$$\int_{\mathbb{R}^{mk}}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m}|\xi^l|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{n=1}^{m}\xi_j^n\right)^2\right)^{m\delta}\mathrm{d}\xi<\infty, \tag{3.2.20}$$

可得

$$\mathbb{E}\left[\left|L_{\varepsilon,k}^H(x,t)-L_{\eta,k}^H(x,t)\right|^m\right]<\infty.$$

综上, 由控制收敛定理可知 $L_{\varepsilon,k}^H(x,t)$ 在 $L^p(\Omega),\ p\in[1,\infty)$ 中存在, 即

$$L_{\varepsilon,k}^H(x,t)\xrightarrow{P}L_k^H(x,t),\quad \varepsilon\longrightarrow 0.$$

接下来证明 $L_k^H(x,t)$ 的指数可积性.

首先, 由存在性的证明可知

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{m(k-1)}}\int_{\triangle(\pi^1,\cdots,\pi^k)}\mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{k}\iota\xi_j^l\left(X^H_{t_j^{\pi^j(l+1)}}-X^H_{t_j^{\pi^j(l+1)}}\right)\right)\right]\mathrm{d}t^l\mathrm{d}\xi^l\\
&=\int_{\mathbb{R}^{mk}}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m}|\xi^l|^2\right)\mathrm{d}\xi\int_{\triangle(\pi^1,\cdots,\pi^k)}\frac{1}{|A^l|^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}t^l\\
&\leq C\int_{\triangle(\pi^1,\cdots,\pi^k)}\prod_{l=1}^{m}\frac{1}{\min\limits_{1\leq k\leq m}|t^{\pi(l+1)}-t^{\pi(k)}|^H}\mathrm{d}t^l\\
&=C\int_{\triangle(\pi^1,\cdots,\pi^k)}\prod_{l=1}^{m}\frac{1}{|t^{\pi(l+1)}-t^{\pi(l)}|^H}\mathrm{d}t^l.
\end{aligned}\tag{3.2.21}$$

对偶数 $m>1$, 由式 (3.2.21) 可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\left|L_k^H(x,t)\right|^m\right)\\
&\leq\frac{(mk)!}{(2\pi)^{m(k-1)}}\int_{\mathbb{R}^{m(k-1)}}\int_{\triangle(\pi^1,\cdots,\pi^k)}\mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{k}\iota\xi_j^l\left(X^H_{t_j^{\pi^j(l+1)}}-X^H_{t_j^{\pi^j(l+1)}}\right)\right)\right]\mathrm{d}t^l\mathrm{d}\xi^l
\end{aligned}$$

$$\leq C\frac{(mk)!}{(2\pi)^{mk}}\int_{\triangle(\pi^1,\cdots,\pi^k)}\prod_{l=1}^{m}\frac{1}{|t^{\pi(l+1)}-t^{\pi(l)}|^H}\mathrm{d}t^l. \tag{3.2.22}$$

结合高斯过程的局部非确定性和引理 3.2.2, 有

$$\mathbb{E}\left(\left|L_k^H(x,t)\right|^m\right)\leq\frac{C^mT^{m(1-H)}(mk)!}{\Gamma(1+m(1-H))}. \tag{3.2.23}$$

根据 Stirling 公式

$$\lim_{a\to+\infty}\frac{\Gamma(a+1)}{\sqrt{2\pi a}(\frac{a}{e})^a}=1$$

可得

$$\mathbb{E}\left(|L_k^H(x,t)|^{m\lambda}\right)\leq\left(\mathbb{E}\left(|L_k^H(x,t)|^m\right)\right)^\lambda,$$

且

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\exp\left(\gamma|L_k^H(x,t)|^\lambda\right)\right] \qquad (3.2.24)\\
&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\gamma^m}{m!}\mathbb{E}\left(|L_k^H(x,t)|^{m\lambda}\right)\\
&\leq\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\gamma^m}{m!}\left(\mathbb{E}\left(|L_k^H(x)|^m\right)\right)^\lambda\\
&\leq\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\gamma^m}{m!}\left(\frac{C^mT^{m(1-H)}(mk)!}{(\Gamma(1+m(1-H)))}\right)^\lambda\\
&\leq\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\gamma^mC^m(m!)^{(k+H-1)\lambda}(k!)^{(m+1)\lambda}}{m!}, \qquad (3.2.25)
\end{aligned}$$

其中 $\lambda\in(0,1)$, $\gamma>0$.

对于奇数 $m\geq1$, 有

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left|L_k^H(x,t)\right|^m\right)&\leq\mathbb{E}\left(\left|L_k^H(x,t)\right|^{(m+1)}\right)^{\frac{m}{m+1}} \qquad (3.2.26)\\
&\leq C^m(m!)^{(k+H-1)\lambda}(k!)^{(m+1)\lambda}. \qquad (3.2.27)
\end{aligned}$$

综上, 结合式 (3.2.23) 和式 (3.2.26), 可知当 γ, λ 充分小时, 有

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\gamma|L_k^H(x,t)|^\lambda\right)\right] < \infty. \tag{3.2.28}$$

□

3.3 MSLT 的 Hölder 连续性

接下来为证明 MSLT 的 Hölder 连续性, 首先给出如下结论:

命题 3.3.1 设 X^H, $0 < H < 1$ 为集合 G^H 中的高斯过程, $\Delta_k = \{(t_1, t_2, \cdots, t_k) \in [0,t]^k : 0 \le t_1 \le \cdots \le t_k \le t\}$, 则存在 $\alpha \in \left(0, 1 \wedge \frac{k}{2H(k-1)} - \frac{1}{2}\right)$ 使得

$$\int_{\mathbb{R}^{m(k-1)}} \int_{(\Delta_k)^m} \prod_{l=1}^{m} |\xi^l|^\alpha E\left[\exp\left(\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{k-1} \iota \xi_j^l \left(X^H_{t^l_{j+1}} - X^H_{t^l_j}\right)\right)\right] \mathrm{d}t^l \mathrm{d}\xi^l < \infty, \tag{3.3.1}$$

其中 $k \ge 2$, $\xi^l = (\xi_1^l, \cdots, \xi_{k-1}^l)$.

证明. 由定理 3.2.1 的证明可得 u_j^l 为 $\xi_j^{\pi^j(l)}$ 的适当变量代换且取

$$u_j^l = \sum_{r \le l} \xi_j^{\pi^j(r)} + \sum_{r > l} \xi_{j-1}^{\pi^j(r)}.$$

特别地, $\xi_0^{\pi^0(l)} = 0$, $l = 1, \cdots, m$. 因此, 对任意 i, 有

$$|\xi^l| \le \sum_{j=1}^{k-1} |\xi_j^l| \le C \prod_{j \ne i} (1 + |\xi_j^l|) = C \prod_{j \ne i} (1 + |u_j^l - u_{j+1}^l|) \tag{3.3.2}$$

且

$$\prod_{l=1}^{m} |\xi^l|^\alpha \le C \prod_{i=1}^{k} \left(\prod_{l=1}^{m} \prod_{j \ne i} (1 + |u_j^l - u_{j+1}^l|)^\alpha\right)^{\frac{1}{k}}. \tag{3.3.3}$$

结合式 (3.3.3) 和定理 3.2.1, 式 (3.3.1) 可以重写为

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{m(k-1)}}\int_{(\Delta_k)^m}\prod_{l=1}^{m}|\xi^l|^{\alpha}\mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{k-1}\iota\xi_j^l\left(X^H_{t^l_{j+1}}-X^H_{t^l_j}\right)\right)\right]\mathrm{d}t^l\mathrm{d}\xi^l\\
&\le C\int_{\mathbb{R}^{mk}}\prod_{i=1}^{k}\left(\prod_{l=1}^{m}\prod_{j\neq i}(1+|u_j^l-u_{j+1}^l|)^{\alpha}\right)^{\frac{1}{k}}\prod_{l=1}^{m}\prod_{j=1}^{k}\frac{1}{|u_j^l|^{\frac{1}{H}}}\mathrm{d}u^l\\
&=C\int_{\mathbb{R}^{mk}}\prod_{i=1}^{k}\left(\prod_{l=1}^{m}\prod_{j\neq i}(1+|u_j^l-u_{j+1}^l|)^{\alpha}\right)^{\frac{1}{k}}\prod_{l=1}^{m}\left(\prod_{j\neq i}\frac{1}{|u_j^l|^{\frac{1}{H}}}\right)^{\frac{1}{k-1}}\mathrm{d}u^l. \qquad (3.3.4)
\end{aligned}$$

又因为对于 $a,\ b,\ k>0$, 有

$$(a+b)^k\le 2^k(a^k+b^k),$$

所以结合广义 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{mk}}\prod_{i=1}^{k}\left(\prod_{l=1}^{m}\prod_{j\neq i}(1+|u_j^l-u_{j+1}^l|)^{\alpha}\right)^{\frac{1}{k}}\prod_{l=1}^{m}\left(\prod_{j\neq i}\frac{1}{|u_j^l|^{\frac{1}{H}}}\right)^{\frac{1}{k-1}}\mathrm{d}u^l\\
&\le C\int_{\mathbb{R}^{mk}}\prod_{i=1}^{k}\left(\prod_{l=1}^{m}\prod_{j\neq i}(1+|u_j^l|^2)^{\alpha}\right)^{\frac{1}{k}}\prod_{l=1}^{m}\left(\prod_{j\neq i}\frac{1}{|u_j^l|^{\frac{1}{H}}}\right)^{\frac{1}{k-1}}\mathrm{d}u^l\\
&\le C\prod_{i=1}^{k}\left(\int_{\mathbb{R}^{mk}}\prod_{l=1}^{m}\prod_{j\neq i}(1+|u_j^l|^2)^{\alpha}\prod_{l=1}^{m}\left(\prod_{j\neq i}\frac{1}{|u_j^l|^{\frac{1}{H}}}\right)^{\frac{k}{k-1}}\mathrm{d}u^l\right)^{\frac{1}{k}}, \qquad (3.3.5)
\end{aligned}$$

则当 $\frac{k}{H(k-1)}-2\alpha>1$, 即 $\alpha<\frac{k}{2H(k-1)}-\frac{1}{2}$ 时, 式 (3.3.1) 有界. □

下面给出 MSLT Hölder 连续性的证明.

定理 3.3.1 设 X^H, $0<H<1$ 为 G^H 中的自相似高斯过程, $\Delta_k=\{(t_1,t_2,\cdots,t_k)\in[0,t]^k: 0\le t_1\le\cdots\le t_k\le t\}$, 则 $L_k^H(x,t)$ 关于空间变量 x 满足 α 阶 Hölder 连续且 $\alpha<\left(1\wedge\frac{k}{2H(k-1)}-\frac{1}{2}\right)$; 同时, $L_k^H(x,t)$ 关于时间变量 t 也满足 β 阶 Hölder 连续且 $\beta<\left(1-\frac{H(k-1)}{k}\right)$.

证明. 首先考虑 $L_k^H(x,t)$ 关于空间变量 x 的 Hölder 连续性.

对任意偶数 $m>1$, 根据

$$L_{\varepsilon,k}^H(x,t)\longrightarrow L_k^H(x,t),\ \ \varepsilon\longrightarrow 0$$

和不等式

$$(a+b+c)^k\leq 3^k(a^k+b^k+c^k),\ a,\ b,\ c\geq 0,$$

可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left|L_k^H(x+y,t)-L_k^H(x,t)\right|^m\right]\\
&\leq 3^m\left[\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}\left(\left|L_k^H(x+y,t)-L_{k,\varepsilon}^H(x+y,t)\right|^m\right)+\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}\left(\left|L_{k,\varepsilon}^H(x+y,t)-L_{k,\varepsilon}^H(x,t)\right|^m\right)\right.\\
&\left.+\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}\left(\left|L_{k,\varepsilon}^H(x,t)-L_k^H(x,t)\right|^m\right)\right]\\
&=3^m\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}\left(\left|L_{k,\varepsilon}^H(x+y,t)-L_{k,\varepsilon}^H(x,t)\right|^m\right),
\end{aligned}\tag{3.3.6}$$

所以要证得结论成立, 仅需考虑 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}\left[\left|L_{k,\varepsilon}^H(x+y,t)-L_{k,\varepsilon}^H(x,t)\right|^m\right]$.

由式 (3.2.1), 可得

$$\begin{aligned}
&L_{k,\varepsilon}^H(x+y,t)-L_{k,\varepsilon}^H(x,t)\\
=&\frac{1}{(2\pi)^{(k-1)}}\int_{\mathbb{R}^{(k-1)}}\int_{\Delta_k}\prod_{j=1}^{k-1}\exp\left(\imath\xi_j\left(X_{t_{j+1}}^H-X_{t_j}^H\right)\right)\prod_{j=1}^{k-1}\exp\left(-\frac{\varepsilon|\xi_j|^2}{2}\right)\\
&\times\left(\prod_{j=1}^{k-1}\exp(-\imath\xi_j(x_j+y_j))-\prod_{j=1}^{k-1}\exp(-\imath\xi_jx_j)\right)\mathrm{d}\boldsymbol{t}\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}\tag{3.3.7}$$

对任意偶数 $m>1$, 有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left|L_{k,\varepsilon}^H(x+y,t)-L_{k,\varepsilon}^H(x,t)\right|^m\right]\\
&\leq\frac{1}{(2\pi)^{m(k-1)}}\int_{\mathbb{R}^{m(k-1)}}\int_{(\Delta_k)^m}\mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{l=1}^m\sum_{j=1}^{k-1}\imath\xi_j^l\left(X_{t_{j+1}^l}^H-X_{t_j^l}^H\right)\right)\right]\times\\
&\exp\left(-\frac{\sum\limits_{l=1}^m\sum\limits_{j=1}^{k-1}\varepsilon|\xi_j^l|^2}{2}\right)\prod_{l=1}^m\left|\prod_{j=1}^{k-1}\exp(-\imath\xi_j^l(x_j+y_j))-\prod_{j=1}^{k-1}\exp(-\imath\xi_j^lx_j)\right|\mathrm{d}t^l\mathrm{d}\xi^l
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi)^{m(k-1)}} \int_{\mathbb{R}^{m(k-1)}} \int_{(\Delta_k)^m} \mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{k-1} \iota \xi_j^l \left(X_{t_{j+1}^l}^H - X_{t_j^l}^H\right)\right)\right] \times \\
&\exp\left(-\frac{\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{k-1} \varepsilon |\xi_j^l|^2}{2}\right) \prod_{l=1}^{m}\prod_{j=1}^{k-1} \exp(-\iota \xi_j^l x_j) \prod_{l=1}^{m} \left|\prod_{j=1}^{k-1} \exp\left(-\iota \xi_j^l y_j\right) - 1\right| \mathrm{d}t^l \mathrm{d}\xi^l.
\end{aligned}
\tag{3.3.8}
$$

进一步, 根据不等式 $|\mathrm{e}^{\iota x} - 1| \leq |x| \wedge 2 \leq 2(|x| \wedge 1)$ 可得

$$
\begin{aligned}
\prod_{l=1}^{m} \left|\prod_{j=1}^{k-1} \exp\left(-\iota \xi_j^l y_j\right) - 1\right| &= \prod_{l=1}^{m} \left|\exp\left(-\iota \xi^l \cdot y\right) - 1\right| \\
&= 2^m \prod_{l=1}^{m} \left|(|\xi^l||y|)^{\alpha} \wedge 1\right| \leq 2^m |y|^{m\alpha} \prod_{l=1}^{m} |\xi^l|^{\alpha},
\end{aligned}
$$

其中 $\alpha \in (0,1]$, $y = (y_1, \cdots, y_{k-1})$, 所以式 (3.3.8) 可重写为

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left|L_{k,\varepsilon}^H(x+y,t) - L_{k,\varepsilon}^H(x,t)\right|^m\right] \\
&\leq C|y|^{m\alpha} \int_{\mathbb{R}^{m(k-1)}} \int_{(\Delta_k)^m} \prod_{l=1}^{m} |\xi^l|^{\alpha} \mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{k-1} \iota \xi_j^l \left(X_{t_{j+1}^l}^H - X_{t_j^l}^H\right)\right)\right] \mathrm{d}t^l \mathrm{d}\xi^l.
\end{aligned}
\tag{3.3.9}
$$

另外, 由命题 3.3.1 可知, 当 $\alpha \in \left(0, 1 \wedge \frac{k}{2H(k-1)} - \frac{1}{2}\right)$ 时

$$
\int_{\mathbb{R}^{m(k-1)}} \int_{(\Delta_k)^m} \prod_{l=1}^{m} |\xi^l|^{\alpha} \mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{k-1} \iota \xi_j^l \left(X_{t_{j+1}^l}^H - X_{t_j^l}^H\right)\right)\right] \mathrm{d}t^l \mathrm{d}\xi^l < \infty,
\tag{3.3.10}
$$

因此,

$$
\mathbb{E}\left[\left|L_{k,\varepsilon}^H(x+y,t) - L_{k,\varepsilon}^H(x,t)\right|^m\right] \leq C|y|^{m\alpha}.
\tag{3.3.11}
$$

由 Kolmogorov 连续准则可知, $L_k^H(x,t)$ 关于空间变量 x 满足 Hölder 连续性.

接着证明 $L_k^H(x,t)$ 关于时间变量 t 满足 Hölder 连续性.

由式 (3.2.1), 可得

$$
\begin{aligned}
&L_{k,\varepsilon}^{H}(x,t+h)-L_{k,\varepsilon}^{H}(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^{(k-1)}}\\
&\times\int_{\mathbb{R}^{(k-1)}}\int_{\Delta_k\times[t,t+h]^k}\prod_{j=1}^{k-1}\exp\left(\iota\xi_j\left(X_{t_{j+1}}^{H}-X_{t_j}^{H}-x_j\right)\right)\prod_{j=1}^{k-1}\exp\left(-\frac{\varepsilon|\xi_j|^2}{2}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{t}\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}
\tag{3.3.12}
$$

对任意偶数 $m>1$, 有

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left|L_{k,\varepsilon}^{H}(x,t+h)-L_{k,\varepsilon}^{H}(x,t)\right|^m\right]\\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^{m(k-1)}}\int_{(\Delta_k\times[t,t+h]^k)^m}\mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{k-1}\iota\xi_j^l\left(X_{t_{j+1}^l}^{H}-X_{t_j^l}^{H}-x_j\right)\right)\right]e^{-\frac{\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{k-1}\varepsilon|\xi_j^l|^2}{2}}\mathrm{d}t^l\mathrm{d}\xi^l\\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^{m(k-1)}}\int_{(\Delta_k\times[t,t+h]^k)^m}\mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{k-1}\iota\xi_j^l\left(X_{t_{j+1}^l}^{H}-X_{t_j^l}^{H}\right)\right)\right]\mathrm{d}t^l\mathrm{d}\xi^l\\
&=C\int_{\mathbb{R}^{m(k-1)}}\int_{(\Delta_k)^m}\mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{k-1}\iota\xi_j^l\left(X_{t_{j+1}^l}^{H}-X_{t_j^l}^{H}\right)\right)\right]\prod_{l=1}^{m}\prod_{j=1}^{k}\mathbf{1}_{[t,t+h]}(t_j^l)\mathrm{d}t^l\mathrm{d}\xi^l.
\end{aligned}
\tag{3.3.13}
$$

根据定理 3.2.1 和 Hölder 不等式可得:

$$
\begin{aligned}
&\int_{(\Delta_k)^m}\mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{k-1}\iota\xi_j^l\left(X_{t_{j+1}^l}^{H}-X_{t_j^l}^{H}\right)\right)\right]\prod_{l=1}^{m}\prod_{j=1}^{k}\mathbf{1}_{[t,t+h]}(t_j^l)\mathrm{d}t^l\\
&\leq C\int_{\triangle(\pi^1,\cdots,\pi^k)}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{k}|u_j^l|^2\left|t_j^{\pi^j(l+1)}-t_j^{\pi^j(l)}\right|^{2H}\right)\prod_{l=1}^{m}\prod_{j=1}^{k}\mathbf{1}_{[t,t+h]}(t_j^{\pi^j(l)})\mathrm{d}t^l\\
&\leq\left(\int_{\triangle(\pi^1,\cdots,\pi^k)}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{k}|u_j^l|^2\left|t_j^{\pi^j(l+1)}-t_j^{\pi^j(l)}\right|^{2H}\right)\mathrm{d}t^l\right)^{\bar{\beta}}\\
&\times\left(\int_{\triangle(\pi^1,\cdots,\pi^k)}\prod_{l=1}^{m}\prod_{j=1}^{k}\mathbf{1}_{[t,t+h]}(t_j^{\pi^j(l)})\mathrm{d}t^l\right)^{\beta}\\
&\leq C|h|^{mk\beta}\prod_{l=1}^{m}\prod_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{|u_j^l|^{\frac{1}{H}}}\right)^{\bar{\beta}},
\end{aligned}
\tag{3.3.14}
$$

其中 $\overline{\beta}+\beta=1$, $\overline{\beta}>0$, $\beta>0$. 所以式 (3.3.13) 可写为

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left|L_{k,\varepsilon}^{H}(x,t+h)-L_{k,\varepsilon}^{H}(x,t)\right|^{m}\right] &\le C|h|^{mk\beta}\int_{\mathbb{R}^{mk}}\prod_{l=1}^{m}\prod_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{|u_j^l|^{\frac{1}{H}}}\right)^{\overline{\beta}}\mathrm{d}u^l \\ &\le C|h|^{mk\beta}\prod_{i=1}^{k}\left(\int_{\mathbb{R}^{mk}}\prod_{l=1}^{m}\prod_{j\ne i}\left(\frac{1}{|u_j^l|^{\frac{\overline{\beta}}{H}}}\right)^{\frac{k}{k-1}}\mathrm{d}u^l\right)^{\frac{1}{k}},\end{aligned} \tag{3.3.15}$$

则当 $\frac{\overline{\beta}}{H}\frac{k}{k-1}>1$, 即 $\beta=1-\overline{\beta}<1-\frac{H(k-1)}{k}$ 时, 式 (3.3.15) 有限. □

注 3.3.1 注意到在文献 [69, 126] 中仅给出 $k=2$ 时分数布朗运动相交局部时的存在性和 Hölder 连续性. 双分数布朗运动的二重自相交局部时存在性条件在 [114] 中给出. 2011 年, Shen [113] 给出次分数布朗运动二重自相交局部时存在性证明. 本文将已有结果推广至 $k\ge 2$ 时的自相似高斯过程. 特别地, 当 $k=2$, X^H 为分数布朗运动时, 定理 3.2.1 中得到的 $L_k^H(x,t)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中的存在性条件与 Jung 和 Markowsky 在 [69] 中给出的条件一致, 对于本文得到的关于空间变量 x 的 Hölder 连续性阶 $\alpha<\min\left(1,\frac{1}{H}-\frac{1}{2}\right)$ 和时间变量 t 的 Hölder 连续性阶 $\beta<1-\frac{H}{2}$ 同 Hong 和 Xu 在 [52] 中得到的条件. 当 $k=2$, X^H 为次分数布朗运动或双分数布朗运动时, 本文得到的二重自相交局部时的存在性条件分别同 [113, 114], 综上可知本小节结论涵盖了已有结论且范围更广泛.

3.4 MSLT 的混沌展式

由上节的证明可知, 满足强局部非确定性的自相似高斯过程, 如分数布朗运动、次分数布朗运动和双分数布朗运动的 MSLT 存在. 基于存在性条件, 本小节主要研究自相似高斯过程 MSLT 的混沌展式. 为方便, 仅给出分数布朗运动 MSLT 混沌展式的相关证明, 其它过程的结论类似可得证.

设 $B^H=\{B_t^H,\ t\ge 0\}$, $H\in(0,1)$ 为分数布朗运动, 本小节主要用 Wiener 混沌

展式来分析分数布朗运动 B^H 的 MSLT, 其基本思想是将 Wiener 空间上的相关变量用其多个 Wiener 积分的特征级数表示, 或者等价地用广义 Hermite 多项式表示. 根据已有文献可知, 早在上世纪八十年代 Nualart 和 Vives [100] 就给出布朗运动多重局部时的 Wiener 混沌展式并且通过此混沌展式给出重整化多重局部时的存在性证明. 此后, Wiener 混沌展式就被广泛用于布朗运动多重局部时和分数布朗运动二重局部时的相关证明中 (见 [57, 71, 72, 93, 132]), 而对于分数布朗运动等自相似高斯过程 MSLT 的相应结果并不多见.

3.4.1 一维自相似高斯过程 MSLT 的混沌展式

为方便, 本小节仅给出一维分数布朗运动 MSLT 的混沌展式的相关证明, 对于其它自相似高斯过程, 如双分数布朗运动、次分数布朗运动, 其结论可类似得到.

一维分数布朗运动 B^H 的 MSLT 定义为:

$$\alpha_k^H(x,t) := \int_{\Delta_k} \delta(B_{t_2}^H - B_{t_1}^H - x_1)\cdots\delta(B_{t_k}^H - B_{t_{k-1}}^H - x_{k-1})\mathrm{d}\boldsymbol{t},\ \ k\ge 2, \tag{3.4.1}$$

其中 $\Delta_k = \{(t_1,t_2,\cdots,t_k)\in[0,t]^k : 0\le t_1\le\cdots\le t_k\le t\}$, $\mathrm{d}\boldsymbol{t} = \mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_k$.

令 $p_\varepsilon(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}}e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon}}$ 是方差为 ε 的中心高斯密度函数. 由热核 $p_\varepsilon(x)$ 逼近 Dirac delta 函数 $\delta(x)$ 可得 $\alpha_k^H(x,t)$ 的近似形式为

$$\alpha_{\varepsilon,k}^H(x,t) := \int_{\Delta_k} p_\varepsilon(B_{t_2}^H - B_{t_1}^H - x_1)\cdots p_\varepsilon(B_{t_k}^H - B_{t_{k-1}}^H - x_{k-1})\mathrm{d}\boldsymbol{t}, \tag{3.4.2}$$

其中 $x=(x_1,\ldots,x_{k-1}), \boldsymbol{t}=(t_1,\ldots,t_k)$ 且 $\Delta_k=\{0\le t_1\le t_2\le\cdots\le t_k\le t\}$.

本小节主要给出 $\alpha_k^H(x,t)$ 的混沌展式, 并且证明其在 Meyer-Watanabe 意义下的平滑性. 特别地, 为了得到 $\alpha_k^H(x,t)$ 的混沌展式, 先给出当 $x\neq 0$ 和 $\varepsilon>0$ 时, $p_\varepsilon\left(B_t^H - B_s^H - x\right)$ 的 Wiener 混沌展式.

命题 3.4.1 对于 $x\neq 0$ 和 $\varepsilon>0$, 有

$$p_\varepsilon\left(B_t^H-B_s^H-x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n!}}\frac{p_{\varepsilon+|t-s|^{2H}}(x)}{(\varepsilon+|t-s|^{2H})^{n/2}}H_n\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon+|t-s|^{2H}}}\right)I_n\left(K(s,t)^{\otimes n}\right), \tag{3.4.3}$$

其中 $H_n(\cdot)$ 为 Hermite 多项式

$$H_n(x)=\frac{(-1)^n}{n!}e^{\frac{x^2}{2}}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right),\quad n\geq 1 \tag{3.4.4}$$

且 $H_0(x)=1$.

证明. 由 [101] 中的 Stroock 公式可得

$$p_\varepsilon\left(B_t^H-B_s^H-x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}I_n\left[\mathbb{E}\left(D^n p_\varepsilon\left(B_t^H-B_s^H-x\right)\right)\right], \tag{3.4.5}$$

且

$$D^n p_\varepsilon\left(B_t^H-B_s^H-x\right)=p_\varepsilon^{(n)}\left(B_t^H-B_s^H-x\right)K(s,t)^{\otimes n}. \tag{3.4.6}$$

结合 $p_\varepsilon(\cdot)$ 的性质和 Hermite 多项式 (3.4.4) 有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[D^n p_\varepsilon\left(B_t^H-B_s^H-x\right)\right]\\
=&\mathbb{E}\left[p_\varepsilon^{(n)}\left(B_t^H-B_s^H-x\right)\right]K(s,t)^{\otimes n}\\
=&(-1)^n\frac{\partial^n}{\partial x^n}\mathbb{E}\left[p_\varepsilon\left(B_t^H-B_s^H-x\right)\right]K(s,t)^{\otimes n}\\
=&(-1)^n p^{(n)}_{\varepsilon+|t-s|^{2H}}(x)K(s,t)^{\otimes n}\\
=&\sqrt{n!}(\varepsilon+|t-s|^{2H})^{-n/2}p_{\varepsilon+|t-s|^{2H}}(x)H_n\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon+|t-s|^{2H}}}\right)K(s,t)^{\otimes n},
\end{aligned} \tag{3.4.7}$$

其中

$$p_\varepsilon^{(n)}(x)=(-1)^n\sqrt{n!}\varepsilon^{-n/2}p_\varepsilon(x)H_n\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right),\ n\geq 1. \tag{3.4.8}$$

根据 (3.4.5)-(3.4.7), 结论成立. □

推论 3.4.1 对于 $x=0$ 和 $\varepsilon>0$ 有

$$p_\varepsilon\left(B_t^H-B_s^H\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m I_{2m}\left(K(s,t)^{\otimes 2m}\right)}{\sqrt{2\pi}2^m m!\left(\varepsilon+|t-s|^{2H}\right)^{m+1/2}}. \tag{3.4.9}$$

证明. 由 (3.4.5) 和 (3.4.6), 可得

$$\begin{aligned}
&p_\varepsilon(B_t^H-B_s^H)\\
=&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}I_n\left(\mathbb{E}\left(D^n p_\varepsilon(B_t^H-B_s^H)\right)\right)\\
=&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathbb{E}\left(p_\varepsilon^{(n)}(B_t^H-B_s^H)\right)I_n\left(K(s,t)^{\otimes n}\right)\\
=&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n!}}\varepsilon^{-n/2}\mathbb{E}\left(p_\varepsilon(B_t^H-B_s^H)H_n\left(\frac{B_t^H-B_s^H}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right)I_n\left(K(s,t)^{\otimes n}\right).
\end{aligned} \tag{3.4.10}$$

当 n 为奇数时, 因为 $p_\varepsilon(x)$ 和 $H_n(x)$ 都是偶函数, 所以 (3.4.10) 中的期望值为零. 又因为若 X 为服从 $N(0,\sigma^2)$ 的随机变量, Hermite 多项式 $H_n(x)$ 满足

$$\mathbb{E}[H_{2m}(X)]=\frac{\sqrt{(2m)!}\left(\sigma^2-1\right)^m}{2^m m!}, \tag{3.4.11}$$

所以取 $n=2m$, 可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(p_\varepsilon(x)H_{2m}\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right)\\
=&\int_{\mathbb{R}}p_\varepsilon(x)H_{2m}\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right)p_{|t-s|^{2H}}(x)\mathrm{d}x\\
=&\frac{1}{\sqrt{2\pi\left(|t-s|^{2H}+\varepsilon\right)}}\int_{\mathbb{R}}H_{2m}\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right)p_{\frac{\varepsilon|t-s|^{2H}}{|t-s|^{2H}+\varepsilon}}(x)\mathrm{d}x\\
=&\frac{(-\varepsilon)^m\sqrt{(2m)!}}{\sqrt{2\pi}2^m m!\left(|t-s|^{2H}+\varepsilon\right)^{m+1/2}}.
\end{aligned} \tag{3.4.12}$$

由 (3.4.11) 和 (3.4.12), 结论成立. □

注 3.4.1 当 $x=0$ 时, 由推论 3.4.1 可得 $\alpha_{\varepsilon,k}^{H}(0,t)$ 的混沌分解为

$$\alpha_{\varepsilon,k}^{H}(0,t)=\sum_{m_j=0}^{\infty}\int_{\Delta_k}\prod_{j=2}^{k}\frac{(-1)^{m_j}I_{2m_j}^{j}\left(K_H(t_j,t_{j-1})^{\otimes 2m_j}\right)}{\sqrt{2\pi}2^{m_j}(m_j)!\left(|t_j-t_{j-1}|^{2H}+\varepsilon\right)^{m_j+\frac{1}{2}}}\mathrm{d}\boldsymbol{t}. \tag{3.4.13}$$

注 3.4.2 在 (3.4.1) 中, 当高斯过程为次分数布朗运动 $S^H=\{S_t^H,t\geq 0\}$ 时, 命题 3.4.1 中 $p_\varepsilon\left(S_t^H-S_s^H-x\right)$ 的混沌展式为

$$p_\varepsilon\left(S_t^H-S_s^H-x\right)=$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n!}}\frac{p_{\varepsilon+(2-2^{2H-1})|t-s|^{2H}}(x)}{(\varepsilon+(2-2^{2H-1})|t-s|^{2H})^{n/2}}H_n\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon+(2-2^{2H-1})|t-s|^{2H}}}\right)I_n\left(\tilde{K}(s,t)^{\otimes n}\right), \tag{3.4.14}$$

其中 $\tilde{K}(s,t)$ 为次分数布朗运动 S^H 的平方可积核. 同样地, $p_\varepsilon\left(S_t^H-S_s^H\right)$ 的混沌展式展式可写为

$$p_\varepsilon\left(S_t^H-S_s^H\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m I_{2m}\left(\tilde{K}(s,t)^{\otimes 2m}\right)}{\sqrt{2\pi}2^m m!\,(\varepsilon+(2-2^{2H-1})|t-s|^{2H})^{m+1/2}}. \tag{3.4.15}$$

注 3.4.3 在 (3.4.1) 中, 对于双分数布朗运动 $B^{H_0,K_0}=\{B_t^{H_0,K_0},t\geq 0\}$,

$$p_\varepsilon\left(B_t^{H_0,K_0}-B_s^{H_0,K_0}-x\right)$$

的混沌展式可写为

$$\begin{aligned}&p_\varepsilon\left(B_t^{H_0,K_0}-B_s^{H_0,K_0}-x\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n!}}\frac{p_{\varepsilon+|t-s|^{2H_0}}(x)}{(\varepsilon+|t-s|^{2H_0K_0})^{n/2}}H_n\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon+|t-s|^{2H_0K_0}}}\right)I_n\left(K_{H_0,K_0}(s,t)^{\otimes n}\right),\end{aligned} \tag{3.4.16}$$

其中参数 $H_0\in(0,1)$, $K_0\in(0,1]$ 且 $K_{H_0,K_0}(s,t)$ 为双分数布朗运动 B^{H_0,K_0} 的平方可积核. 此外, $p_\varepsilon\left(B_t^{H_0,K_0}-B_s^{H_0,K_0}\right)$ 的混沌展式为

$$p_\varepsilon\left(B_t^{H_0,K_0}-B_s^{H_0,K_0}\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m I_{2m}(K_{H_0,K_0}(s,t)^{\otimes 2m})}{\sqrt{2\pi}2^m m!\,(\varepsilon+|t-s|^{2H_0K_0})^{m+1/2}}. \tag{3.4.17}$$

下面给出后续证明中用到的相关结论.

命题 3.4.2 设 $0<H<1$, 则分数布朗运动 B^H 的协方差函数 $R_H(t,s)$ 满足如下不等式:

$$\int_{\Delta_k^2}\prod_{j=1}^{k}\frac{R_H\left(t_j,s_j\right)^{m_j}}{\left(t_js_j\right)^{Hm_j}}\mathrm{d}\boldsymbol{t}\mathrm{d}\boldsymbol{s}\le C(H)\prod_{j=1}^{k}m_j^{-\frac{1}{2H}}, \tag{3.4.18}$$

其中 $\Delta_k=\{0\le t_1\le t_2\le\cdots\le t_k\le t\}$, $C(H)$ 是依赖于 H 的常数.

证明. 为方便, 记

$$Q(z)=\begin{cases}\frac{R_H(1,z)}{z^H}, & z\in(0,1],\\ 0, & z=0.\end{cases} \tag{3.4.19}$$

由 $R_H(u,v)=R_H\left(1,\frac{v}{u}\right)u^{2H}$, 可得

$$\begin{aligned}\int_{\Delta_k^2}\prod_{j=1}^{k}\frac{R_H\left(t_j,s_j\right)^{m_j}}{\left(t_js_j\right)^{Hm_j}}\mathrm{d}\boldsymbol{t}\mathrm{d}\boldsymbol{s}&\le\int_{[0,t]^{2k}}\prod_{j=1}^{k}\frac{R_H\left(1,\frac{s_j}{t_j}\right)^{m_j}t_j^{2Hm_j}}{\left(t_js_j\right)^{Hm_j}}\mathrm{d}\boldsymbol{t}\mathrm{d}\boldsymbol{s}\\&=\int_{[0,t]^k}\prod_{j=1}^{k}t_j\mathrm{d}\boldsymbol{t}\int_{[0,1]^k}\prod_{j=1}^{k}\frac{R_H\left(1,z_j\right)^{m_j}}{\left(z_j\right)^{Hm_j}}\mathrm{d}\boldsymbol{z}\\&\le C\int_{[0,1]^k}\prod_{j=1}^{k}Q_H(z_j)^{m_j}\mathrm{d}\boldsymbol{z},\end{aligned}$$

其中 $\frac{s_j}{t_j}=z_j$. 结合 [39] 中引理 2 的证明, 对任意 $\delta\in(0,\ 1)$, 有

$$\int_{[0,1]^k}\prod_{j=1}^{k}Q_H(z_j)^{m_j}\mathrm{d}\boldsymbol{z}=\int_{[0,1-\delta]^k}\prod_{j=1}^{k}Q_H(z_j)^{m_j}\mathrm{d}\boldsymbol{z}+\int_{[1-\delta,1]^k}\prod_{j=1}^{k}Q_H(z_j)^{m_j}\mathrm{d}\boldsymbol{z}. \tag{3.4.20}$$

对于 (3.4.20) 有

$$\begin{aligned}\int_{[1-\delta,1]^k}\prod_{j=1}^{k}Q_H(z_j)^{m_j}\mathrm{d}\boldsymbol{z}&=\int_{[1-\delta,1]^k}\exp\left(\sum_{j=1}^{k}m_j\log\left(Q_H(z_j)\right)\right)\mathrm{d}\boldsymbol{z}\\&\le C_1(H)\int_{[0,1]^k}\prod_{j=1}^{k}\exp\left(m_jt_j^{2H}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{t}\\&\le C_1(H)\prod_{j=1}^{k}m_j^{-\frac{1}{2H}}\end{aligned}$$

且

$$\int_{[0,1-\delta]^k}\prod_{j=1}^{k}Q_H(z_j)^{m_j}\mathrm{d}\boldsymbol{z}\le C_2(\delta)\prod_{j=1}^{k}a^{m_j},$$

其中 $0<a<1$. 对所有 $m_j,\ j=1,\cdots,k$, 可选择恰当的常数 C 使得

$$C_2(\delta)\prod_{j=1}^{k}a^{m_j}\le C\prod_{j=1}^{k}m_j^{-\frac{1}{2H}},$$

因此 (3.4.18) 得证. □

对于 $x\in\mathbb{R}^{k-1}\setminus\{0\}$, 接下来根据命题 3.4.1 的结论给出 $\alpha_k^H(x,t)$ 的混沌展式并证明其在 $L^2(\Omega)$ 中存在.

定理 3.4.1 对于 $x\in\mathbb{R}^{k-1}\setminus\{0\}$, 当 $0<H<1$ 时, 分数布朗运动的 MSLT 的 Wiener 混沌展式为

$$\begin{aligned}\alpha_k^H(x,t)=&\sum_{m_j=0}^{\infty}\\&\int_{\Delta_k}\prod_{j=2}^{k}\frac{1}{\sqrt{(m_j)!}}\frac{p_{|t_j-t_{j-1}|^{2H}}(x_j)}{\left(|t_j-t_{j-1}|^{2H}\right)^{\frac{m_j}{2}}}H_{m_j}\left(\frac{x_j}{\sqrt{|t_j-t_{j-1}|^{2H}}}\right)I_{m_j}^{j}\left(K_H(t_j,t_{j-1})^{\otimes m_j}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{t},\end{aligned}\tag{3.4.21}$$

其中 $\Delta_k=\{0\le t_1\le t_2\le\cdots\le t_k\le t\}$ 且在 $L^2(\Omega)$ 中存在.

证明. 由命题 3.4.1 可知

$$\begin{aligned}\alpha_{\varepsilon,k}^H(x,t)=&\sum_{m_j=0}^{\infty}\int_{\Delta_k}\prod_{j=2}^{k}\\&\times\frac{1}{\sqrt{(m_j)!}}\frac{p_{\varepsilon+|t_j-t_{j-1}|^{2H}}(x_j)}{\left(\varepsilon+|t_j-t_{j-1}|^{2H}\right)^{\frac{m_j}{2}}}H_{m_j}\left(\frac{x_j}{\sqrt{\varepsilon+|t_j-t_{j-1}|^{2H}}}\right)I_{m_j}^{j}\left(K_H(t_j,t_{j-1})^{\otimes m_j}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{t}\end{aligned}\tag{3.4.22}$$

成立, 其中 $\Delta_k=\{0\le t_1\le t_2\le\cdots\le t_k\le t\}$. 接下来仅需证明 (3.4.22) 在 $L^2(\Omega)$ 中收敛于 (3.4.21).

因为

$$
\begin{aligned}
&\left\|\alpha_{\varepsilon,k}^{H}(x,t)\right\|_2^2 \\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m_j\geq 0,m_2+\ldots+m_k=n}\int_{\Delta_k^2}\prod_{j=2}^{k}\prod_{i=1}^{2}p_{\varepsilon+|t_{i,j}-t_{i,j-1}|^{2H}}(x_j)H_{m_j}\left(\frac{x_j}{\sqrt{\varepsilon+|t_{i,j}-t_{i,j-1}|^{2H}}}\right)\\
&\times\frac{R_H\left(t_{1,j}-t_{1,j-1},t_{2,j}-t_{2,j-1}\right)^{m_j}}{\left(\left(\varepsilon+|t_{1,j}-t_{1,j-1}|^{2H}\right)\left(\varepsilon+|t_{2,j}-t_{2,j-1}|^{2H}\right)\right)^{\frac{m_j}{2}}}\mathrm{d}\boldsymbol{t_1}\mathrm{d}\boldsymbol{t_2}\\
&\leq C\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m_j\geq 0,m_2+\ldots+m_k=n}\int_{\Delta_k^2}\prod_{j=2}^{k}\prod_{i=1}^{2}H_{m_j}\left(\frac{x_j}{\sqrt{\varepsilon+|t_{i,j}-t_{i,j-1}|^{2H}}}\right)\\
&\times\exp\left(-\frac{|x|^2}{2(\varepsilon+|t_{i,j}-t_{i,j-1}|^{2H})}\right)\\
&\times\frac{R_H\left(t_{1,j}-t_{1,j-1},t_{2,j}-t_{2,j-1}\right)^{m_j}}{\left(\left(\varepsilon+|t_{1,j}-t_{1,j-1}|^{2H}\right)\left(\varepsilon+|t_{2,j}-t_{2,j-1}|^{2H}\right)\right)^{\frac{m_j}{2}}}\mathrm{d}\boldsymbol{t_1}\mathrm{d}\boldsymbol{t_2},
\end{aligned}
\tag{3.4.23}
$$

其中 $\boldsymbol{t_i}=(t_{i,1},\cdots,t_{i,k})$, $i=1,2$, 所以仅需证明

$$
\begin{aligned}
&\sup_{\varepsilon>0}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m_2+\ldots+m_k=n}\int_{\Delta_k^2}\prod_{j=2}^{k}\prod_{i=1}^{2}H_{m_j}\left(\frac{x_j}{\sqrt{\varepsilon+|t_{i,j}-t_{i,j-1}|^{2H}}}\right)\\
&\times\exp\left(-\frac{|x|^2}{2(\varepsilon+|t_{i,j}-t_{i,j-1}|^{2H})}\right)\\
&\times\frac{R_H\left(t_{1,j}-t_{1,j-1},t_{2,j}-t_{2,j-1}\right)^{m_j}}{\left(\left(\varepsilon+|t_{1,j}-t_{1,j-1}|^{2H}\right)\left(\varepsilon+|t_{2,j}-t_{2,j-1}|^{2H}\right)\right)^{\frac{m_j}{2}}}\mathrm{d}\boldsymbol{t_1}\mathrm{d}\boldsymbol{t_2}<\infty.
\end{aligned}
\tag{3.4.24}
$$

由 [63] 中的命题 3 可知, Hermite 多项式满足不等式

$$
\sup_{x\in\mathbb{R}}|H_n(x)\exp(-\alpha x^2)|\leq cn^{-\frac{8\alpha-1}{12}},
\tag{3.4.25}
$$

其中 c 为常数且 $\frac{1}{4}\leq\alpha\leq\frac{1}{2}$, 则

$$
\begin{aligned}
&\sum_{m_2+\ldots+m_k=n}\prod_{j=2}^{k}\prod_{i=1}^{2}H_{m_j}\left(\frac{x_j}{\sqrt{\varepsilon+|t_{i,j}-t_{i,j-1}|^{2H}}}\right)\exp\left(-\frac{|x|^2}{2(\varepsilon+|t_{i,j}-t_{i,j-1}|^{2H})}\right)\\
&\leq c_1\sum_{m_2+\ldots+m_k=n}\prod_{j=2}^{k}(m_j\vee 1)^{-\frac{1}{2}}\leq c_2.
\end{aligned}
\tag{3.4.26}
$$

此外, 由命题 3.4.2 可得

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Delta_k}\prod_{j=2}^{k}\frac{R_H\left(t_{1,j}-t_{1,j-1},t_{2,j}-t_{2,j-1}\right)^{m_j}}{\left(\left(\varepsilon+|t_{1,j}-t_{1,j-1}|^{2H}\right)\left(\varepsilon+|t_{2,j}-t_{2,j-1}|^{2H}\right)\right)^{\frac{m_j}{2}}}\mathrm{d}t_{1,j}\mathrm{d}t_{2,j}\\
&\leq\int_{\Delta_k}\prod_{j=2}^{k}\frac{R_H\left(t_{1,j}-t_{1,j-1},t_{2,j}-t_{2,j-1}\right)^{m_j}}{\left(t_{1,j}-t_{1,j-1},t_{2,j}-t_{2,j-1}\right)^{Hm_j}}\mathrm{d}t_{1,j}\mathrm{d}t_{2,j}\\
&\leq\prod_{j=2}^{k}\frac{1}{m_j^{\frac{1}{2H}}}\leq c_3, \qquad (3.4.27)
\end{aligned}
$$

其中 c_1, c_2, c_3 为不同的常数.

综上, 由 (3.4.26) 和 (3.4.27) 可知, 结论成立. □

命题 3.4.3 对于 $x\in\mathbb{R}^{k-1}\setminus\{0\}$, 当 $0<H<1$ 时, 次分数布朗运动的 MSLT $\tilde{L}_k(x,t)$ 的 Wiener 混沌展式为

$$
\begin{aligned}
\tilde{L}_k(x,t)=&\sum_{m_j=0}^{\infty}\int_{\Delta_k}\prod_{j=2}^{k}\frac{1}{\sqrt{(m_j)!}}\frac{p_{|t_j-t_{j-1}|^{2H}}(x_j)}{\left((2-2^{2H-1})|t_j-t_{j-1}|^{2H}\right)^{\frac{m_j}{2}}}\\
&\times H_{m_j}\left(\frac{x_j}{\sqrt{((2-2^{2H-1})|t_j-t_{j-1}|^{2H}}}\right)I_{m_j}^{j}\left(\tilde{K}_H(t_j,t_{j-1})^{\otimes m_j}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{t}, \qquad (3.4.28)
\end{aligned}
$$

其中 $\Delta_k=\{0\leq t_1\leq t_2\leq\cdots\leq t_k\leq t\}$.

同样地, 根据定理 3.4.1 及注 3.4.3 可得双分数布朗运动 MSLT 的混沌展式.

命题 3.4.4 对于双分数布朗运动 B^{H_0,K_0}, $H_0\in(0,1)$, $K_0\in(0,1]$, 当 $x\in\mathbb{R}^{k-1}\setminus\{0\}$ 时, B^{H_0,K_0} 的 MSLT 的 Wiener 混沌展式为

$$
\begin{aligned}
L_k^{H_0,K_0}(x,t)=&\sum_{m_j=0}^{\infty}\int_{\Delta_k}\prod_{j=2}^{k}\frac{1}{\sqrt{(m_j)!}}\\
&\times\frac{p_{|t_j-t_{j-1}|^{2H_0K_0}}(x_j)}{\left(|t_j-t_{j-1}|^{2H_0K_0}\right)^{\frac{m_j}{2}}}H_{m_j}\left(\frac{x_j}{\sqrt{|t_j-t_{j-1}|^{2H_0K_0}}}\right)I_{m_j}^{j}\left(K_{H_0,K_0}(t_j,t_{j-1})^{\otimes m_j}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{t},
\end{aligned}
\tag{3.4.29}
$$

其中 $\Delta_k=\{0\leq t_1\leq t_2\leq\cdots\leq t_k\leq t\}$.

接下来基于定理 3.4.1 中给出的 $\alpha_{\varepsilon,k}^{H}(x,t)$ 的混沌展式, 证明其在 Meyer-

Watanabe 意义下的平滑性.

定理 3.4.2 对于分数布朗运动 B^H, $0<H<1$, $x\in\mathbb{R}^{k-1}\setminus\{0\}$ 且 $k\geq 2$, 则对每个 $\beta<(k-1)\left(\frac{1}{2H}-\frac{1}{2}\right)$ 有 $\alpha^H_{\varepsilon,k}(x,t)\in\mathbb{D}^{\beta,2}$.

证明. 记

$$\beta_{m_j,\varepsilon}(t_j):=\frac{p_{|t_j-t_{j-1}|^{2H}+\varepsilon}(x_j)}{\left(|t_j-t_{j-1}|^{2H}+\varepsilon\right)}H_{m_j}\left(\frac{x_j}{\sqrt{|t_j-t_{j-1}|^{2H}+\varepsilon}}\right). \tag{3.4.30}$$

易得

$$\begin{aligned}
&\left\|\alpha^H_{\varepsilon,k}(x,t)\right\|_2^2=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m_j\geq 0,m_2+\ldots+m_k=n}\\
&\mathbb{E}\left\{\int_{\Delta_k^2}\prod_{j=2}^{k}\frac{1}{\sqrt{m_j!}}\beta_{m_j,\varepsilon}(t_j)\beta_{m_j,\varepsilon}(s_j)I^j_{m_j}\left(K_H(t_j,t_{j-1})\right)^{\otimes m_j}I^j_{m_j}\left(K_H(s_j,s_{j-1})\right)^{\otimes m_j}\mathrm{d}\boldsymbol{t}\mathrm{d}\boldsymbol{s}\right\}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m_j\geq 0,m_2+\ldots+m_k=n}\int_{\Delta_k^2}\beta_{m_j,\varepsilon}(t_j)\beta_{m_j,\varepsilon}(s_j)R_H\left(t_j-t_{j-1},s_j-s_{j-1}\right)^{m_j}\mathrm{d}\boldsymbol{t}\mathrm{d}\boldsymbol{s}.
\end{aligned}\tag{3.4.31}$$

对于 $\frac{1}{4}\leq\alpha<\frac{1}{2}$, 令

$$\begin{aligned}
&S\left(t_j,x_j,\alpha,\varepsilon,m_j\right)=H_{m_j}\left(\frac{x_j}{\sqrt{|t_j-t_{j-1}|^{2H}+\varepsilon}}\right)\exp\left(-\alpha\frac{(x_j)^2}{|t_j-t_{j-1}|^{2H}+\varepsilon}\right),\\
&T\left(t_j,x_j,\alpha,\varepsilon,m_j\right)=\frac{1}{\sqrt{|t_j-t_{j-1}|^{2H}+\varepsilon}}\exp\left(-\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\frac{(x_j)^2}{|t_j-t_{j-1}|^{2H}+\varepsilon}\right).
\end{aligned}\tag{3.4.32}$$

由 [63] 中命题 3 和定理 8 的证明, 可得

$$S\left(\cdot,x_j,\alpha,\varepsilon,m_j\right)\leq Cm_j^{-(8\alpha-1)/12} \tag{3.4.33}$$

且 $T\left(\cdot,x_j,\alpha,\varepsilon,m_j\right)$ 是有界的, 则

$$\begin{aligned}
&\beta_{m_j,\varepsilon}(t_j)\beta_{m_j,\varepsilon}(s_j)\\
&=\frac{S\left(t_j,x_j,\alpha,\varepsilon,m_j\right)S\left(s_j,x_j,\alpha,\varepsilon,m_j\right)T\left(t_j,x_j,\alpha,\varepsilon,m_j\right)T\left(s_j,x_j,\alpha,\varepsilon,m_j\right)}{2\pi\left[\left(\varepsilon+|t_j-t_{j-1}|^{2H}\right)\left(\varepsilon+|s_j-s_{j-1}|^{2H}\right)\right]^{\frac{m_j}{2}}}
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{C}{\left(t_j s_j\right)^{Hm_j}\left(m_j \vee 1\right)^{\frac{8\alpha-1}{6}}}. \tag{3.4.34}$$

根据 (3.4.31) 和定理 3.4.1 中给出 $\alpha_k^H(x,t)$ 的混沌展式, 仅需证明

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1+n)^{\beta}\sum_{m_j\geq 0, m_2+\ldots+m_k=n}\int_{\Delta_k^2}\beta_{m_j,\varepsilon}(t_j)\beta_{m_j,\varepsilon}(s_j)R_H\left(t_j,s_j\right)^{m_j}\mathrm{d}\boldsymbol{t}\mathrm{d}\boldsymbol{s}<\infty. \tag{3.4.35}$$

由 (3.4.34) 和命题 3.4.2 可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}(1+n)^{\beta}\sum_{m_j\geq 0, m_2+\ldots+m_k=n}\int_{\Delta_k^2}\beta_{m_j,\varepsilon}(t_j)\beta_{m_j,\varepsilon}(s_j)R_H\left(t_j,s_j\right)^{m_j}\mathrm{d}\boldsymbol{t}\mathrm{d}\boldsymbol{s}\\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty}(1+n)^{\beta}\sum_{m_j\geq 0, m_2+\ldots+m_k=n}\prod_{j=2}^{k}\left(m_j\vee 1\right)^{-(8\alpha-1)/6}\int_{([0,1])^n}\prod_{j=1}^{k-1}Q_H(z_j)^{m_j}\mathrm{d}\boldsymbol{z}\\
&\leq C\sum_{n=0}^{\infty}(1+n)^{\beta}\sum_{m_j\geq 0, m_2+\ldots+m_k=n}\prod_{j=2}^{k}\left(m_j\vee 1\right)^{-(8\alpha-1)/6-\frac{1}{2H}}\\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty}(1+n)^{\beta}n^{(k-1)\left(1-\frac{1}{2H}-\frac{8\alpha-1}{6}\right)-1},
\end{aligned} \tag{3.4.36}$$

则当

$$\beta<(k-1)\left(\frac{1}{2H}+\frac{8\alpha-7}{6}\right)$$

时, (3.4.35) 收敛. 又因为 $\frac{1}{4}\leq\alpha<\frac{1}{2}$, 所以有 $\beta<(k-1)\left(\frac{1}{2H}-\frac{1}{2}\right)$. □

注 3.4.4 在已有文献 [39] 中得到 N 个参数的一维分数布朗运动局部时的混沌展式和平滑性条件 $\alpha<\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2H_j}-\frac{1}{2}$, 由定理 3.4.1 和定理 3.4.2 可知, 当 $N=1$, $k=2$, $\alpha_{\varepsilon,2}^H(x,t)$ 表示局部时时, 其混沌展式和平滑性条件与 [39] 中的结论一致.

由定理 3.4.1 的结论给出 $\alpha_{\varepsilon,k}^H(x,t)$ 重整化的一个简单方法, 其中 $\alpha_{\varepsilon,k}^H(x,t)$ 的期望值部分恰好为其混沌展式中的第 0 阶.

推论 3.4.2 设 $0<H<1$, $x\in\mathbb{R}^{k-1}\setminus\{0\}$ 且 $k\geq 2$, 则对每个 $\beta<(k-1)\left(\frac{1}{2H}-\frac{1}{2}\right)$,

$$\tilde{\alpha}_k^H(x,t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\alpha_{\varepsilon,k}^H(x,t)-\mathbb{E}\left(\alpha_{\varepsilon,k}^H(x,t)\right)\right]$$

属于 $\mathbb{D}^{\beta,2}$ 且 $\tilde{\alpha}_{\varepsilon,k}(x,t)$ 的混沌展式为

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}^{H}_{\varepsilon,k}(x,t) = &\sum_{m_j=1}^{\infty}\int_{\Delta_k}\prod_{j=2}^{k}\frac{1}{\sqrt{(m_j)!}}\frac{p_{|t_j-t_{j-1}|^{2H}+\varepsilon}(x_j)}{\left(|t_j-t_{j-1}|^{2H}+\varepsilon\right)^{\frac{m_j}{2}}}\\ &\times H_{m_j}\left(\frac{x_j}{\sqrt{|t_j-t_{j-1}|^{2H}+\varepsilon}}\right)I^{j}_{m_j}\left(K_H(t_j,t_{j-1})^{\otimes m_j}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{t},\end{aligned} \tag{3.4.37}$$

其中 $\Delta_k=\{0\le t_1\le t_2\le\cdots\le t_k\le t\}$.

3.4.2 高维自相似高斯过程 MSLT 的混沌展式

为方便, 本小节同 3.4.1节, 仅给出分数布朗运动的相关结论, 其它自相似高斯过程类似可得证.

在本小节中, 将 3.4.1 节一维分数布朗运动 MSLT 的结论推广至 d ($d\ge 2$)-维的情形. 给出当 $x=0$ 时, d- 维分数布朗运动 MSLT 的 Wiener 混沌展式并证明其在 Meyer-Watanabe 意义下的平滑性.

记 $B^H_t=\left\{B^{H_1}_t,\cdots,B^{H_d}_t\right\}$ 是 Hurst 参数为 $H=\{H_1,\cdots H_d\}$, $H_j\in(0,1)$ 的 d-维分数布朗运动, 其分量相互独立且协方差函数为

$$\mathbb{E}\left(B^{H_i}_tB^{H_j}_s\right)=\frac{\delta_{i,j}}{2}\left(t^{2H}+s^{2H}-|t-s|^{2H}\right),$$

其中 $i,j=1,\cdots,d$ 且 t, $s\ge 0$.

记 $\boldsymbol{I}_n=(i_1,\cdots,i_n)$, $1\le i_j\le d$ 且

$$\alpha(\boldsymbol{I}_n)=\mathbb{E}\left[X_{i_1}\cdots X_{i_n}\right],$$

其中 X_i 是服从 $N(0,1)$ 的独立随机变量. 当 $n=2m$ 时有

$$\alpha(\boldsymbol{I}_{2m})=\frac{(2m_1)!\cdots(2m_d)!}{(m_1)!\cdots(m_d)!2^m}, \tag{3.4.38}$$

否则, $\alpha(\boldsymbol{I}_n)=0$.

令 $H^*=\max\{H_1,\cdots,H_d\}$, 接下来给出 d 维分数布朗运动 MSLT $\alpha^H_{\varepsilon,k}(0,t)$ 的混沌展式并得到其平滑性.

定理 3.4.3 设 B^H_t 为 $d\geq 2$ 的 d 维分数布朗运动, 则对每个 $\gamma<(k-1)\left(\frac{1}{2H^*}-\frac{d}{2}\right)$, $\alpha^H_{\varepsilon,k}(0,t)$ 属于空间 $\mathbb{D}^{\gamma,2}$ 且 $\alpha^H_{\varepsilon,k}(0,t)$ 的混沌展式为

$$\begin{aligned}&\alpha^H_{\varepsilon,k}(0,t)\\&=\sum_{m_j\geq 0}\int_{\Delta_k}\prod_{j=2}^{k}(-1)^{m_j}\frac{\alpha(\boldsymbol{I}_{2m_j})}{(2m_j)!(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\left(\varepsilon+|t_j-t_{j-1}|^{2H}\right)^{-\frac{d}{2}-m_j}I_{2m_j}\left(K(t_j,t_{j-1})^{\otimes 2m_j}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{t},\end{aligned}\tag{3.4.39}$$

其中 $m_j=(m_{j,1},\cdots,m_{j,d})$, $\Delta_k=\{0\leq t_1\leq t_2\leq\cdots\leq t_k\leq t\}$.

证明. 由推论 3.4.1 可得

$$p_\varepsilon\left(B^H_t-B^H_s\right)=\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{\alpha(I_{2p})}{(2p)!(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\left(\varepsilon+|t-s|^{2H}\right)^{-\frac{d}{2}-p}I_{2p}\left(K(s,t)^{\otimes 2p}\right),\tag{3.4.40}$$

其中 $\alpha(\boldsymbol{I}_{2p})$ 为 (3.4.38). 同 (3.4.21) 可得 $\alpha^H_{\varepsilon,k}(0,t)$ 的混沌展式 (3.4.39).

对所有的 n, $m\geq 1$, $f\in L^2(\mathbb{R}^+)$, $g\in L^2(\mathbb{R}^+)$, 有

$$\mathbb{E}[I_n(f)I_m(g)]=\begin{cases}0, & n\neq m,\\ n!\langle f,g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^+)}, & n=m.\end{cases}\tag{3.4.41}$$

结合 B^H_t 分量的独立性, 可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left(\int_{\Delta_k}\prod_{j=2}^{k}(-1)^{m_j}\frac{\alpha(I_{2m_j})}{(2m_j)!(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\left(\varepsilon+|t_j-t_{j-1}|^{2H}\right)^{-\frac{d}{2}-m_j}I_{2m_j}\left(K(t_j,t_{j-1})^{\otimes 2m_j}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{t}\right)^2\\&=\sum_{m_2+\cdots+m_k=n}\prod_{j=2}^{k}\frac{(2m)!}{(2m_2)!\cdots(2m_k)!}\frac{(2\pi)^{-d}}{((2m_j)!)^2}\alpha(I_{2m_j})^2\int_{\Delta_k^2}\prod_{j=2}^{k}(2m_j)!\\&\times\left(\varepsilon+|t_j-t_{j-1}|^{2H}\right)^{-\frac{d}{2}-m_j}\left(\varepsilon+|s_j-s_{j-1}|^{2H}\right)^{-\frac{d}{2}-m_j}\\&\times R_H(t_j-t_{j-1},s_j-s_{j-1})^{2m_j}\mathrm{d}\boldsymbol{t}\mathrm{d}\boldsymbol{s}\\&=\sum_{m_2+\cdots+m_k=n}\prod_{j=2}^{k}\frac{(2m_j)!(2\pi)^{-d}}{(m_j!)^2 2^{2m_j}}\int_{\Delta_k^2}\prod_{j=2}^{k}\left(\varepsilon+|t_j-t_{j-1}|^{2H}\right)^{-\frac{d}{2}-m_j}\end{aligned}$$

$$\times\left(\varepsilon+|s_j-s_{j-1}|^{2H}\right)^{-\frac{d}{2}-m_j}R_H(t_j-t_{j-1},s_j-s_{j-1})^{2m_j}\mathrm{d}\boldsymbol{t}\mathrm{d}\boldsymbol{s}. \tag{3.4.42}$$

根据 (2.3.8), 仅需证得

$$\sum_{\substack{m_2+\cdots+m_k=n\\ n\geq 0}}(1+n)^{\gamma}\prod_{j=2}^{k}\frac{(2m_j)!(2\pi)^{-d}}{(m_j!)^2 2^{2m_j}}\int_{\Delta_k^2}\prod_{j=2}^{k}\left(\varepsilon+|t_j-t_{j-1}|^{2H}\right)^{-\frac{d}{2}-m_j}$$

$$\times\left(\varepsilon+|s_j-s_{j-1}|^{2H}\right)^{-\frac{d}{2}-m_j}R_H(t_j-t_{j-1},s_j-s_{j-1})^{2m_j}\mathrm{d}\boldsymbol{t}\mathrm{d}\boldsymbol{s}<\infty. \tag{3.4.43}$$

在 (3.4.43) 中有

$$\begin{aligned}
&\sum_{m_2+\cdots+m_k=n}\prod_{j=2}^{k}\frac{(2m_j)!(2\pi)^{-d}}{(m_j!)^2 2^{2m_j}}\\
&=\sum_{m_2+\cdots+m_k=n}\prod_{j=2}^{k}\sum_{m_{j,1}+\cdots+m_{j,d}=m_j}\prod_{i=1}^{d}\frac{(2m_{i,j})!(2\pi)^{-d}}{(m_{i,j}!)^2 2^{2m_{i,j}}}\\
&\leq C\sum_{m_2+\cdots+m_k=n}\prod_{j=2}^{k}\sum_{m_{j,1}+\cdots+m_{j,d}=m_j}\prod_{i=1}^{d}\frac{1}{\left(m_{i,j}\vee 1\right)^{\frac{1}{2}}}\\
&\leq C\sum_{m_2+\cdots+m_k=n}\prod_{j=2}^{k}(m_j\vee 1)^{\frac{d}{2}-1}
\end{aligned} \tag{3.4.44}$$

且由命题 3.4.2 可知

$$\begin{aligned}
&\int_{\Delta_k^2}\prod_{j=2}^{k}\left(\varepsilon+|t_j-t_{j-1}|^{2H}\right)^{-\frac{d}{2}-m_j}\left(\varepsilon+|s_j-s_{j-1}|^{2H}\right)^{-\frac{d}{2}-m_j}\\
&\times R_H(t_j-t_{j-1},s_j-s_{j-1})^{2m_j}\mathrm{d}\boldsymbol{t}\mathrm{d}\boldsymbol{s}\\
&=\int_{\Delta_k^2}\prod_{j=2}^{k}\prod_{i=1}^{d}Q_{H_j}(z_j)^{2m_{i,j}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}{(t_js_j)^{Hd}}\\
&=\prod_{j=2}^{k}\int_{\Delta_k}t_j^{2Hd+1}\mathrm{d}\boldsymbol{t}\int_{\Delta_k}\prod_{i=1}^{d}Q_{H_j}(z_j)^{2m_{i,j}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}}{(z_j)^{H_jd}}\\
&\leq C(H)\prod_{j=2}^{k}\left(2m_j\right)^{-\frac{1}{2H^*}}.
\end{aligned} \tag{3.4.45}$$

将 (3.4.44)、(3.4.45) 带入 (3.4.43) 得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\substack{m_2+\cdots+m_k=n\\ n\geq 0}}(1+n)^{\gamma}\prod_{j=2}^{k}\frac{(2m_j)!(2\pi)^{-d}}{(m_j!)^2 2^{2m_j}}\int_{\Delta_k^2}\prod_{i=1}^{n}\left(\varepsilon+|t_j-t_{j-1}|^{2H}\right)^{-\frac{d}{2}-m_j}\\
&\times\left(\varepsilon+|s_j-s_{j-1}|^{2H}\right)^{-\frac{d}{2}-m_j}R_H(t_j-t_{j-1},s_j-s_{j-1})^{2m_j}\mathrm{d}\boldsymbol{t}\mathrm{d}\boldsymbol{s}\\
&\leq\sum_{n\geq 0}(1+n)^{\gamma}\sum_{m_2+\cdots+m_k=n}\prod_{j=2}^{k}\left(m_j\vee 1\right)^{\frac{d}{2}-\frac{1}{2H^*}-1}\\
&\leq C\sum_{n\geq 0}(1+n)^{\gamma}n^{(k-1)\left(\frac{d}{2}-\frac{1}{2H^*}\right)-1},
\end{aligned}
\tag{3.4.46}
$$

因此, 当 $\gamma<(k-1)\left(\frac{1}{2H^*}-\frac{d}{2}\right)$ 时, (3.4.43) 有限. □

注 3.4.5 注意到定理 3.4.3 中的结论涵盖了 [39] 中给出 1-参数 d-维分数布朗运动 $k=2$ 时局部时的情况. 此外, 当 $k=2$ 且 $H=\frac{1}{2}$ 时, [65] 中得到的 N 参数 d-维 Wiener 过程局部时的结论也为本文的一种特殊情况.

注 3.4.6 由定理 3.4.3 可知, d-维次分数布朗运动 S^H MSLT $\tilde{L}_{k,\varepsilon}(0,t)$ 的混沌展式可写为

$$
\begin{aligned}
\tilde{L}_{k,\varepsilon}(0,t)=&\sum_{m_j\geq 0}\int_{\Delta_k}\prod_{j=2}^{k}(-1)^{m_j}\frac{\alpha(\boldsymbol{I}_{2m_j})}{(2m_j)!(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\\
&\times\left(\varepsilon+(2-2^{2H-1})|t_j-t_{j-1}|^{2H}\right)^{-\frac{d}{2}-m_j}I_{2m_j}\left(\tilde{K}(t_j,t_{j-1})^{\otimes 2m_j}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{t},
\end{aligned}
\tag{3.4.47}
$$

其中 $\boldsymbol{m}_j=(m_{j,1},\cdots,m_{j,d})$, $\Delta_k=\{0\leq t_1\leq t_2\leq\cdots\leq t_k\leq t\}$.

注 3.4.7 由双分数布朗运动 B^{H_0,K_0} 的方差及定理 3.4.3 的证明可知, B^{H_0,K_0} 的 MSLT $L_{n,\varepsilon}^{H_0,K_0}(0,t)$ 的混沌展式为

$$
\begin{aligned}
L_{k,\varepsilon}^{H_0,K_0}(0,t)=&\sum_{m_j\geq 0}\int_{\Delta_k}\prod_{j=2}^{k}(-1)^{m_j}\frac{\alpha(\boldsymbol{I}_{2m_j})}{(2m_j)!(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\\
&\times\left(\varepsilon+|t_j-t_{j-1}|^{2H_0K_0}\right)^{-\frac{d}{2}-m_j}I_{2m_j}\left(K_{H_0,K_0}(t_j,t_{j-1})^{\otimes 2m_j}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{t},
\end{aligned}
\tag{3.4.48}
$$

其中 $\boldsymbol{m}_j=(m_{j,1},\cdots,m_{j,d})$, $\Delta_k=\{0\leq t_1\leq t_2\leq\cdots\leq t_k\leq t\}$.

4 自相似高斯过程的导数型多重自相交局部时

对于自相似高斯过程 $X^H \in G^H = \{X^H | X^H = X_t^H,\ t \geq 0\}$, 其中 H 为 Hurst 参数且 $H \in (0,1)$, 本章主要考虑通过样本配置方法给出 X^H 的 DMSLT 存在性和 Hölder 连续性条件. 接着, 在存在性条件下, 证明 X^H 的 DMSLT 满足 Meyer-Watanabe 的意义上的平滑性. 特别地, 本文仅给出分数布朗运动 DMSLT 平滑性的详细证明过程, 而对于集合 G^H 中其它自相似高斯过程, 它们的 DMSLT 在 Meyer-Watanabe 意义下的平滑性类似可得.

4.1 问题综述

相交局部时最初被设想为"度量"布朗运动 $B_t \in \mathbb{R}$ 自相交数量的一种方式. 一般地, 布朗运动 k 重自相交局部时定义为

$$L_k(x,t) = \int \cdots \int_{0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_k \leq t} \delta(B_{t_2} - B_{t_1} - x_2) \ldots \delta(B_{t_k} - B_{t_{k-1}} - x_k) \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 \ldots \mathrm{d}t_k, \tag{4.1.1}$$

其中 $\delta(x)$ 表示 Dirac delta 函数. 更准确地, k 重自相交局部时的近似形式可定义为

$$\begin{aligned} &L_{k,\varepsilon}(x,t) \\ &= \int \cdots \int_{0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_k \leq t} p_\varepsilon(B_{t_2} - B_{t_1} - x_2) \ldots p_\varepsilon(B_{t_k} - B_{t_{k-1}} - x_k) \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 \ldots \mathrm{d}t_k, \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

其中 $k \geq 2$ 且

$$p_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon}} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{\iota \xi x} e^{-\frac{\varepsilon |\xi|^2}{2}} \mathrm{d}\xi, \tag{4.1.3}$$

Dirac delta 函数 $\delta(x)$ 可以被热核 $p_\varepsilon(x)$ 逼近. Imkeller [65], Streit 和 Mendonca [94], Rosen [111] 等进一步研究了 k 重自相交局部时. 特别地, Rosen [111] 给出式 (4.1.2)

存在性的证明. 此外, 任意阶 $\alpha < \frac{1}{2(k-1)}$ 的联合 Hölder 连续性也被证得.

对于自相似高斯过程, 由于其有趣的性质, 如长/短相依性和自相似性等, 被广泛应用于各个领域, 如金融、水文学和通信工程. 当 $k=2$ 时, 基于 Rosen [107] 中的思想, Yan 等 [127,128] 给出分数布朗运动二重自相交局部时的导数. 随后, Jung 和 Markowsky [69,71] 进一步研究了它. 值得注意的是, Jung 和 Markowsky [69] 证得占位时公式

$$\int_0^t \int_0^s f'(B_r^H - B_t^H)\mathrm{d}r = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\alpha'_{2,\varepsilon}(x,t)\mathrm{d}x \tag{4.1.4}$$

对所有 $f(x) \in C^1(\mathbb{R})$ 和 $0 < H < \frac{1}{2}$ 成立, 其中 $\alpha'_{2,\varepsilon}(x,t)$ 表示导数型二重自相交局部时. Jaramillo 和 Nualart [72]研究了分数布朗运动导数型自相交局部时的泛函极限定理. Yan 和 Yu [129] 将其推广至高维分数布朗运动, 给出高维分数布朗运动导数型二重自相交局部时的定义并证明其存在. 在上述分数布朗运动二重自相交局部时占位时公式 (4.1.4) 的激励下, Guo 等 [46] 给出两个独立分数布朗运动高阶导数型二重相交局部时的定义并证明其存在性和指数可积性. 接着, Yu [131] 证得分数布朗运动高阶导数型二重自相交局部时 $\alpha_{2,\varepsilon}^{(k)}(x,t)$ 的存在性和 Hölder 连续性的充分条件.

随着分数布朗运动导数型二重自相交局部时研究的深入, 许多学者提出使用更一般的自相似高斯过程作为随机模型来研究其导数型局部时, 这引出了许多关于自相似高斯过程的理论问题, 并且研究更一般自相似高斯过程, 如次分数布朗运动和双分数布朗运动的导数型自相交局部时也似乎是很有趣的. 但与分数布朗运动的广泛研究相比, 对其它自相似高斯过程导数型局部时的系统研究很少, 其主要原因是不具有平稳增量的自相似高斯过程依赖结构的复杂性. 2020 年, Shi [114] 给出了双分数布朗运动导数型二重自交局部时的分数平滑性.

对于随机过程局部时的平滑性研究在数学、金融等领域有着不凡的历史, 许多学者对其进行了证明[39,65,101,117]. 早在 1992 年, Nualart 和 Vives [101] 基于混

沌展式证得布朗运动的局部时属于 Sobolev 空间. 接着, Imkeller 等 [65]研究了 $\mathbb{R}^d$ 上布朗运动二重自相交局部时的平滑性. Eddahbi 等 [39]、Eddahbi 和 Vives [40]将这些结果扩展至分数布朗运动, 并得到 Sobolev-Watanabe 意义上的平滑性. 最近, Yan 和 Yu [129] 给出高维分数布朗运动导数型二重自相交局部时在 Meyer-Watanabe 意义上的平滑性. Shi 和 Yu [117]、Shi [114] 研究了布朗运动、分数布朗运动和双分数布朗运动一阶导数型自相交局部时的分数平滑性. Yan 和 Shen [127] 研究了两个独立次分数布朗运动的二重碰撞局部时, 给出其 Meyer-Watanabe 意义下的平滑性.

由上面的结论可知, 对高斯过程导数型二重自相交局部时的研究已经非常深入 [48,69,71,131]. 然而, 除了 Rosen [110] 证明的 $\mathbb{R}$ 中布朗运动的 k 重重整化自相交局部时的连续可微性之外, 对自相似高斯过程 DMSLT 仍没给出具体的定义形式. 此外, DMSLT 比二重自相交局部时积分结构更复杂且局部非确定性也不能直接使用, 因此本章主要运用样本配置法和混沌展式来研究自相似高斯过程的 DMSLT, 其中样本配置方法提供了一种应用局部非确定性的方法, 它在证明存在性和 Hölder 连续性方面非常有用. 混沌展式在研究二重自相交的平滑性方面也已日趋成熟 [59,129]. 然而, 要得到 DMSLT 的相应结果仍然面临某些困难, 主要的困难在于多重积分计算的复杂性. 本章最后通过分数布朗运动 DMSLT 的混沌展式证明 DMSLT 在 Meyer-Watanabe 意义下的平滑性.

本章的结构如下: 第二节在第三章证明的 MSLT 存在的基础上给出 DMSLT 的定义形式. 通过样本配置方法结合局部非确定性证明 DMSLT 在 $L^p(\Omega)$, $p \in [1,\infty)$ 中的存在性条件并给出占位时公式. 此外, 根据多项式定理将相应结论推广至 MSLT 梯度的情形, 证明其存在性、联合 Hölder 连续性和关于空间变量 x 的 Hölder 连续性等. 第三节通过分数布朗运动 DMSLT 的混沌展式证明其在 Meyer-Watanabe 意义下满足平滑性. 由证明过程可知, 其它自相似高斯过程 DMSLT 的平滑性类似可得.

4.2 DMSLT 的研究

根据占位时公式, 对于固定的 $\varepsilon>0$ 和任意 y_l, z_l, 有

$$\begin{aligned}&L^H_{k,\varepsilon}(x_2,\cdots,x_{l-1},y_l,x_{l+1},\cdots,x_k,t)-L^H_{k,\varepsilon}(x_2,\cdots,x_{l-1},z_l,x_{l+1},\cdots,x_k,t)\\&=\int_{y_l}^{z_l}\frac{\partial}{\partial x_l}L^H_{k,\varepsilon}(x,t)\mathrm{d}x_l,\end{aligned}\tag{4.2.1}$$

其中 $L^H_{k,\varepsilon}(x,t)$ 由式 (3.2.1) 给出, $\frac{\partial}{\partial x_l}L^H_{k,\varepsilon}(x,t)$ 表示 $L^H_{k,\varepsilon}(x_2,\cdots,x_k,t)$ 的导数形式. 基于式 (4.2.1), 自相似高斯过程 MSLT (3.2.1) 关于空间变量的导数可定义为

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x_l}L^H_{k,\varepsilon}(x_2,\cdots,x_k,t)\\&=-\int_{\Delta_k}\prod_{j=2}^{l-1}p_\varepsilon(X^H_{t_j}-X^H_{t_{j-1}}-x_j)p'_\varepsilon(X^H_{t_l}-X^H_{t_{l-1}}-x_l)\prod_{j=l+1}^{k}p_\varepsilon(X^H_{t_j}-X^H_{t_{j-1}}-x_j)\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_k,\end{aligned}\tag{4.2.2}$$

其中 $k\geq 2$, $2\leq l\leq k$ 且 $\Delta_k=\{(t_1,t_2,\ldots,t_k)\in[0,t]^k:0<t_1\leq\ldots\leq t_k\leq t\}$.

对于过程

$$\frac{\partial}{\partial x_l}L^H_k(x,t):=\frac{\partial}{\partial x_l}L^H_k(x_2,\cdots,x_k,t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial}{\partial x_l}L^H_{k,\varepsilon}(x_2,\cdots,x_k,t),\tag{4.2.3}$$

若上述极限在 $L^p(\Omega)$ 中存在, 则称为自相似高斯过程的 DMSLT.

4.2.1 L^p 存在性的证明

下面给出的引理将用于定理 4.2.1 的证明中. 特别地, 在后续证明中, 若没有特别指出, 字母 C, 无论是否有下标都表示一个通用的正的有限常数且在不同行中表示不同的常数.

引理 4.2.1 设 $k\geq 2$, 对于 $x'=(x'_2,\cdots,x'_k)$ 和 $x=(x_2,\cdots,x_k)$, 当 $0<H<\frac{k-1}{k}$ 时, 有

$$\left|\mathbb{E}\left(\frac{\partial}{\partial x_l}L^H_{k,\varepsilon'}(x',t)-\frac{\partial}{\partial x_l}L^H_{k,\varepsilon}(x,t)\right)^n\right|\leq C(n,\delta)|(\varepsilon',x')-(\varepsilon,x)|^{n(k-1)\delta},\tag{4.2.4}$$

其中 ε', $\varepsilon\in(0,1]$, $\delta\in(0,1]$.

此外, 由 (4.2.4) 和 Kolmogorov 引理的多参数版本可得, 对任意 $\delta'<\delta$ 和 $M<\infty$, 有

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_l}L^H_{k,\varepsilon'}(x',t)-\frac{\partial}{\partial x_l}L^H_{k,\varepsilon}(x,t)\right|\leq C(n,\delta)|(\varepsilon',x')-(\varepsilon,x)|^{\delta'}, \tag{4.2.5}$$

其中 $\varepsilon',\varepsilon\in(0,1]$ 且 $|x'|$, $|x|\leq M$, x', $x\in\mathbb{R}^{k-1}$.

因为对于 $\varepsilon>0$, $L^H_{k,\varepsilon}(x,t)$ 关于 x 连续, 则在 (4.2.5) 中取 $x=x'$ 可得到下面的极限存在:

$$\frac{\partial}{\partial x_l}L^H_k(x,t)=\frac{\partial}{\partial x_l}\lim_{\varepsilon\to0}L^H_{k,\varepsilon}(x,t).$$

又由于 (4.2.5) 的极限是连续的, 则有

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_l}L^H_{k,\varepsilon}(x',t)-\frac{\partial}{\partial x_l}L^H_{k,\varepsilon}(x,t)\right|\leq C|x-x'|^{\delta'}.$$

接下来给出引理 4.2.1 的详细证明过程.

证明. 因为

$$\begin{aligned}&\left|\mathbb{E}\left(\frac{\partial}{\partial x_l}L^H_{k,\varepsilon'}(x',t)-\frac{\partial}{\partial x_l}L^H_{k,\varepsilon}(x,t)\right)^n\right|\\&\leq C\left(\left|\mathbb{E}\left(\frac{\partial}{\partial x_l}L^H_{k,\varepsilon'}(x',t)-\frac{\partial}{\partial x_l}L^H_{k,\varepsilon}(x',t)\right)^n\right|+\left|\mathbb{E}\left(\frac{\partial}{\partial x_l}L^H_{k,\varepsilon}(x',t)-\frac{\partial}{\partial x_l}L^H_{k,\varepsilon}(x,t)\right)^n\right|\right).\end{aligned} \tag{4.2.6}$$

根据 Fourier 逆变换, 有

$$p'_\varepsilon(x)=\frac{\iota}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\xi e^{\iota\xi x}\hat{p}(\varepsilon\xi)\mathrm{d}\xi \tag{4.2.7}$$

且 $\hat{p}(\varepsilon\xi)$ 表示 $p_\varepsilon(x)$ 的 Fourier 逆变换.

$$\frac{\partial}{\partial x_l}L^H_{k,\varepsilon}(x,t)=-\frac{\iota}{(2\pi)^{(k-1)}}\int_{\Delta_k}\int_{\mathbb{R}^{(k-1)}}\xi_l\prod_{j=2}^k e^{\iota\xi_j(X^H_{t_j}-X^H_{t_{j-1}}-x_j)}\hat{p}(\varepsilon\xi_j)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\boldsymbol{t}, \tag{4.2.8}$$

其中$\mathrm{d}\xi=\mathrm{d}\xi_2\cdots\mathrm{d}\xi_k$, $\mathrm{d}\boldsymbol{t}=\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_k$.

可将 (4.2.6) 分为两部分来证明, 首先给出

$$\left|\mathbb{E}\left(\frac{\partial}{\partial x_l}L^H_{k,\varepsilon'}(x',t)-\frac{\partial}{\partial x_l}L^H_{k,\varepsilon}(x',t)\right)^n\right|$$

的上界.

当 n 为奇数时, (4.2.4) 的左边为零, 则其显然成立, 所以仅需考虑 n 为偶数时的情形.

若 n 为偶数, 则可得

$$\begin{aligned}
&\left|\mathbb{E}\left(\frac{\partial}{\partial x_l}L^H_{k,\varepsilon'}(x',t)-\frac{\partial}{\partial x_l}L^H_{k,\varepsilon}(x',t)\right)^n\right|\\
&\leq\frac{1}{(2\pi)^{n(k-1)}}\int_{(\Delta_k)^n}\int_{\mathbb{R}^{n(k-1)}}\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=2}^{k}\xi_l^i\\
&\times\left|\hat{p}(\varepsilon'\xi_j^i)-\hat{p}(\varepsilon\xi_j^i)\right|\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=2}^{k}e^{\imath\xi_j^i(B^{H,i}_{t_j}-B^{H,i}_{t_{j-1}}-x'_j)}\right)\mathrm{d}\xi^i\mathrm{d}\boldsymbol{t}^i,
\end{aligned}\tag{4.2.9}$$

其中 $\mathrm{d}\xi^i=\prod\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{j=2}^{k}\mathrm{d}\xi_j^i$, $\mathrm{d}\boldsymbol{t}^i=\prod\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{j=1}^{k}\mathrm{d}t_j^i$.

因为对任意 $0<\delta\leq1$, 有

$$\left|e^{-\imath\xi x}-e^{-\imath\xi y}\right|\leq C_\delta|x-y|^\delta|\xi|^\delta,$$

其中 C_δ 为依赖 δ 的常数, 所以

$$\left|\hat{p}(\varepsilon'\xi)-\hat{p}(\varepsilon\xi)\right|\leq C|\xi|^\delta|\varepsilon'-\varepsilon|^\delta$$

且

$$\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=2}^{k}\left|\hat{p}(\varepsilon'\xi_j^i)-\hat{p}(\varepsilon\xi_j^i)\right|\leq C\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=2}^{k}|\xi_j^i|^\delta|\varepsilon'-\varepsilon|^{n(k-1)\delta}.\tag{4.2.10}$$

设

$$\Delta(\pi^1,\cdots,\pi^k)=\left\{t_j^1,\cdots,t_j^n: t_j^{\pi^j(i)}<t_j^{\pi^j(i+1)},\ i=1,\cdots,n\right\},$$

其中 $\pi^1,\cdots,\pi^k$ 表示 $\{1,\cdots,n\}$ 的重排集合且定义

$$t_j^{\pi^j(n+1)}=t_{j+1}^{\pi^{j+1}(1)}.$$

由 $\Delta(\pi^1,\cdots,\pi^k)$ 上 X^H 满足的局部非确定性可得

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n\prod_{j=2}^k e^{\iota\xi_j^i\left(B_{t_j}^{H,i}-B_{t_{j-1}}^{H,i}-x_j\right)}\right)\le e^{-c\sum\limits_{i=1}^n\sum\limits_{j=1}^k|u_j^i|^2\left|t_j^{\pi^j(i+1)}-t_j^{\pi^j(i)}\right|^{2H}}, \tag{4.2.11}$$

其中 u_j^i 为 ξ_j^i 使得 (4.2.11) 成立的恰当的线性组合, 取

$$u_j^i=\sum_{m=j}\xi_j^{\pi^j(m)}, \tag{4.2.12}$$

则有

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^n\prod_{j=2}^k|\xi_j^i|^{1+\delta}&=\prod_{i=1}^n\prod_{j=1}^k\left|u_j^{\bar\pi_j^i}-u_{j+1}^{\bar\pi_j^i}\right|^{1+\delta}\\&\le C\prod_{i=1}^n\prod_{j=1}^k\left(\left|u_j^{\bar\pi_j^i}\right|^{1+\delta}+\left|u_{j+1}^{\bar\pi_j^i}\right|^{1+\delta}\right)\\&\le C\prod_{i=1}^n\prod_{j=1}^k\left|u_j^{\bar\pi_j^i}\right|^{(1+\delta)\nu_j^i},\end{aligned} \tag{4.2.13}$$

其中 $\bar\pi_j^i=(\pi_j^i)^{-1}$, $u_{k+1}^i=u_1^i=0$ 且 $\nu_j^i\in\{0,1,2\}$.

根据 (4.2.10)、(4.2.11) 和 (4.2.13), 可以得到 (4.2.9) 右边积分的界为

$$\begin{aligned}&\left|\mathbb{E}\left(\frac{\partial}{\partial x_l}L_{k,\varepsilon'}^H(x',t)-\frac{\partial}{\partial x_l}L_{k,\varepsilon}^H(x',t)\right)^n\right|\\&\le C|\varepsilon'-\varepsilon|^{n\delta(k-1)}\\&\times\int_{\Delta(\pi^1,\cdots,\pi^k)}\int_{\mathbb{R}^{nk}}\prod_{i=1}^n\prod_{j\neq l}\left|\xi_j^i\right|^{\delta}\left|\xi_l^i\right|^{1+\delta}e^{-c\sum\limits_{i=1}^n\sum\limits_{j=1}^k|u_j^i|^2\left|t_j^{\pi^j(i+1)}-t_j^{\pi^j(i)}\right|^{2H}}\mathrm{d}\xi^i\mathrm{d}\boldsymbol{t}^i\\&\le C|\varepsilon'-\varepsilon|^{n\delta(k-1)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\times \int_{\Delta(\pi^1,\cdots,\pi^k)} \int_{\mathbb{R}^{nk}} \prod_{i=1}^{n} \prod_{j\neq l} \left|u_j^i\right|^{\delta \nu_j^i} \left|u_l^i\right|^{(1+\delta)\nu_j^i} e^{-c\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}|u_j^i|^2\left|t_j^{\pi^j(i+1)}-t_j^{\pi^j(i)}\right|^{2H}} \mathrm{d}u\mathrm{d}\boldsymbol{t}^i \\
&= C|\varepsilon'-\varepsilon|^{n\delta(k-1)} \int_{\Delta(\pi^1,\cdots,\pi^k)} \int_{\mathbb{R}^{nk}} \prod_{i=1}^{n} \left|u_l^i\right|^{(1+\delta)\nu_l^i} e^{-c|u_l^i|^2\left|t_l^{\pi^l(i+1)}-t_l^{\pi^l(i)}\right|^{2H}} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{d}u_l^i \\
&\times \prod_{i=1}^{n} \prod_{j\neq l} \left|u_j^i\right|^{\delta \nu_j^i} e^{-c|u_j^i|^2\left|t_j^{\pi^j(i+1)}-t_j^{\pi^j(i)}\right|^{2H}} \prod_{i=1}^{n} \prod_{j\neq l} \mathrm{d}u_j^l \mathrm{d}\boldsymbol{t}^i, \qquad (4.2.14)
\end{aligned}
$$

其中 $\mathrm{d}u = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{k}\mathrm{d}u_j^i$.

又因为

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \left|u_j^i\right|^{\delta \nu_l^j} exp\left\{-c|u_j^i|^2 \left|t_j^{\pi^j(i+1)} - t_j^{\pi^l(i)}\right|^{2H}\right\} \mathrm{d}u_j^i \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \left|u_j^i\right|^{2\delta} exp\left\{-c|u_j^i|^2 \left|t_j^{\pi^j(i+1)} - t_j^{\pi^j(i)}\right|^{2H}\right\} \mathrm{d}u_j^i \\
&\leq C\left|t_j^{\pi^j(i+1)} - t_j^{\pi^j(i)}\right|^{-H-2H\delta}, \ \nu_j^i \in \{0,1,2\}, \qquad (4.2.15)
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{nk}} \prod_{i=1}^{n} \left|u_l^i\right|^{(1+\delta)\nu_l^i} e^{-c|u_l^i|^2\left|t_l^{\pi^l(i+1)}-t_l^{\pi^l(i)}\right|^{2H}} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{d}u_l^i \\
&\cdot \prod_{i=1}^{n} \prod_{j\neq l} \left|u_j^i\right|^{\delta \nu_j^i} e^{-c|u_j^i|^2\left|t_j^{\pi^j(i+1)}-t_j^{\pi^j(i)}\right|^{2H}} \prod_{i=1}^{n} \prod_{j\neq l} \mathrm{d}u_j^l \\
&\leq C\prod_{i=1}^{n} \left|t_l^{\pi^l(i+1)} - t_l^{\pi^l(i)}\right|^{-H(3+2\delta)} \prod_{j\neq l} \left|t_j^{\pi^j(i+1)} - t_j^{\pi^j(i)}\right|^{-H(1+2\delta)}. \qquad (4.2.16)
\end{aligned}
$$

结合广义 Hölder 不等式可得

$$
\begin{aligned}
&\left|\mathbb{E}\left(\frac{\partial}{\partial x_l} L_{k,\varepsilon'}^H(x,t) - \frac{\partial}{\partial x_l} L_{k,\varepsilon}^H(x,t)\right)^n\right| \\
&\leq C|\varepsilon'-\varepsilon|^{n\delta(k-1)} \\
&\times \int_{\Delta(\pi^1,\cdots,\pi^k)} \int_{\mathbb{R}^{nk}} \prod_{i=1}^{n} \prod_{j\neq l} \left|\xi_j^i\right|^{\delta} \left|\xi_l^i\right|^{1+\delta} e^{-c\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}|u_j^i|^2\left|t_j^{\pi^j(i+1)}-t_j^{\pi^j(i)}\right|^{2H}} \mathrm{d}\xi^i \mathrm{d}\boldsymbol{t}^i \\
&\leq C|\varepsilon'-\varepsilon|^{n\delta(k-1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\times \int_{\Delta(\pi^1,\cdots,\pi^k)} \prod_{i=1}^{n} \left| t_l^{\pi^l(i+1)} - t_l^{\pi^l(i)} \right|^{-H(3+2\delta)} \prod_{j\neq l} \left| t_j^{\pi^j(i+1)} - t_j^{\pi^j(i)} \right|^{-H(1+2\delta)} \mathrm{d}\boldsymbol{t}^i \\
&\leq C|\varepsilon' - \varepsilon|^{n\delta(k-1)} \prod_{i=1}^{n} \int_{\Delta(\pi^l)} \left| t_l^{\pi^l(i+1)} - t_l^{\pi^l(i)} \right|^{-2H} \mathrm{d}t_l^i \\
&\times \int_{\Delta(\pi^1,\cdots,\pi^k)} \prod_{j=1}^{k} \left| t_j^{\pi^j(i+1)} - t_j^{\pi^j(i)} \right|^{-H(1+2\delta)} \mathrm{d}\boldsymbol{t}^i \\
&\leq C|\varepsilon' - \varepsilon|^{n\delta(k-1)} \prod_{i=1}^{n} \int_{\Delta(\pi^l)} \left| t_l^{\pi^l(i+1)} - t_l^{\pi^l(i)} \right|^{-2H} \mathrm{d}t_l^i \\
&\times \prod_{r=1}^{k} \left(\int_{\Delta(\pi^1,\cdots,\pi^k)} \prod_{\neq r} \left(\left| t_j^{\pi^j(i+1)} - t_j^{\pi^j(i)} \right|^{-H(1+2\delta)} \right)^{\frac{k}{k-1}} \mathrm{d}\boldsymbol{t}^i \right)^{\frac{1}{k}},
\end{aligned}
\tag{4.2.17}
$$

取 $\frac{kH(1+2\delta)}{k-1} < 1$, 即

$$
H < \frac{k-1}{k(1+2\delta)}
$$

时, (4.2.17) 有限. 又因为 $\delta \in (0,1]$, 则有

$$
H < \frac{k-1}{k}.
$$

对于 (4.2.6) 中的第二个期望部分, 若 $H < \frac{k-1}{k}$, 则由

$$
\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=2}^{k} \left| e^{-\iota\xi_j^i x_j} - e^{-\iota\xi_j^i x'_j} \right| \leq C \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=2}^{k} \left|\xi_j^i\right|^{\delta} |x_j - x'_j|^{\delta}, \ \ \delta \in (0,1] \tag{4.2.18}
$$

替换 (4.2.10), 有界性同理可得.

综上引理 4.2.1 的结论得证. □

接下来给出由 (4.2.2) 定义的 DMSLT 的存在性条件和其占位时公式.

定理 4.2.1 设 $k \geq 2$, 对于 $x = (x_2, \cdots, x_k)$ 和 $p \in [1,\infty)$, 若 $0 < H < \frac{k-1}{k}$, 由 (4.2.2) 定义的随机变量 $\frac{\partial}{\partial x_l} L_{k,\varepsilon}^H(x,t)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中存在, 即 (4.2.3) 成立. 进一步, 对所有 $\mathbb{R}^{(k-1)}$ 上的有界 Borel 可测函数 $\Phi(x)$, $\frac{\partial}{\partial x_l} L_k^H(x,t)$ 的占位时公式

$$
-\int \Phi(x_2,\cdots,x_k) \frac{\partial}{\partial x_l} L_k^H(x_2,\cdots,x_k,t) \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_k
$$

$$= \int \cdots \int_{\Delta_k} \frac{\partial}{\partial x_l} \Phi(B^H_{t_k} - B^H_{t_{k-1}}, \cdots, B^H_{t_2} - B^H_{t_1}) \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_k \tag{4.2.19}$$

成立, 其中 $l \in \{2, \cdots, k\}$.

证明. 设 n 为偶数, 根据式 (4.2.8) 可得

$$\begin{aligned}
&\left| \mathbb{E}\left(\frac{\partial}{\partial x_l} L^H_{k,\varepsilon}(x,t) \right)^n \right| \\
&\leq C \int_{(\Delta_k)^n} \int_{\mathbb{R}^{n(k-1)}} \prod_{i=1}^n \prod_{j=2}^k \xi^i_l \left| \hat{p}(\varepsilon \xi^i_j) \right| \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n \prod_{j=2}^k e^{\iota \xi^i_j (X^{H,i}_{t_j} - X^{H,i}_{t_{j-1}} - x_j)} \right) \mathrm{d}\xi^i \mathrm{d}\boldsymbol{t}^i \\
&\leq C \int_{\Delta(\pi^1, \cdots, \pi^k)} \int_{\mathbb{R}^{nk}} \prod_{i=1}^n |u^i_l|^2 \exp\left\{ -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k |u^i_j|^2 \left| t_j^{\pi_j(i+1)} - t_j^{\pi_j(i)} \right|^{2H} \right\} \mathrm{d}u \mathrm{d}\boldsymbol{t}^i \\
&\leq C \int_{\Delta(\pi^1, \cdots, \pi^k)} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n |u^i_l|^2 \exp\left\{ -\sum_{i=1}^n |u^i_l|^2 \left| t_l^{\pi_l(i+1)} - t_l^{\pi_l(i)} \right|^{2H} \right\} \mathrm{d}u^i_l \\
&\times \int_{\mathbb{R}^{n(k-1)}} \exp\left\{ -\sum_{i=1}^n \sum_{j \neq l} |u^i_j|^2 \left| t_j^{\pi_j(i+1)} - t_j^{\pi_j(i)} \right|^{2H} \right\} \mathrm{d}u^i_j \mathrm{d}\boldsymbol{t}^i \\
&\leq C \int_{\Delta(\pi^1, \cdots, \pi^k)} \prod_{i=1}^n \left| t_l^{\pi_l(i+1)} - t_l^{\pi_l(i)} \right|^{-3H} \prod_{i=1}^n \prod_{j \neq l} \left| t_j^{\pi_j(i+1)} - t_j^{\pi_j(i)} \right|^{-H} \mathrm{d}\boldsymbol{t}^i,
\end{aligned} \tag{4.2.20}$$

其中 C 在不同行表示不同的正常数且 (4.2.20) 中用到不等式

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-C|u|^2 r^{2H}} \mathrm{d}u \leq C r^{-H},$$

当 $H < \frac{k-1}{k}$ 时, 式 (4.2.20) 的右边有限.

最后, 根据引理 4.2.1, 可证得 $\frac{\partial}{\partial x_l} L^H_{k,\varepsilon}(x,t)$ 为一个 Cauchy 列. 因此, 对所有 $p \in [1, \infty)$, 若 $H < \frac{k-1}{k}$, 则 $\varepsilon \to 0$ 时, $\frac{\partial}{\partial x_l} L^H_k(x,t)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中存在.

接下来证明占位时公式 (4.2.19).

因为

$$\begin{aligned}
&\int \Phi(x_2, \cdots, x_k) \frac{\partial}{\partial x_l} L^H_{k,\varepsilon}(x_2, \cdots, x_k, t) \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_k \\
&= -\int \cdots \int_{\Delta_k} \Phi * P_\varepsilon(X^H_{t_2} - X^H_{t_1}, \cdots, X^H_{t_k} - X^H_{t_{k-1}}) \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_k,
\end{aligned} \tag{4.2.21}$$

其中

$$P_\varepsilon(x_2,\cdots,x_k)=\prod_{j\neq l}p_\varepsilon(x_j)p'_\varepsilon(x_l)$$

且 $*$ 表示卷积, 所以只要 Φ 为有界连续函数, 在式 (4.2.21) 中取 $\varepsilon\to 0$ 时, (4.2.19) 成立. □

注 4.2.1 根据引理 4.2.1, 可得 $\frac{\partial}{\partial x_l}L_k^H(x,t)$ 关于变量 x 是 Hölder 连续的. 此外, 当 $k=2$ 时, 本文得到的存在性条件 $H<\frac{1}{2}$ 与 [69] 中的存在性条件一致.

4.2.2 梯度性质的证明

$\nabla L_{k,\varepsilon}^H(x,t)$ 表示 $L_{k,\varepsilon}^H(x,t)$ 关于 $x=(x_2,\cdots,x_k)$ 的梯度. 接下来主要目的是证明过程 $\{\nabla L_{k,\varepsilon}^H(x,t);\ k\geq 2,\ x=(x_2,\cdots,x_k)\in\mathbb{R}^{k-1}\}$ 的存在性和 Hölder 连续性.

定理 4.2.2 对于 $k\geq 2$, $x=(x_2,\cdots,x_k)$ 和 $p\in[1,\infty)$, 若 $0<H<\frac{k-1}{k}$, 则 $\{\nabla L_k^H(x,t),t=(t_1,\cdots,t_k),\ x=(x_2,\cdots,x_k)\}$ 在 $L^p(\Omega)$ 中存在. 此外, $\nabla L_k^H(x,t)$ 关于变量 (x,t) 满足联合 Hölder 连续性且关于空间变量 x 也满足 Hölder 连续性.

证明. 首先证明梯度 $\nabla L_k^H(x,t)$ 在 $L^p(\Omega)$, $p\in[1,\infty)$ 中的存在性. 根据 Kolmogorov 连续准则和 (4.2.3), 只需证明

$$\mathbb{E}\left|\nabla L_{k,\varepsilon'}^H(x',t')-\nabla L_{k,\varepsilon}^H(x,t)\right|^{2n}\leq C|(\varepsilon',x',t')-(\varepsilon,x,t)|^{2n(k-1)\lambda},\tag{4.2.22}$$

其中 $\lambda\in(0,1]$ 且 $|\cdot|$ 表示 Euclidean 距离.

接下来为证明 (4.2.22) 成立将分为三部分进行.

(1) 估计

$$\mathbb{E}\left|\nabla L_{k,\varepsilon'}^H(x,t)-\nabla L_{k,\varepsilon}^H(x,t)\right|^{2n}\leq C|\varepsilon'-\varepsilon|^{2n(k-1)\lambda},\ n=1,2,\cdots\tag{4.2.23}$$

因为

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_l}L^H_{k,\varepsilon}(x_2,\cdots,x_k,t)\\
&=-\int_{\Delta_k}\prod_{j=2}^{l-1}p_\varepsilon(X^H_{t_j}-X^H_{t_{j-1}}-x_j)p'_\varepsilon(X^H_{t_l}-X^H_{t_{l-1}}-x_l)\prod_{j=l+1}^{k}p_\varepsilon(X^H_{t_j}-X^H_{t_{j-1}}-x_j)\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_k\\
&=-\frac{1}{(2\pi)^{k-1}}\int_{\Delta_k}\int_{\mathbb{R}^{k-1}}\xi_l\prod_{j=2}^{k}e^{\iota\xi_j\left(X^H_{t_j}-X^H_{t_{j-1}}-x_j\right)}e^{-\frac{\varepsilon|\xi_j|^2}{2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\boldsymbol{t},
\end{aligned}
\tag{4.2.24}
$$

其中 $\mathrm{d}\xi=\prod\limits_{j=2}^{k}\mathrm{d}\xi_j$, $\mathrm{d}\boldsymbol{t}=\prod\limits_{j=1}^{k}\mathrm{d}t_j$ 且对于 $n\geq 1$, 根据多项式定理, 有

$$
\left(\sum_{k=1}^{n}x_ky_k\right)^m=\sum_{\substack{k_1,\cdots,k_n=0\\k_1+\cdots+k_n=m}}^{m}\frac{m!}{k_1!\cdots k_n!}\prod_{1\leq r\leq n}(x_ry_r)^{k_r}. \tag{4.2.25}
$$

所以由 (4.2.2) 和 (4.2.25), 可得

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left|\nabla L^H_{k,\varepsilon'}(x,t)-\nabla L^H_{k,\varepsilon}(x,t)\right|^{2n}\\
&=\mathbb{E}\left|\sum_{l=2}^{k}\left(\partial_l L^H_{k,\varepsilon'}(x,t)-\partial_l L^H_{k,\varepsilon}(x,t)\right)^2\right|^n\\
&=\sum_{\substack{q_2,\cdots,q_k=0\\q_2+\cdots+q_k=n}}^{n}\frac{n!}{q_2!\cdots q_k!}\mathbb{E}\left(\prod_{l=2}^{k}\left|\partial_l L^H_{k,\varepsilon'}(x,t)-\partial_l L^H_{k,\varepsilon}(x,t)\right|^{2q_l}\right)\\
&\leq C\sum_{\substack{q_2,\cdots,q_k=0\\q_2+\cdots+q_k=n}}^{n}\frac{n!}{q_2!\cdots q_k!}\int_{(\Delta_k)^{2n}}\int_{\mathbb{R}^{2n(k-1)}}\prod_{l=2}^{k}\prod_{j=2}^{k}\prod_{i=1}^{2q_l}\xi_l^{i,l}\left|e^{-\frac{\varepsilon'|\xi_j^{i,l}|^2}{2}}-e^{-\frac{\varepsilon|\xi_j^{i,l}|^2}{2}}\right|\\
&\times\mathbb{E}\left(\prod_{l=2}^{k}\prod_{j=2}^{k}\prod_{i=1}^{2q_l}e^{\iota\xi_j^{i,l}(X^{H,i,l}_{t_j}-X^{H,i,l}_{t_{j-1}}-x_j)}\right)\mathrm{d}\xi^{i,l}\mathrm{d}\boldsymbol{t}^{i,l}\\
&\leq C|\varepsilon'-\varepsilon|^{2n(k-1)\lambda}\int_{(\Delta_k)^{2n}}\int_{\mathbb{R}^{2n(k-1)}}\prod_{j=2}^{k}\prod_{i=1}^{2n}\xi_l^i|\xi_j^i|^{2\lambda}\mathbb{E}\left(\prod_{j=2}^{k}\prod_{i=1}^{2n}e^{\iota\xi_j^i(X^{H,i}_{t_j}-X^{H,i}_{t_{j-1}})}\right)\mathrm{d}\xi^i\mathrm{d}\boldsymbol{t}^i,
\end{aligned}
\tag{4.2.26}
$$

其中

$$
\mathrm{d}\xi^{i,l}=\prod_{l=2}^{k}\prod_{j=2}^{k}\prod_{i=1}^{2q_l}\mathrm{d}\xi_j^{i,l},\ \mathrm{d}\boldsymbol{t}^{i,l}=\prod_{l=2}^{k}\prod_{j=2}^{k}\prod_{i=1}^{2q_l}\mathrm{d}t_j^{i,l},
$$

$$\mathrm{d}\xi^i = \prod_{j=2}^{k}\prod_{i=1}^{2n}\mathrm{d}\xi_j^i,\ \mathrm{d}\boldsymbol{t}^i = \prod_{j=2}^{k}\prod_{i=1}^{2n}\mathrm{d}t_j^i,$$

$$\xi_j^i = \left(\xi_j^{i,2},\cdots,\xi_j^{i,k}\right),\ j=2,\cdots,k,\ i=1,\cdots,2n,$$

$$\partial_l L_{k,\varepsilon}^H(x,t) := \frac{\partial}{\partial x_l}L_{k,\varepsilon}^H(x,t),\ \ l\in\{2,\cdots,k\}$$

且用到不等式

$$\left|e^{-\varepsilon' x}-e^{-\varepsilon x}\right| \le Cx^{\lambda}|\varepsilon'-\varepsilon|^{\lambda},\ \lambda\in(0,1].$$

为证明 (4.2.26) 有限, 需考虑

$$\Lambda := \int_{(\Delta_k)^{2n}}\int_{\mathbb{R}^{2n(k-1)}}\left|\mathbb{E}\left(\prod_{j=2}^{k}\prod_{i=1}^{2n}\left(e^{\iota\xi_j^i(X_{t_j}^{H,i}-X_{t_{j-1}}^{H,i})}-\mathbb{E}e^{\iota\xi_j^i(X_{t_j}^{H,i}-X_{t_{j-1}}^{H,i})}\right)\right)\right| \times\prod_{j=2}^{k}\prod_{i=1}^{2n}\xi_l^i|\xi_j^i|^{2\lambda}\mathrm{d}\xi^i\mathrm{d}\boldsymbol{t}^i \tag{4.2.27}$$

有限.

(4.2.27) 的证明可转化为证明

$$\Lambda_1 := \int_{(\Delta_k)^{2n}}\int_{\mathbb{R}^{2n(k-1)}}\left|\prod_{j=2}^{k}\prod_{i=1}^{2n}\mathbb{E}\left(e^{\iota\xi_j^i(X_{t_j}^{H,i}-X_{t_{j-1}}^{H,i})}\right)\right|\prod_{j=2}^{k}\prod_{i=1}^{2n}\xi_l^i|\xi_j^i|^{2\lambda}\mathrm{d}\xi^i\mathrm{d}\boldsymbol{t}^i<\infty \tag{4.2.28}$$

且

$$\Lambda_2 := \int_{(\Delta_k)^{2n}}\int_{\mathbb{R}^{2n(k-1)}}\left|\mathbb{E}\left(\prod_{j=2}^{k}\prod_{i=1}^{2n}\left(e^{\iota\xi_j^i(X_{t_j}^{H,i}-X_{t_{j-1}}^{H,i})}\right)\right)\right|\prod_{j=2}^{k}\prod_{i=1}^{2n}\xi_l^i|\xi_j^i|^{2\lambda}\mathrm{d}\xi^i\mathrm{d}\boldsymbol{t}^i<\infty. \tag{4.2.29}$$

对于 Λ_1, 由 X^H 的局部非确定性可得

$$\Lambda_1 = \int_{(\Delta_k)^{2n}}\int_{\mathbb{R}^{2n(k-1)}}\left|\prod_{j=2}^{k}\prod_{i=1}^{2n}\mathbb{E}\left(e^{\iota\xi_j^i(X_{t_j}^{H,i}-X_{t_{j-1}}^{H,i})}\right)\right|\prod_{j=2}^{k}\prod_{i=1}^{2n}\xi_l^i|\xi_j^i|^{2\lambda}\mathrm{d}\xi^i\mathrm{d}\boldsymbol{t}^i$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left(\int_{\Delta_k}\int_{\mathbb{R}^{(k-1)}}\prod_{j=2}^{k}e^{-\frac{1}{2}|\xi_j|^2|t_j-t_{j-1}|^{2H}}\prod_{j=2}^{k}\xi_l|\xi_j|^{2\lambda}\mathrm{d}\xi_j\mathrm{d}t_j\right)^{2n}\\
&=\left(\int_{\Delta_k}\int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{1}{2}|\xi_l|^2|t_l-t_{l-1}|^{2H}}|\xi_l|^{2\lambda+1}\mathrm{d}\xi_l\int_{\mathbb{R}^{(k-2)}}\prod_{j\neq l}|\xi_j|^{2\lambda}e^{-\frac{1}{2}|\xi_j|^2|t_j-t_{j-1}|^{2H}}\prod_{j\neq l}\mathrm{d}\xi_j\mathrm{d}t_j\right)^{2n}\\
&\leq C\left(\int_{\Delta_k}|t_l-t_{l-1}|^{-H-H(2\lambda+1)}\prod_{j\neq l}|t_j-t_{j-1}|^{-H-2H\lambda}\prod_{j\neq l}\mathrm{d}t_j\right)^{2n}\\
&\leq C^{2n}\left(\int_{[0,t]}|t_l-t_{l-1}|^{-H}\mathrm{d}t_l\frac{[\Gamma(1-(H+2H\lambda))]^k}{\Gamma(1+k(1-(H+2H\lambda)))}t^{k(1-(H+2H\lambda))}\right)^{2n}, \qquad (4.2.30)
\end{aligned}
$$

当 $1+k(1-(H+2H\lambda))>0$, 即 $H<\frac{1+k}{k(1+2\lambda)}$ 时, (4.2.30) 有限.

接下来证明 (4.2.29) 有限.

因为 (4.2.29) 中的期望值依赖于 t_j^i, $j=2,\cdots,k$, $i=1,\cdots,2n$ 的顺序, 同引理 4.2.1 中 t_j^i 的重排方法, 记

$$
\Delta\left(\pi^1,\cdots,\pi^k\right)=\{t_j^1,\cdots,t_j^{2n}:t_j^{\pi^j(i)}<t_j^{\pi^j(i+1)},\ i=1,\cdots,2n\},
$$

其中 $\pi^1,\cdots,\pi^k$ 表示 $\{1,\cdots,2n\}$ 的重排且规定

$$
t_j^{\pi^j(2n+1)}=t_{j+1}^{\pi^{j+1}(1)},\ j=1,\cdots,k,
$$

则有

$$
\prod_{j=2}^{k}\prod_{i=1}^{2n}e^{\iota\xi_j^i\left(X_{t_j}^{H,i}-X_{t_{j-1}}^{H,i}\right)}=\prod_{j=1}^{k}\prod_{i=1}^{2n}e^{\iota u_j^i\left(X^H_{t_j^{\pi^j(i+1)}}-X^H_{t_j^{\pi^j(i)}}\right)}, \qquad (4.2.31)
$$

其中 u_j^i 为使得 (4.2.31) 成立的 ξ_j^i 的适当线性组合. 特别地, 取

$$
u_j^i=\sum_{l\leq i}\xi_j^{\pi^j(l)}+\sum_{l>i}\xi_{j-1}^{\pi^j(l)} \qquad (4.2.32)
$$

且记 $\xi_0^{\pi^0(l)}=0$, 其中 $i=1,\cdots 2n$.

由 (4.2.32) 可得

$$u_j^i - u_j^{i-1} = \xi_j^{\pi^j(i)} - \xi_{j-1}^{\pi^j(i-1)}, \tag{4.2.33}$$

所以对任意 $r \in \{1, \cdots, k\}$, 有

$$|\xi^i| \leq C\sum_{j\neq r}\left|\xi_j^i - \xi_{j-1}^i\right| \leq C\prod_{j\neq r}\left(1+|\xi_j^i - \xi_{j-1}^i|\right) = C\prod_{j\neq r}\left(1+\left|u_j^{\bar{\pi}^j(i)} - u_j^{\bar{\pi}^j(i)-1}\right|\right), \tag{4.2.34}$$

其中 $\bar{\pi}^j(i) = (\pi^j)^{-1}(i)$.

由 (4.2.31)-(4.2.33) 及广义 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}
\Lambda_2 &= \int_{(\Delta_k)^{2n}}\int_{\mathbb{R}^{2n(k-1)}}\left|\mathbb{E}\left(\prod_{j=2}^{k}\prod_{i=1}^{2n}\left(e^{\iota\xi_j^i(X_{t_j}^{H,i}-X_{t_{j-1}}^{H,i})}\right)\right)\right|\prod_{j=2}^{k}\prod_{i=1}^{2n}\xi_l^i|\xi_j^i|^{2\lambda}\mathrm{d}\xi^i\mathrm{d}\boldsymbol{t}^i\\
&= \int_{(\Delta_k)^{2n}}\int_{\mathbb{R}^{2n(k-1)}}\left|\mathbb{E}\left(\left(e^{\sum_{j=2}^{k}\sum_{i=1}^{2n}\iota\xi_j^i(X_{t_j}^{H,i}-X_{t_{j-1}}^{H,i})}\right)\right)\right|\prod_{j=2}^{k}\prod_{i=1}^{2n}\xi_l^i|\xi_j^i|^{2\lambda}\mathrm{d}\xi^i\mathrm{d}\boldsymbol{t}^i\\
&\leq \sum_{\pi^1,\cdots,\pi^k}\int_{\Delta(\pi^1,\cdots,\pi^k)}\int_{\mathbb{R}^{2n(k-1)}} e^{-c\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{2n}|u_j^i|^2|t_j^{\pi^j(i+1)}-t_j^{\pi^j(i)}|^{2H}}\\
&\quad\times\prod_{j=2}^{k}\prod_{i=1}^{2n}\xi_l^i|\xi_j^i|^{2\lambda}\mathrm{d}\xi^i\mathrm{d}\boldsymbol{t}^i\\
&\leq C|J|\int_{\Delta(\pi^1,\cdots,\pi^k)}\int_{\mathbb{R}^{2nk)}} e^{-c\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{2n}|u_j^i|^2|t_j^{\pi^j(i+1)}-t_j^{\pi^j(i)}|^{2H}}\\
&\quad\times\prod_{j\neq r}\prod_{i=1}^{2n}|1+|u_l^i|^2||1+|u_j^i|^2|^{2\lambda}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}\boldsymbol{t}^i\\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^{2nk)}}\prod_{j=1}^{k}\prod_{i=1}^{2n}\frac{1}{1+|u_j|^{\frac{1}{H}}}\prod_{j\neq r}\prod_{i=1}^{2n}(1+|u_l^i|^2)|(1+|u_j^i|^2)^{2\lambda}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}\boldsymbol{t}^i\\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^{2nk)}}\prod_{r=1}^{k}\left(\prod_{j\neq r}\prod_{i=1}^{2n}\frac{1}{1+|u_j|^{\frac{1}{H}}}\right)^{\frac{1}{k-1}}\prod_{j\neq r}\prod_{i=1}^{2n}(1+|u_l^i|^2)(1+|u_j^i|^2)^{2\lambda}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}t^i\\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^{2nk)}}\prod_{r=1}^{k}\prod_{j\neq r}\prod_{i=1}^{2n}\frac{(1+|u_j^i|^2)^{\frac{2\lambda}{k}}}{\left(1+|u_j|^{\frac{1}{H}}\right)^{\frac{1}{k-1}}}\prod_{i=1}^{2n}(1+|u_l^i|^2)\mathrm{d}u^i
\end{aligned}$$

$$\leq C\prod_{r=1}^{k}\left(\int_{\mathbb{R}^{2nk)}}\prod_{j\neq r}\prod_{i=1}^{2n}\frac{(1+|u_j^i|^2)^{2\lambda}}{\left(1+|u_j|^{\frac{1}{H}}\right)^{\frac{k}{k-1}}}\prod_{i=1}^{2n}(1+|u_l^i|^2)\mathrm{d}u^i\right)^{\frac{1}{k}}, \tag{4.2.35}$$

其中 $\mathrm{d}u^i=\prod\limits_{j=1}^{k}\prod\limits_{i=1}^{2n}\mathrm{d}u_j^i$ 且用到不等式

$$\frac{C_1(H)}{1+|x|^{\frac{1}{H}}}\leq\int_0^1\int_0^1\exp\left\{-\frac{1}{2}|t-s|^{2H}x^2\right\}\mathrm{d}s\mathrm{d}t\leq\frac{C_2(H)}{1+|x|^{\frac{1}{H}}},$$

则当 $\frac{k}{H(k-1)}-4\lambda>1$, 即 $H<\frac{k-1}{k(1+4\lambda)}$ 时, (4.2.35) 有限.

(2) 接下来估计

$$\mathbb{E}\left|\nabla L_{k,\varepsilon}^H(x,t)-\nabla L_{k,\varepsilon}^H(x',t)\right|^{2n}\leq C\left|x-x'\right|^{2n(k-1)\kappa},\ n=1,2,\cdots \tag{4.2.36}$$

其中 $\varepsilon>0$, $x=(x_2,\cdots,x_k)$, $x'=(x_2',\cdots,x_k')$ 且 $\kappa\in(0,1]$.

对任意 $\varepsilon>0$, 有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left|\nabla L_{k,\varepsilon}^H(x',t)-\nabla L_{k,\varepsilon}^H(x,t))\right|^{2n}\\
&=\mathbb{E}\left|\sum_{l=2}^{k}\left(\partial_l L_{k,\varepsilon}^H(x',t)-\partial_l L_{k,\varepsilon}^H(x,t)\right)^2\right|^n\\
&=\sum_{\substack{q_2,\cdots,q_k=0\\ q_2+\cdots+q_k=n}}^{n}\frac{n!}{q_2!\cdots q_k!}\mathbb{E}\left(\prod_{l=2}^{k}\left|\partial_l L_{k,\varepsilon}^H(x',t)-\partial_l L_{k,\varepsilon}^H(x,t)\right|^{2q_l}\right)\\
&\leq C\sum_{\substack{q_2,\cdots,q_k=0\\ q_2+\cdots+q_k=n}}^{n}\frac{n!}{q_2!\cdots q_k!}\int_{(\Delta_k)^{2n}}\int_{\mathbb{R}^{2n(k-1)}}\prod_{l=2}^{k}\prod_{j=2}^{k}\prod_{i=1}^{2q_l}\xi_l^{i,l}\left|e^{\iota\xi_j^{i,l}x_j'}-e^{\varepsilon\xi_j^{i,l}x_j}\right|\\
&\times\mathbb{E}\left(\prod_{l=2}^{k}\prod_{j=2}^{k}\prod_{i=1}^{2q_l}e^{\iota\xi_j^{i,l}(X_{t_j}^{H,i,l}-X_{t_{j-1}}^{H,i,l})}e^{-\frac{\varepsilon|\xi_j^{i,l}|^2}{2}}\right)\mathrm{d}\xi^{i,l}\mathrm{d}\boldsymbol{t}^{i,l}\\
&\leq C|x'-x|^{2n(k-1)\kappa}\\
&\times\int_{(\Delta_k)^{2n}}\int_{\mathbb{R}^{2n(k-1)}}\prod_{j=2}^{k}\prod_{i=1}^{2n}\xi_l^i|\xi_j^i|^{2\kappa}\mathbb{E}\left(\prod_{j=2}^{k}\prod_{i=1}^{2n}e^{\iota\xi_j^i(X_{t_j}^{H,i}-X_{t_{j-1}}^{H,i})}\right)\mathrm{d}\xi^i\mathrm{d}\boldsymbol{t}^i,
\end{aligned} \tag{4.2.37}$$

其中用到不等式

$$\left|e^{\imath\xi x}-e^{\imath\xi y}\right|\leq C|\xi|^{\kappa}|x-y|^{\kappa},\ \ \kappa\in(0,1].$$

同步骤 (1) 的证明可知, 当 $H<\frac{k-1}{k(1+4\kappa)}$ 时, (4.2.37) 有限.

(3) 最后给出

$$\mathbb{E}\left|\nabla L_{k,\varepsilon}^{H}(x,t')-\nabla L_{k,\varepsilon}^{H}(x,t)\right|^{2n}\leq C\left|t'-t\right|^{2n(k-1)\beta},\ n=1,2,\cdots \tag{4.2.38}$$

的证明, 其中 $\varepsilon>0$, $t=(t_1,\cdots,t_k)$, $t'=(t_1',\cdots,t_k')$ 且 $\beta\in(0,1]$.

对任意 $\varepsilon>0$, 假设 $t'>t>0$, 有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left|\nabla L_{k,\varepsilon}^{H}(x,t')-\nabla L_{k,\varepsilon}^{H}(x,t))\right|^{2n}\\
&=\mathbb{E}\left|\sum_{l=2}^{k}\left(\partial_l L_{k,\varepsilon}^{H}(x,t')-\partial_l L_{k,\varepsilon}^{H}(x,t)\right)^2\right|^{n}\\
&=\sum_{\substack{q_2,\cdots,q_k=0\\ q_2+\cdots+q_k=n}}^{n}\frac{n!}{q_2!\cdots q_k!}\mathbb{E}\left(\prod_{l=2}^{k}\left|\partial_l L_{k,\varepsilon}^{H}(x,t')-\partial_l L_{k,\varepsilon}^{H}(x,t)\right|^{2q_l}\right)\\
&\leq C\sum_{\substack{q_2,\cdots,q_k=0\\ q_2+\cdots+q_k=n}}^{n}\frac{n!}{q_2!\cdots q_k!}\int_{(\Delta_k\setminus\Delta_k')^{2n}}\int_{\mathbb{R}^{2n(k-1)}}\prod_{l=2}^{k}\prod_{j=2}^{k}\prod_{i=1}^{2q_l}\xi_l^{i,l}e^{-\frac{\imath|\xi_j^{i,l}|^2}{2}}\\
&\times\mathbb{E}\left(\prod_{l=2}^{k}\prod_{j=2}^{k}\prod_{i=1}^{2q_l}e^{\imath\xi_j^{i,l}(X_{t_j}^{H,i,l}-X_{t_{j-1}}^{H,i,l}-x_j)}\right)\mathrm{d}\xi^{i,l}\mathrm{d}\boldsymbol{t}^{i,l}\\
&\leq C\int_{(\Delta_k)^{2n}}\int_{[t,t']^{2n}}\int_{\mathbb{R}^{2n(k-1)}}\prod_{l=2}^{k}\prod_{j=2}^{k}\prod_{i=1}^{2q_l}\xi_l^{i,l}\\
&\times\mathbb{E}\left(\prod_{l=2}^{k}\prod_{j=2}^{k}\prod_{i=1}^{2q_l}e^{\imath\xi_j^{i,l}(X_{t_j}^{H,i,l}-X_{t_{j-1}}^{H,i,l})}\right)\mathrm{d}\xi^{i,l}\mathrm{d}\boldsymbol{t}^{i,l}\\
&\leq\int_{\mathbb{R}^{2nk}}\int_{\Delta(\pi^1,\cdots,\pi^k)}\prod_{j=1}^{k}\prod_{i=1}^{2n}e^{-\frac{1}{2}|\xi_j^i|^2\left|t_j^{\pi^j(i)}-t_j^{\pi^j(i-1)}\right|^{2H}}\prod_{i=1}^{2n}\xi_l^i\mathbf{1}_{[t,t']}\left(t_j^{\pi^j(i)}\right)\mathrm{d}\xi^i\mathrm{d}\boldsymbol{t}^i\\
&\leq\int_{\mathbb{R}^{2nk}}\left(\int_{\Delta(\pi^1,\cdots,\pi^k)}\prod_{j=1}^{k}\prod_{i=1}^{2n}e^{-\frac{1}{2}|\xi_j^i|^2\left|t_j^{\pi^j(i+1)}-t_j^{\pi^j(i)}\right|^{2H}}\prod_{i=1}^{2n}\xi_l^i\mathrm{d}\boldsymbol{t}^i\right)^{1-\beta}\\
&\times\left(\int_{\Delta(\pi^1,\cdots,\pi^k)}\prod_{j=1}^{k}\prod_{i=1}^{2n}\mathbf{1}_{[t,t']}\left(t_j^{\pi^j(i)}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{t}^i\right)^{\beta}\mathrm{d}\xi^i
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left|t'-t\right|^{2nk\beta}\int_{\mathbb{R}^{2nk}}\left(\int_{\Delta(\pi^1,\cdots,\pi^k)}\prod_{i=1}^{2n}\prod_{i=1}^{2n}\xi_l^i e^{-\frac{1}{2}|\xi_l^i|^2\left|t_l^{\pi^l(i)}-t_l^{\pi^l(i-1)}\right|^{2H}}\right.\\
&\left.\times\prod_{j\neq l}\prod_{i=1}^{2n}e^{-\frac{1}{2}|\xi_j^i|^2\left|t_j^{\pi^j(i)}-t_j^{\pi^j(i-1)}\right|^{2H}}\mathrm{d}\boldsymbol{t}^i\right)^{1-\beta}\mathrm{d}\xi^i\\
&\leq \left|t'-t\right|^{2nk\beta}\\
&\times\int_{\Delta(\pi^1,\cdots,\pi^k)}\left(\prod_{i=1}^{2n}\left|t_l^{\pi^l(i+1)}-t_l^{\pi^l(i)}\right|^{2H}\prod_{j\neq l}\frac{1}{1+\left|t_j^{\pi^j(i+1)}-t_j^{\pi^j(i)}\right|^{\frac{1}{H}}}\right)^{1-\beta}\mathrm{d}\boldsymbol{t}^i\\
&\leq \left|t'-t\right|^{2nk\beta}\left(\int_{\Delta(\pi^1,\cdots,\pi^k)}\prod_{i=1}^{2n}\left|t_l^{\pi^l(i+1)}-t_l^{\pi^l(i)}\right|^{2H}\mathrm{d}\prod_{i=1}^{2n}t_l^i\right)^{1-\beta}\\
&\times\left(\int_{\Delta(\pi^1,\cdots,\pi^k)}\prod_{i=1}^{2n}\prod_{j\neq l}\frac{1}{1+\left|t_j^{\pi^j(i+1)}-t_j^{\pi^j(i)}\right|^{\frac{1}{H}}}\prod_{i=1}^{2n}\prod_{j\neq l}\mathrm{d}t_j^i\right)^{1-\beta}. \qquad (4.2.39)
\end{aligned}
$$

由于

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_{\Delta(\pi^1,\cdots,\pi^k)}\prod_{i=1}^{2n}\prod_{j\neq l}\frac{1}{1+\left|t_j^{\pi^j(i+1)}-t_j^{\pi^j(i)}\right|^{\frac{1}{H}}}\prod_{i=1}^{2n}\prod_{j\neq l}\mathrm{d}t_j^i\right)^{1-\beta}\\
&\leq\prod_{l=1}^{k}\int_{\Delta(\pi^1,\cdots,\pi^k)}\left(\prod_{i=1}^{2n}\prod_{j\neq l}\frac{1}{1+\left|t_j^{\pi^j(i+1)}-t_j^{\pi^j(i)}\right|^{\frac{1}{H}}}\right)^{\frac{1-\beta}{k-1}}\prod_{i=1}^{2n}\prod_{j\neq l}\mathrm{d}t_j^i, \qquad (4.2.40)
\end{aligned}
$$

则当 $\frac{1-\beta}{H(k-1)}>1$, 即 $H<\frac{1-\beta}{k-1}$ 时, (4.2.40) 有限.

综上, 由第二步和第三步可知,

$$
\mathbb{E}\left|\nabla L_{k,\varepsilon}^H(x',t)-\nabla L_{k,\varepsilon}^H(x,t)\right|^{2n}\leq C\left|x'-x\right|^{2n(k-1)\kappa},\ n=1,2,\cdots \qquad (4.2.41)
$$

$$
\mathbb{E}\left|\nabla L_{k,\varepsilon}^H(x,t')-\nabla L_{k,\varepsilon}^H(x,t)\right|^{2n}\leq C\left|t'-t\right|^{2n(k-1)\beta},\ n=1,2,\cdots \qquad (4.2.42)
$$

其中 $\kappa < \frac{k(1-H)-1}{4Hk}$, $\beta < 1 - H(k-1)$, 则

$$\{\nabla L^H_{k,\varepsilon}(x,t), t \geq 0, x \in \mathbb{R}^{k-1}\}$$

在 $L^p(\Omega)$, $p \geq 1$ 中存在且关于变量 (x,t) 满足联合 Hölder 连续性, 关于变量 x 也满足 Hölder 连续. □

4.3 DMSLT 的平滑性

基于 4.2 节中证明的 DMSLT $\partial_l L^H_{k,\varepsilon}(x,t)$ 的存在性, 若 $\partial_l L^H_{k,\varepsilon}(x,t)$ 可写为如下形式

$$\partial_l L^H_{k,\varepsilon}(x,t) = \sum_{n_j=0}^{\infty} F_{n_j}, j = 2, \cdots, k$$

且

$$\sum_{\substack{n_j=0 \\ n_2+\cdots+n_k=n}}^{\infty} n\mathbb{E}(|F_{n_j}|^2) < \infty,$$

则称 $\partial_l L^H_{k,\varepsilon}(x,t)$ 满足 Meyer-Watanabe 意义下的平滑性.

为方便, 本小节仅详细给出分数布朗运动 B^H DMSLT 的平滑性证明. 集合 G^H 中其它自相似高斯过程 DMSLT 的平滑性类似可得证. 首先, 给出下面的引理, 其在后续主要结果的证明中起到重要作用.

引理 4.3.1 对任意 $n \geq 1$, $x = (x_2, \cdots, x_k)$ 和 $y = (y_2, \cdots, y_k) \in \mathbb{R}^{k-1}$, 有

$$\begin{aligned}&(2n-1) \sum_{\substack{n_j \geq 0, \\ n_2+\cdots+n_k=n}} \int_{\mathbb{R}^{2(k-1)}} x_l y_l \prod_{j=2}^{k} \frac{(x_j y_j)^{n_j}}{(n_j)!} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x_j^2 + y_j^2)\right\} \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_k \mathrm{d}y_2 \cdots \mathrm{d}y_k \\ &\leq C \frac{(2n+k)!!}{(2n-2)!!k!!},\end{aligned} \tag{4.3.1}$$

其中 $l \in \{2, \cdots, k\}$, $n_2 = 2m_2 - 1$, $n_j = 2m_j$, $j = 3, \cdots, k$.

证明. 不失一般性, 假设 $l=2$, 其它情况类似可得证.

$$
\begin{aligned}
&(2n-1)\sum_{\substack{n_j\geq 0\\ n_2+\cdots+n_k=n}}\int_{\mathbb{R}^{2(k-1)}} x_2y_2\prod_{j=2}^{k}\frac{(x_jy_j)^{n_j}}{(n_j)!}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x_j^2+y_j^2)\right\}\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_k\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_k\\
&=(2n-1)\sum_{\substack{n_j\geq 0\\ n_2+\cdots+n_k=n}}\prod_{j=2}^{k}\frac{1}{(n_j)!}\left(\int_{\mathbb{R}} x_3^{n_3}e^{-\frac{1}{2}x_3^2}\mathrm{d}x_3\right)^2\\
&\times\left(\int_{\mathbb{R}} x_2^{n_2+1}e^{-\frac{1}{2}x_2^2}\mathrm{d}x_2\right)^2\cdots\left(\int_{\mathbb{R}} x_k^{n_k}e^{-\frac{1}{2}x_k^2}\mathrm{d}x_k\right)^2,
\end{aligned}
\tag{4.3.2}
$$

结合事实

$$
\int_{\mathbb{R}} x^n e^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x=\begin{cases}\sqrt{2\pi}(2k-1)!!, & n=2k,\\ 0, & n=2k+1,\end{cases}
$$

对所有 $n\geq 1$, 可得

$$
\begin{aligned}
&(2n-1)\sum_{\substack{n_j\geq 0\\ n_2+\cdots+n_k=n}}\prod_{j=2}^{k}\frac{1}{(n_j)!}\left(\int_{\mathbb{R}} x_2^{n_2+1}e^{-\frac{1}{2}x_2^2}\mathrm{d}x_2\right)^2\\
&\times\left(\int_{\mathbb{R}} x_3^{n_3}e^{-\frac{1}{2}x_3^2}\mathrm{d}x_3\right)^2\cdots\left(\int_{\mathbb{R}} x_k^{n_k}e^{-\frac{1}{2}x_k^2}\mathrm{d}x_k\right)^2\\
&=(2n-1)\sum_{\substack{m_2\geq 1,\\ m_3,\cdots,m_k\geq 0}}\frac{(2\pi)^{k-1}}{(2m_2-1)!}\prod_{j=3}^{k}\frac{1}{(2m_j)!}\left[(2m_2-2)!!(2m_3-1)!!\cdots(2m_k-1)!!\right]^2\\
&=(2n-1)\sum_{\substack{m_2\geq 1,\\ m_3,\cdots,m_k\geq 0}}(2\pi)^{k-1}\frac{(2m_2-2)!!(2m_3-1)!!\cdots(2m_k-1)!!}{(2m_2-1)!!(2m_3)!!\cdots(2m_k)!!}\\
&\leq C\frac{(2n+k)!!}{(2n-2)!!k!!},
\end{aligned}
\tag{4.3.3}
$$

则 (4.3.1) 得证. □

引理 4.3.2 对任意 $T>0$ 和 $\alpha_j>0,\ j=1,2,\cdots,k$, 有

$$\int_{D_{T,k}}\prod_{j=1}^{k}u_j^{\alpha_j}\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_k=T^{\sum\limits_{j=1}^{k}(1+\alpha_j)}\frac{\prod\limits_{j=1}^{k}\Gamma(1+\alpha_j)}{\Gamma\left(\sum\limits_{j=1}^{k}(1+\alpha_j)+1\right)},\tag{4.3.4}$$

其中 $D_{T,k}=\left\{0<u_1+\cdots+u_k<T:\ u_j>0,\ j=1,\cdots,k\right\}$.

证明. 对 $j=1,\cdots,k$, 将 u_j 用 Tu_j 替换可得

$$\begin{aligned}
&\int_{D_{T,k}}\prod_{j=1}^{k}u_j^{\alpha_j}\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_k\\
&=T^{\sum\limits_{j=1}^{k}(1+\alpha_j)}\int_{D_{1,k}}\prod_{j=1}^{k}u_j^{\alpha_j}\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_k\\
&=T^{\sum\limits_{j=1}^{k}(1+\alpha_j)}\int_0^{1-\sum\limits_{j=2}^{k}u_j}u_1^{\alpha_1}\mathrm{d}u_1\int_{D_1^{k-1}}\prod_{j=2}^{k}u_j^{\alpha_j}\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_k\\
&=\frac{T^{\sum\limits_{j=1}^{k}(1+\alpha_j)}}{1+\alpha_1}\int_{D_{1,k-1}}\left(1-\sum_{j=2}^{k}u_j\right)^{\alpha_1+1}\prod_{j=2}^{k}u_j^{\alpha_j}\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_k\\
&=\frac{T^{\sum\limits_{j=1}^{k}(1+\alpha_j)}}{1+\alpha_1}\int_{D_{1,k-2}}\int_0^{1-\sum\limits_{j=3}^{k}u_j}u_2^{\alpha_2}\left(1-\sum_{j=3}^{k}u_j-u_2\right)^{1+\alpha_1}\mathrm{d}u_2\\
&\times\prod_{j=3}^{k}u_j^{\alpha_j}\mathrm{d}u_3\cdots\mathrm{d}u_k\\
&\vdots
\end{aligned}\tag{4.3.5}$$

$$\begin{aligned}
&=\frac{T^{\sum\limits_{j=1}^{k}(1+\alpha_j)}}{1+\alpha_1}\prod_{j=2}^{k}B\left(1+\alpha_j,\ j+\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\right)\\
&=T^{\sum\limits_{j=1}^{k}(1+\alpha_j)}\frac{\prod\limits_{j=1}^{k}\Gamma(1+\alpha_j)}{\Gamma\left(\sum\limits_{j=1}^{k}(1+\alpha_j)+1\right)},
\end{aligned}\tag{4.3.6}$$

其中 $D_{1,k}=\{0<u_1+\cdots+u_k<1:\ u_j>0,\ j=1,\cdots,k\}$ 且 $B(\cdot,\cdot)$ 表示 Beta 函数. □

命题 4.3.1 对任意 $T>0$ 和 $0<\alpha_j<1,\ j=1,2,\cdots,k$, 有

$$\int_{D_{T,k}}\prod_{j=1}^{k}u_j^{-\alpha_j}\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_k=T^{\sum\limits_{j=1}^{k}(1-\alpha_j)}\frac{\prod\limits_{j=1}^{k}\Gamma(1-\alpha_j)}{\Gamma\left(\sum\limits_{j=1}^{k}(1-\alpha_j)+1\right)},\tag{4.3.7}$$

其中 $D_{T,k}=\{0<u_1+\cdots+u_k<T:\ u_j>0,\ j=1,\cdots,k\}$.

证明. 此结论证明同引理 4.3.2. □

引理 4.3.3 对任意 $t>0$ 和 $l\in\{2,\cdots,k\}$, 存在依赖于 H, σ 和 t 的常数 $C(H,\sigma,t)$ 使得

$$\begin{aligned}&\int_{(\Delta_k)^2}\prod_{j=2}^{k}\frac{R_H(\triangle s_j,\ \triangle t_j)^{n_j}}{(\triangle s_j\triangle t_j)^{Hn_j}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{(\triangle s_j\triangle t_j)^H(\triangle s_l\triangle t_l)^H}\\&\le C(H,\sigma,t)\frac{\Gamma(4H+2)\,(\Gamma(2+2H))^{k-2}}{\Gamma(2k(H+1)-1)}\left(\Gamma\left(\frac{1}{2H}\right)^{k-1}+\frac{\Gamma(1-2H)\,(\Gamma(1-H))^{k-2}}{\Gamma(k(1-H))}\right),\end{aligned}\tag{4.3.8}$$

其中 $R_H(\triangle s_j,\ \triangle t_j)$ 为由式 (2.2.1) 定义的协方差函数, $\sigma\in(0,1)$,

$$(\Delta_k)^2=\{s_i,t_j\ i,j=1,\cdots,k:0\le s_1\le s_2\le\cdots\le s_k\le t,\ 0\le t_1\le t_2\le\cdots\le t_k\le t\}$$

且

$$\triangle s_j=s_j-s_{j-1},\quad \triangle t_j=t_j-t_{j-1}.$$

证明. 设 $\triangle z=\frac{\triangle s}{\triangle t}$. 因为分数布朗运动 B^H 的协方差函数满足 $R(u,v)=R(v,u)$ 且 $R(u,v)=R(1,\frac{v}{u})u^{2H}$, 所以有

$$\begin{aligned}&\int_{(\Delta_k)^2}\prod_{j=2}^{k}\frac{R_H(\triangle s_j,\ \triangle t_j)^{n_j}}{(\triangle s_j\triangle t_j)^{Hn_j}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{(\triangle s_j\triangle t_j)^H(\triangle s_l\triangle t_l)^H}\\&=\int_{(\Delta_k)^2}\prod_{j=2}^{k}\frac{R_H(\frac{\triangle s_j}{\triangle t_j},\ 1)^{n_j}\triangle t_j^{2Hn_j}}{(\triangle s_j\triangle t_j)^{Hn_j}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{(\triangle s_j\triangle t_j)^H(\triangle s_l\triangle t_l)^H}\end{aligned}$$

$$\leq \int_{\Delta_k} \prod_{j=2}^{k} (\triangle t_j)^{2H+1} \triangle t_l^{2H} \mathrm{d}\boldsymbol{t} \int_{([0,1])^{k-1}} \prod_{j=2}^{k} \left(\frac{R_H(\triangle z_j,\ 1)}{(\triangle z_j)^H} \right)^{n_j} \frac{\mathrm{d}\triangle z}{(\triangle z_j)^H (\triangle z_l)^H}. \tag{4.3.9}$$

将式 (4.3.9) 分为两部分去证明.

首先, 根据引理 4.3.2, 可得

$$\int_{\Delta_k} \prod_{j=2}^{k} (\triangle t_j)^{2H+1} \triangle t_l^{2H} \mathrm{d}\boldsymbol{t} \leq C(t,H) \frac{\Gamma(4H+2)\,(\Gamma(2+2H))^{k-1}}{\Gamma(2k(H+1)-1)}. \tag{4.3.10}$$

接着, 考虑式 (4.3.9) 的第二部分. 假设

$$Q_H(\triangle z_j) = \begin{cases} \dfrac{R_H(\triangle z_j,\ 1)}{(\triangle z_j)^H}, & \triangle z_j \in (0,1], \\ 0, & \triangle z_j = 0. \end{cases}$$

不失一般性, 取 $l=2$, 有

$$\begin{aligned} &\int_{([0,1])^{k-1}} \prod_{j=2}^{k} \left(\frac{R_H(\triangle z_j,\ 1)}{(\triangle z_j)^H} \right)^{n_j} \frac{\mathrm{d}\triangle z}{(\triangle z_j)^H (\triangle z_2)^H} \\ &= \int_{([0,1-\sigma])^{k-1}} \frac{(Q_H(\triangle z_2))^{n_2}}{(\triangle z_2)^{2H}} \prod_{j=3}^{k} \frac{\left(Q_H(\triangle z_j)\right)^{n_j}}{(\triangle z_j)^H} \mathrm{d}\triangle z \\ &+ \int_{([1-\sigma,1])^{k-1}} \frac{(Q_H(\triangle z_2))^{n_2}}{(\triangle z_2)^{2H}} \prod_{j=3}^{k} \frac{\left(Q_H(\triangle z_j)\right)^{n_j}}{(\triangle z_j)^H} \mathrm{d}\triangle z \\ &:= I_1 + I_2, \end{aligned} \tag{4.3.11}$$

其中 $\sigma \in (0,1)$.

根据 [40] 中的引理 1 可知函数 $Q_H(\cdot)$ 是连续且严格递增的, $Q_H(\cdot) \leq 1$, 则可以得到

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \prod_{j=2}^{k} (Q_H(1-\sigma))^{n_j} \int_{([0,1-\sigma])^{k-1}} \frac{1}{(\triangle z_2)^{2H}} \prod_{j=3}^{k} \frac{1}{(\triangle z_j)^H} \mathrm{d}\triangle z \\ &\leq C(H,\sigma) \frac{\Gamma(1-2H)\,(\Gamma(1-H))^{k-2}}{\Gamma(k(1-H))}, \end{aligned} \tag{4.3.12}$$

其中第二个不等式来自于命题 4.3.1, $C(H,\sigma)$ 是依赖于 H 和 σ 的常数.

接下来, 考虑 I_2, 其界为

$$\begin{aligned} I_2 &\le C(H,\sigma)\int_{([1-\sigma,1])^{k-1}}\prod_{j=2}^{k}Q_H(\triangle z_j)^{n_j}\mathrm{d}\triangle z \\ &= C(H,\sigma)\int_{([1-\sigma,1])^{k-1}}\prod_{j=2}^{k}\exp\left\{n_j\ln(Q_H(\triangle z_j))\right\}\mathrm{d}\triangle z. \end{aligned} \tag{4.3.13}$$

同 [40] 中引理 2 的证明, 由 Taylor 展式可得

$$\ln(Q_H(\triangle z_j)) \le Q_H(\triangle z_j)-1 = \frac{1}{2}\left(\triangle z_j^H+\triangle z_j^{-H}-\triangle z_j^{-H}(1-\triangle z_j)^{2H}\right)-1. \tag{4.3.14}$$

对于 $\triangle z_j\in[1-\sigma,1]$ 和 $H\in(0,1)$, 有

$$\triangle z_j^H \le 1-H(1-\triangle z_j) \tag{4.3.15}$$

且

$$\triangle z_j^{-H} = 1+H(1-\triangle z_j)+\frac{1}{2}H(H-1)\xi^{-H-2}(1-\triangle z_j)^2, \tag{4.3.16}$$

其中 $\xi\in(\triangle z_j,1)$.

结合式 (4.3.15) 和 (4.3.16), 可得

$$\begin{aligned} Q_H(\triangle z_j)-1 &\le \frac{1}{2}(1-\triangle z_j)^{2H}\left(\frac{H(H-1)}{2}\xi^{-H-2}(1-\triangle z_j)^{2-2H}-1\right) \\ &\le \frac{1}{2}(1-\triangle z_j)^{2H}\left(\frac{H(H-1)}{2}(1-\sigma)^{-H-2}\sigma^{2-2H}-1\right) \\ &= \frac{1}{2}(1-\triangle z_j)^{2H}(o(\sigma)-1), \end{aligned} \tag{4.3.17}$$

其中 $o(\sigma)=\frac{H(H-1)}{2}(1-\sigma)^{-H-2}\sigma^{2-2H}$.

记 $\triangle x_j = \frac{n_j}{2}(1-\triangle z_j)^{2H}(o(\sigma)-1)$, 则有

$$
\begin{aligned}
I_2 &\le C(H,\sigma)\int_{([1-\sigma,1])^{k-1}}\prod_{j=2}^{k}\exp\left\{\frac{n_j}{2}(1-\triangle z_j)^{2H}(o(\sigma)-1)\right\}\mathrm{d}\triangle z \\
&\le C(H,\sigma)\int_{([0,C(H,\sigma)])^{k-1}}\prod_{j=2}^{k}\left(\frac{1}{n_j}\right)^{\frac{1}{2H}}\triangle x_j^{\frac{1}{2H}-1}e^{-\triangle x_j}\mathrm{d}\triangle x \qquad (4.3.18)\\
&\le C(H,\sigma)\prod_{j=2}^{k}\left(\frac{1}{n_j}\right)^{\frac{1}{2H}}\Gamma\left(\frac{1}{2H}\right)^{k-1}.
\end{aligned}
$$

综上, 结合式 (4.3.10), (4.3.12) 和式 (4.3.18), 可知式 (4.3.8) 成立. □

接下来, 给出分数布朗运动 DMSLT 在 Meyer-Watanabe 意义下平滑性的证明.

定理 4.3.1 若 $0<H<\frac{k-1}{k}$, $k\ge 2$, 则分数布朗运动 B^H 的 DMSLT 满足 Meyer-Watanabe 意义下的平滑性.

证明. 由式 (2.3.5), 式 (4.2.2) 和

$$
e^{tx-\frac{1}{2}t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}t^nH_n(x),
$$

可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_l}L_{k,\varepsilon}^H(0,t)\\
&=-\int_{\Delta_k}\prod_{j=2}^{l-1}p_\varepsilon(B_{t_j}^H-B_{t_{j-1}}^H)p'_\varepsilon(B_{t_l}^H-B_{t_{l-1}}^H)\prod_{j=l+1}^{k}p_\varepsilon(B_{t_j}^H-B_{t_{j-1}}^H)\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_k\\
&=\frac{-\iota}{2\pi}\int_{\Delta_k}\int_{\mathbb{R}^{k-1}}\xi_l\prod_{j=2}^{k}e^{\iota\xi_j(B_{t_j}^H-B_{t_{j-1}}^H)}e^{-\frac{\varepsilon|\xi_j|^2}{2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\boldsymbol{t}\\
&=\frac{-\iota}{2\pi}\int_{\Delta_k}\int_{\mathbb{R}^{k-1}}\xi_l\prod_{j=2}^{k}\exp\left\{\iota\xi_j(B_{t_j}^H-B_{t_{j-1}}^H))+\frac{1}{2}Var\left(\xi_j(B_{t_j}^H-B_{t_{j-1}}^H)\right)\right\}\\
&\times\prod_{j=2}^{k}\exp\left\{-\frac{\varepsilon|\xi_j|^2}{2}-\frac{1}{2}Var\left(\xi_j(B_{t_j}^H-B_{t_{j-1}}^H)\right)\right\}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\boldsymbol{t}\\
&=\sum_{n_j=0}^{\infty}\frac{-\iota}{2\pi}\int_{\Delta_k}\int_{\mathbb{R}^{k-1}}\xi_l\prod_{j=2}^{k}\exp\left\{-\frac{|\xi_j|^2}{2}\left(\varepsilon+(t_j-t_{j-1})^{2H}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

$$\times \prod_{j=2}^{k} \left(\imath \sigma(\xi_j, t_j) \right)^{n_j} H_{n_j} \left(\frac{\mathscr{H}(\xi_j, t_j)}{\sigma(\xi_j, t_j)} \right) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\boldsymbol{t} := \sum_{n_j=0}^{\infty} F_{n_j}, \tag{4.3.19}$$

其中

$$\sigma(\xi_j, t_j) = \sqrt{Var\left(\xi_j (B_{t_j}^H - B_{t_{j-1}}^H) \right)}, \ \ \mathscr{H}(\xi_j, t_j) = \xi_j (B_{t_j}^H - B_{t_{j-1}}^H)$$

且用到自相似高斯过程满足的局部非确定性.

由

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left(H_{n_j} \left(\frac{\mathscr{H}(\xi_j, t_j)}{\sigma(\xi_j, t_j)} \right) H_{n_j} \left(\frac{\mathscr{H}(\eta_j, s_j)}{\sigma(\eta_j, s_j)} \right) \right) \\ &= \frac{(\xi_j \eta_j)^{n_j}}{(n_j)! \left(\sigma(\xi_j, t_j) \sigma(\eta_j, s_j) \right)^{n_j}} \left(\mathbb{E}(B_{t_j}^H - B_{t_{j-1}}^H)(B_{s_j}^H - B_{s_{j-1}}^H) \right)^{n_j} \end{aligned} \tag{4.3.20}$$

可知, 为证明 $\partial_l L_{k,\varepsilon}^H(x,t)$ 的平滑性, 只需证

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{(2\pi)^2} \int_{(\Delta_k)^2} \int_{(\mathbb{R}^{k-1})^2} \xi_l \eta_l \sum_{\substack{n_j \geq 0 \\ n_2 + \cdots + n_k = n}} \prod_{j=2}^{k} \frac{(\xi_j \eta_j)^{n_j}}{(n_j)!} \\ &\times \exp\left\{ -\frac{|\xi_j|^2}{2} \left(\varepsilon + (t_j - t_{j-1})^{2H} \right) - \frac{|\eta_j|^2}{2} \left(\varepsilon + (s_j - s_{j-1})^{2H} \right) \right\} \\ &\times \left(\mathbb{E}(B_{t_j}^H - B_{t_{j-1}}^H)(B_{s_j}^H - B_{s_{j-1}}^H) \right)^{n_j} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\boldsymbol{s} \mathrm{d}\boldsymbol{t} < \infty, \end{aligned} \tag{4.3.21}$$

其中用到式 (2.3.6).

令

$$x_j = \sqrt{\varepsilon + (t_j - t_{j-1})^{2H}} \xi_j, \ \ y_j = \sqrt{\varepsilon + (s_j - s_{j-1})^{2H}} \eta_j,$$

式 (4.3.21) 可重写为

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{(2\pi)^2} \sum_{\substack{n_j \geq 0 \\ n_2 + \cdots + n_k = n}} \int_{(\Delta_k)^2} \prod_{j=2}^{k} \left(\left(\varepsilon + (\triangle t_l)^{2H} \right) \left(\varepsilon + (\triangle s_l)^{2H} \right) \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\times \left(\left(\varepsilon + (\triangle t_j)^{2H} \right) \left(\varepsilon + (\triangle s_j)^{2H} \right) \right)^{-\frac{n_j+1}{2}} \left(\mathbb{E}(B_{t_j}^H - B_{t_{j-1}}^H)(B_{s_j}^H - B_{s_{j-1}}^H) \right)^{n_j} \mathrm{d}\boldsymbol{t} \mathrm{d}\boldsymbol{s} \\ &\times \int_{(\mathbb{R}^{k-1})^2} x_l y_l \prod_{j=2}^{k} \frac{(x_j y_j)^{n_j}}{(n_j)!} e^{-\frac{1}{2}(x_j^2 + y_j^2)} \mathrm{d}x \mathrm{d}y, \end{aligned} \tag{4.3.22}$$

其中 $\mathrm{d}x=\prod_{j=2}^{k}\mathrm{d}x_j$, $\mathrm{d}y=\prod_{j=2}^{k}\mathrm{d}y_j$. 由引理 4.3.1 和引理 4.3.3 可知 (4.3.22) 是有限的. □

命题 4.3.2 对于双分数布朗运动 $B^{H_0,K_0}\in G^H$, $H_0\in(0,1)$, $K_0\in(0,1]$, 若 $0<H_0K_0<\frac{k-1}{k}$, $k\geq 2$, 则 B^{H_0,K_0} 的 DMSLT 在 $L^p(\Omega)$, $p\in[1,\infty)$ 中存在且满足 Meyer-Watanabe 意义下的平滑性.

证明. 由于双分数布朗运动 B^{H_0,K_0}, $H_0\in(0,1)$, $K_0\in(0,1]$ 满足局部非确定性且对任意 s, $t>0$, 有

$$2^{-K_0}|t-s|^{2H_0K_0}\leq\mathbb{E}\left[|B_t^{H_0,K_0}-B_s^{H_0,K_0}|^2\right]\leq 2^{1-K_0}|t-s|^{2H_0K_0},\tag{4.3.23}$$

则同定理 4.2.1 证明可得 B^{H_0,K_0} 的 DMSLT 在 $L^p(\Omega)$, $p\in[1,\infty)$ 中存在. 此外, 结合 B^{H_0,K_0} 协方差的性质, 同定理 4.3.1 的证明可得其满足平滑性. □

注 4.3.1 同定理 4.2.1 的证明可知 B^{H_0,K_0} 的 DMSLT 关于变量 x 也是满足 Hölder 连续的且当 $k=2$ 时, 命题 4.3.2 得到的存在性条件 $H_0K_0<\frac{1}{2}$ 与 [117] 中的存在性条件一致.

由于次分数布朗运动 S^H, $H\in(0,1)$ 也满足局部非确定性, 则同理可证得次分数布朗运动 DMSLT 的存在性和平滑性.

命题 4.3.3 对于次分数布朗运动 S^H, $H\in(0,1)$, 若 $0<H<\frac{k-1}{k}$, $k\geq 2$, 则 S^H 的 DMSLT 在 $L^p(\Omega)$, $p\in[1,\infty)$ 中存在且满足 Meyer-Watanabe 意义下的平滑性.

证明. 由于对任意 s, $t>0$, 次分数布朗运动满足

$$\left(2-2^{2H-1}\right)|t-s|^{2H}\leq\mathbb{E}\left[|S_t^H-S_s^H|^2\right]\leq|t-s|^{2H},\ H>\frac{1}{2},\tag{4.3.24}$$

$$|t-s|^{2H}\leq\mathbb{E}\left[|S_t^H-S_s^H|^2\right]\leq\left(2-2^{2H-1}\right)|t-s|^{2H},\ H<\frac{1}{2}\tag{4.3.25}$$

且满足局部非确定性, 则同定理 4.2.1 和定理 4.3.1 可知, 结论成立. □

5 局部时的非参数估计统计性质研究

本章致力于研究基于离散观测的分数布朗运动占位时和局部时的 Riemann 和估计和条件期望估计. 占位时和局部时的非参数估计在数学、金融等方面有广泛应用且得到众多学者的研究. 本章主要目的是将连续随机过程和 Markov 过程占位时和局部时的非参数估计推广至更一般的非平稳 Markov 过程, 重点讨论关于分数布朗运动占位时和局部时的非参数估计统计性质问题. 首先给出分数布朗运动占位时和局部时 Riemann 和估计的 $L^2(\Omega)$ 逼近误差的精确上界且通过矩估计方法得到占位时估计的中心极限定理. 最后为提高收敛速率介绍占位时和局部时的另一种非参数估计——条件期望估计, 给出条件期望估计的相关性质和中心极限定理.

5.1 问题综述

令 (标的) 资产价格 $S = \{S_t,\, t \geq 0\}$ 的形式为

$$S_t = S_0 e^{X_t}, \tag{5.1.1}$$

其中 $X = \{X_t,\, t \geq 0\}$ 是一个待指定的随机过程. 比如, 在 Black-Scholes-Merton 模型中, X 为具有漂移项的布朗运动. 从时间 0 到 T, S 在区间 $I = (y, \infty)$ 上所花费的时间, 或者等价于 X 在区间 I' 中所花费的时间, 由

$$\begin{aligned}\mathscr{O}_T(y) :&= \int_0^T \mathbf{1}_{S_t \in I} \mathrm{d}t = \int_0^T \mathbf{1}_{X_t \in I'} \mathrm{d}t \\ &= \int_y^\infty L_T(x) \mathrm{d}x\end{aligned} \tag{5.1.2}$$

给出, 其中 $\mathscr{O}_T(y)$ 为占位时, $L_T(x)$ 表示占位时的占位密度, 即为局部时.

在期权定价方面, 局部时和占位时可以用来描述标的资产价格的动态变化, 进而影响期权的价值. 如, 在 Black-Scholes 模型中, 标的资产价格的随机过

程通常被假设为几何布朗运动, 局部时和占位时可以用来描述这个过程的波动率和漂移率, 而这些参数对于期权定价和风险评估都是非常重要的. 此外, 占位时也被广泛用作阶梯期权 [83]和走廊期权 [41]等金融衍生品开发的一个先决条件, 研究人员已经推导出了各种随机过程占位时 Laplace 变换的显式表达式. Linetsky [83] 和 Davydov 和 Linetsky [32] 分别分析了几何布朗运动模型单屏障 (间隔形式为 $(-\infty,0)$ 或 $(0,\infty)$ 和双屏障 (间隔形式为 (a,b), a, b 为有限常数) 占位时的 Laplace 变换; Cai等 [22]将其结果推广到双指数跳跃的跳跃扩散过程.

在风险理论方面, 局部时和占位时可以用来描述风险敞口的时间分布和变化. 例如, 在衡量投资组合的风险时, 局部时可以用来确定投资组合在某个时间段内的波动情况, 而占位时则可以用来确定投资组合在某个状态下的持有时间, 这些信息对于风险管理和投资组合优化都是非常重要的. 除此之外, 占位时也被用作管理可保风险的强化风险管理工具. Gerber [51] 指出, 破产事件的恢复时间可以帮助保险公司确定破产发生时是继续经营还是终止经营. 作为恢复时间的概括, 负盈余持续时间也可用作检验保险组合健康状况的替代风险管理工具. 另一方面, $(0,b)$, $b>0$ 中的占位时衡量保险公司盈余保持在极低水平的时间, 这有助于评估其偿付能力风险.

在复合泊松 (CP) 风险模型的背景下, Egidio dos Reis [35]和 Dickson 和 Egidio dos Reis [36]通过分析破产恢复时间和负偏离次数推导出负盈余持续时间的分布, 而 Kolkovska 等 [81] 研究了局部时和区间内的占位测度. Landriault 等 [86]研究了单障碍的占位时, Loeffen 等 [87]获得了在某些首次通过时间约束下的间隔占位时的 Laplace 变换. 然而, 据我们所知, 在 Markov 到达过程风险模型 (或更一般的 Markov 加性风险过程 [146, 150]) 中对占位时的分析文献相当少. Dickson 和 Li [37] 分析了在 Erlang-2 风险模型中的负盈余持续时间; Albrecher 和 Ivanovs [9]在频谱负 Markov 加性过程中对负盈余持续时间进行了分析. 此外, Breuer [20] 研究了 Markov 调制布朗运动过程在不同区间的占位时, 该过程可用于近似具有相位型跳跃的 Markov 加性过程的占位时.

综上, 由于布朗运动以及更普遍的连续扩散过程的占位时和局部时在某些路径依赖性期权的定价中发挥了重要作用[45,96,145,149]. 一般来说, 这类期权的价格取决于连续时间价格过程 (例如 X) 在某些指定间隔内停留的时间. 然而, 在实际市场中, 我们只能在有限的观察点上得到过程 X 的值. 另一方面许多学者已经很好地研究了用有限的观测数据 (在时间或空间上离散) 逼近布朗运动和平稳 Markov 过程的局部时和占位时[70,85,148], 但关于逼近分数布朗运动占位时和局部时的工作却很少.

设 $B^H=(B_t^H)_{t\geq 0}$ 为一分数布朗运动, B^H 的占位时和局部时

$$\mathscr{O}_T(A)=\int_0^T \mathbf{1}_A(B_t^H)\mathrm{d}t, \qquad L_T(y)=\frac{\mathrm{d}\mathscr{O}}{\mathrm{d}y}(y) \tag{5.1.3}$$

在许多应用中都有重要作用. 若占位时测度 $A\mapsto \mathscr{O}_T(A)$ 关于 Lebesgue 测度绝对连续, 则 (5.1.3) 度量过程 $B^H=(B_t^H)_{t\geq 0}$ 在 Borel 集 $A\in\mathbb{R}$ 内或在某一点 $y\in\mathbb{R}$ 上花费的时间. 因此, 自然提出了一个问题, 即如何使用数据 $\{B_{t_k}^H,\ k=1,\cdots,nT\}$ 来近似 B^H 的占位时和局部时.

本章的目的是研究当 $n\to\infty$ 时, 在 $t_k=k\Delta_n,\ k=1,2,\cdots,nT,$ 时间间隔 $\Delta_n=\frac{1}{n}$ 的观测值 $B_{t_k}^H$ 下泛函 (5.1.3) 的估计, 找出其最优 L^2 逼近, 其中时间区间 $T>0$ 是固定的.

首先介绍 (5.1.3) 的 Riemann 和估计

$$\hat{\mathscr{O}}_{T,n}(A)=\Delta_n\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\mathbf{1}_A(B_{t_{k-1}}^H), \qquad \hat{L}_{T,n}(y)=\frac{\Delta_n}{h_n}\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\mathbf{1}_{[y-h_n,y+h_n]}(B_{t_{k-1}}^H), \tag{5.1.4}$$

其中 $h_n>0$ 为带宽参数.

本章的首要目的是通过分数布朗运动的特征函数和其满足的局部非确定性给出 Riemann 和估计的 L^2 逼近误差的精确上界, 并进一步给出占位时估计的中心极限定理. 由于分数布朗运动既不是鞅也不是 Markov 过程, 所以 [6] 中用到的鞅方法或随机积分表示似乎无法直接用来证明 (5.1.4) 的收敛性. 根据文献 [64],

本文将利用分数布朗运动的局部非确定性和 Fourier 分析方法, 通过矩估计方法来证明 (5.1.4) 的中心极限定理. 特别地, 文献 [6,99] 中的链式论证在使用 Fourier 分析获得估计矩的上界方面发挥了很重要的作用.

此外, 对于标量扩散过程, 在 [18,70,79,103] 中已经研究了 Riemann 和估计量且得到 $\mathscr{O}_T(A)$ 的收敛率为 $\Delta_n^{3/4}$, $L_T(y)$ 的收敛率为 $\Delta_n^{1/4}$. 特别地, 这些速率可以在的 L^2 近似背景下通过非平滑可积函数 g 的积分函数 $\int_0^t g(X_s)\mathrm{d}s$ 得到解释 [7]. 在 [1,61,103] 中证明了带漂移项的布朗运动的 Riemann 和估计速率的最优性, 但不清楚此方法是否可以扩展至非 Markov 过程, 或者 Riemann 和估计是否在达到最小渐近误差的意义上是渐近有效的. 因此, 与 [1,61] 类似, 本章也将通过研究条件期望估计值 $\mathbb{E}[\mathscr{O}_T(A)|\mathscr{G}_{t_k}]$ 和 $\mathbb{E}[L_T(y)|\mathscr{G}_{t_k}]$ 给出它们的相关性质来评估最优性问题, 其中 $\mathscr{G}_{t_k}$ 是由 $B^H_{t_k}$ 生成的 σ 代数.

本章的结构如下: 第二节通过分数布朗运动的特征函数和其满足的局部非确定性给出 Riemann 和近似的 L^2 逼近误差的精确上界并进一步通过矩估计方法结合链式论证给出占位时估计的中心极限定理. 第三节为提高估计速率给出占位时和局部时的另一种估计方法——条件期望估计值 $\mathbb{E}[\mathscr{O}_T(A)|\mathscr{G}_{t_k}]$ 和 $\mathbb{E}[L_T(y)|\mathscr{G}_{t_k}]$ 并给出它们的相关性质, 其中 $\mathscr{G}_{t_k}$ 是由 $B^H_{t_k}$ 生成的 σ 代数.

5.2 Riemann 和估计

设 $B^H=(B^H_t)_{t\geq 0}$ 为分数布朗运动, 则对于 $t\neq t'$, B^H 为中心高斯过程且其特征函数为

$$\varphi\left(u,t;v,t'\right)=e^{-\frac{1}{2}\mathbb{E}\left(uB^H_t+vB^H_{t'}\right)^2}=e^{-\frac{1}{2}\Phi_{t,t'}(u,v)}, \tag{5.2.1}$$

其中

$$\Phi_{t,t'}(u,v):=\mathbb{E}\left(uB^H_t+vB^H_{t'}\right)^2=|u|^2|t-t'|^{2H}+|v|^2|t'|^{2H}+2\langle u,v\rangle R^H(t,t'),$$

$R^H(t,t')$ 为分数布朗运动 B_t^H, $B_{t'}^H$ 的协方差函数.

接下来介绍后续证明中用到的关于特征函数 $\varphi(u,t;v,t')$ 的一些简单计算.

$$\begin{aligned}\partial_{t'}\varphi\left(u,t;v,t'\right) &= -\frac{1}{2}\partial_{t'}\Phi_{t,t'}(u,v)\varphi\left(u,t;v,t'\right),\\ \partial^2_{t't}\varphi\left(u,t;v,t'\right) &= \left(-\frac{1}{2}\partial^2_{t't}\Phi_{t,t'}(u,v)+\frac{1}{4}\partial_t\Phi_{t,t'}(u,v)\right)\varphi\left(u,t;v,t'\right),\end{aligned} \tag{5.2.2}$$

其中

$$\begin{aligned}\partial_{t'}\Phi_{t,t'}(u,v) &= 2H\left(\langle u+v,v\rangle(t')^{2H-1}-\langle u,v\rangle|t'-t|^{2H-1}\right),\\ \partial_t\Phi_{t,t'}(u,v) &= 2H\left(\langle u,u+v\rangle t^{2H-1}-\langle u,v\rangle|t'-t|^{2H-1}\right),\\ \partial^2_{t,t'}\Phi_{t,t'}(u,v) &= 2H(2H-1)\langle u,v\rangle|t'-t|^{2H-2}.\end{aligned} \tag{5.2.3}$$

因为分数布朗运动 B_t^H 是具有右连续路径的随机过程, 则对于每个 Borel 集 $A\in\mathbb{R}$ 和任意 $0<H<1$, 由 (5.1.3) 中定义的占位时可知:

$$\mathscr{O}_T(y)=\mathscr{O}_T([y,\infty)),\quad y\in\mathbb{R}.$$

此外, 由于 (5.1.3) 定义的二重局部时在 $0<H<1$ 时存在, 根据占位时公式有

$$\int_0^T f(B_s^H)\mathrm{d}s=\int_{\mathbb{R}} f(x)L_T(y)\mathrm{d}y, \tag{5.2.4}$$

其中 $f(x)$ 为非负可测函数.

5.2.1 Riemann 和估计的 L^2 上界

接下来首先先介绍关于 $\hat{\mathscr{O}}_{T,n}(A)$ 的一个简单但普遍的一致性结论, 其类似与 [5] 中的命题 2.1. 对于局部时 $\hat{L}_{T,n}(y)$ 的一致性结论也可见下面的命题 5,2.1.

命题 5.2.1 设 B_t^H, $0<H<1$ 为分数布朗运动, 对于 Borel 集 $A\in\mathbb{R}$, 若 $\lambda(\bar{A}/\mathring{A})=0$

成立, 其中 λ 为 Lebesgue 测度, $\bar{A}$, $\mathring{A}$ 分别表示集合 A 的闭包和内部, 则有

$$\lim_{n\to\infty} \hat{\mathscr{O}}_{T,n}(A) = \mathscr{O}_T(A),$$
$$\lim_{n\to\infty} \hat{L}_{T,n}(A) = L_T(A). \tag{5.2.5}$$

证明. 占位时 $\hat{\mathscr{O}}_{T,n}(A)$ 的证明可见文献 [5] 中命题 2.1 的证明, 此外局部时 $\hat{L}_{T,n}(A)$ 的证明类似于占位时的证明, 此处忽略其详细证明过程. □

接下来分别考虑分数布朗运动占位时和局部时 Riemann 和估计的 $L^2(\Omega)$ 误差上界. 对于 $0<H<1$, $0\le t\le t'\le T$, 因为 $(B_t^H,\, B_{t'}^H)$ 特征函数的具体表达式已知, 通过直接计算可得占位时和局部时 Riemann 和估计的误差上界.

定理 5.2.1 设 B_t^H, $0<H<1$ 为分数布朗运动, $T>0$, $n\ge 1$ 且 $-\infty<a\le b<+\infty$, 则有

$$\left\|\mathscr{O}_T([a,b]) - \hat{\mathscr{O}}_{T,n}([a,b])\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \le \begin{cases} 4\Delta_n^2 + 2\left(T^{2H} + T^{2H}\Delta_n\right), & H>\frac{1}{2}, \\ 4\Delta_n^2 + 2\left(T\Delta_n^{2H-1} + T^{2H}\Delta_n\right), & H<\frac{1}{2}. \end{cases} \tag{5.2.6}$$

为证明定理 5.2.1, 先给出一个相关的引理.

引理 5.2.1 对于 $g(x) = \mathbf{1}_{[a,b]}(x)$, 记

$$\boldsymbol{E}_{t,t'} = \mathbb{E}\left[\left(g(B_t^H) - g(B_{t_{k-1}}^H)\right)\left(g(B_{t'}^H) - g(B_{t'_{l-1}}^H)\right)\right],$$

其中 k, $l\ge 1$, 则有

(1)

$$\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\sum_{l=k+1}^{\lfloor nT\rfloor}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{t'_{l-1}}^{t'_l} \boldsymbol{E}_{t,t'}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t' \le \begin{cases} T^{2H}, & H>\frac{1}{2}, \\ T\Delta_n^{2H-1}, & H<\frac{1}{2}. \end{cases} \tag{5.2.7}$$

(2)

$$\sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{t_{k-1}}^{t'} \boldsymbol{E}_{t,t'} \mathrm{d}t \mathrm{d}t' \leq T^{2H} \Delta_n. \tag{5.2.8}$$

证明. 对于 $0 \leq t \leq t' \leq T$, 由 Plancherel 定理可知

$$\mathbb{E}\left(g(B_t^H) g(B_{t'}^H)\right) = (2\pi)^{-2} \int_{\mathbb{R}^2} \mathscr{F} g(u) \mathscr{F} g(v) \varphi\left(-u,t;-v,t'\right) \mathrm{d}u \mathrm{d}v, \tag{5.2.9}$$

其中 $\mathscr{F} g(\cdot)$ 为 $g(\cdot)$ 的 Fourier 变换.

因为 $g(x) = \mathbf{1}_{[a,b]}(x)$, 则

$$\mathscr{F} g(u) = \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{\imath ux} \mathrm{d}x = \frac{1}{\imath u}\left(e^{\imath ub} - e^{\imath ua}\right). \tag{5.2.10}$$

另外, $\varphi\left(u,t;v,t'\right)$ 为二元分数布朗运动 $(B_t^H,\, B_{t'}^H)$, $0 \leq t \leq t' \leq T$ 的特征函数, 即

$$\varphi\left(u,t;v,t'\right) = \mathbb{E}\left(e^{\imath u B_t^H + \imath v B_{t'}^H}\right) = e^{-\frac{1}{2}\mathbb{E}\left(u B_t^H + v B_{t'}^H\right)^2} = e^{-\frac{1}{2}\Phi_{t,t'}(u,v)}, \tag{5.2.11}$$

其中

$$\Phi_{t,t'}(u,v) := \mathbb{E}\left(u B_t^H + v B_{t'}^H\right)^2 = |u|^2 t^{2H} + |v|^2 |t'|^{2H} + 2\langle u,v \rangle R^H(t,t'),$$

$R^H(t,t')$ 为分数布朗运动 B_t^H, $B_{t'}^H$ 的协方差函数.

根据 (5.2.9) 和 (5.2.10) 可得

$$\begin{aligned} \left|\boldsymbol{E}_{t,t'}\right| \leq & C \int_{\mathbb{R}^2} \left(1 \wedge |u|^{-1}\right) \left(1 \wedge |v|^{-1}\right) \left|\varphi\left(-u,t;-v,t'\right) - \varphi\left(-u,t;-v,t'_{l-1}\right)\right. \\ & \left. - \varphi\left(-u,t_{k-1};-v,t'\right) + \varphi\left(-u,t_{k-1};-v,t'_{l-1}\right)\right| \mathrm{d}u \mathrm{d}v. \end{aligned} \tag{5.2.12}$$

为方便, 记

$$\boldsymbol{E}_{t,t'}^{(u,v)} = \varphi\left(u,t;v,t'\right) - \varphi\left(u,t;v,t'_{l-1}\right) - \varphi\left(u,t_{k-1};v,t'\right) + \varphi\left(u,t_{k-1};v,t'_{l-1}\right).$$

由分数布朗运动的局部非确定性可得

$$
\begin{aligned}
\Phi_{t,t'}(u,v) &= \mathbb{E}\left(uB_t^H + vB_{t'}^H\right)^2 = Var\left(u\left(B_t^H - B_{t'}^H\right) + (u+v)B_{t'}^H\right)^2 \\
&\geq C\left(u^2|t-t'|^{2H} + (u+v)^2|t'|^{2H}\right), \qquad (5.2.13)
\end{aligned}
$$

则

$$
\varphi\left(u,t;v,t'\right) = e^{-\frac{1}{2}\mathbb{E}\left(uB_t^H+vB_{t'}^H\right)^2} \leq Ce^{-\left(u^2|t-t'|^{2H}+(u+v)^2|t'|^{2H}\right)}. \qquad (5.2.14)
$$

当 $t\in[t_{k-1},t_k]$, $t\in[t_{l-1},t_k]$ 时, 有

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_{t,t'}^{(u,v)} &= \int_{t_{k-1}}^{t}\int_{t'_{l-1}}^{t'} \partial_{rr'}^2\varphi\left(u,r;v,r'\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}r' \\
&\leq C\int_{t_{k-1}}^{t}\int_{t'_{l-1}}^{t'}\left(\langle u,v\rangle|r'-r|^{2H-2} + \langle u+v,v\rangle\langle u,u+v\rangle|r'r|^{2H-1}\right. \\
&\quad -\langle u+v,v\rangle\langle u,v\rangle\left(|r'-r|r'\right)^{2H-1} - \langle u+v,v\rangle\langle u,v\rangle\left(|r'-r|r\right)^{2H-1} \\
&\quad \left.+\langle u,v\rangle^2\left(|r'-r|\right)^{4H-2}\right)\varphi\left(u,r;v,r'\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}r'. \qquad (5.2.15)
\end{aligned}
$$

由 (5.2.15), (5.2.12) 上界的估计可以分为五部分.

(i) 对于

$$
(1\wedge|u|^{-1})(1\wedge|v|^{-1})\int_{t_{k-1}}^{t}\int_{t'_{l-1}}^{t'}\left(\langle u,v\rangle|r'-r|^{2H-2}\right)\varphi\left(u,r;v,r'\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}r',
$$

可得:

$$
\begin{aligned}
&(1\wedge|u|^{-1})(1\wedge|v|^{-1})\int_{t_{k-1}}^{t}\int_{t'_{l-1}}^{t'}\left(\langle u,v\rangle|r'-r|^{2H-2}\right)\varphi\left(u,r;v,r'\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}r' \\
&\leq C(1\wedge|u|^{-1})(1\wedge|v|^{-1})|u||v|\left(|u||u+v|\right)^{-1}\int_{t_{k-1}}^{t}\int_{t'_{l-1}}^{t'}|r-r'|^{H-2}|r'|^{-H}\mathrm{d}r\mathrm{d}r' \\
&\leq C\int_{t_{k-1}}^{t}\int_{t'_{l-1}}^{t'}|r-r'|^{H-2}|r'|^{-H}\mathrm{d}r\mathrm{d}r'. \qquad (5.2.16)
\end{aligned}
$$

(ii) 对于

$$(1\wedge|u|^{-1})(1\wedge|v|^{-1})\int_{t_{k-1}}^{t}\int_{t'_{l-1}}^{t'}\left(\langle u,v\rangle^2|r'-r|^{4H-2}\right)\varphi\left(u,r;v,r'\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}r',$$

同 (i) 可得:

$$\begin{aligned}&(1\wedge|u|^{-1})(1\wedge|v|^{-1})\int_{t_{k-1}}^{t}\int_{t'_{l-1}}^{t'}\left(\langle u,v\rangle^2|r'-r|^{4H-2}\right)\varphi\left(u,r;v,r'\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}r'\\&\le C\int_{t_{k-1}}^{t}\int_{t'_{l-1}}^{t'}|r-r'|^{3H-2}|r'|^{-H}\mathrm{d}r\mathrm{d}r'.\end{aligned}\tag{5.2.17}$$

(iii) 同 (i) 和 (ii) 的计算, 可得

$$\begin{aligned}&(1\wedge|u|^{-1})(1\wedge|v|^{-1})\langle u+v,v\rangle\langle u,v\rangle\int_{t_{k-1}}^{t}\int_{t'_{l-1}}^{t'}\left(|r'-r|r'\right)^{2H-1}\varphi\left(u,r;v,r'\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}r'\\&\le C\int_{t_{k-1}}^{t}\int_{t'_{l-1}}^{t'}|r-r'|^{H-1}|r'|^{H-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}r',\end{aligned}\tag{5.2.18}$$

且

$$\begin{aligned}&(1\wedge|u|^{-1})(1\wedge|v|^{-1})\langle u,v\rangle\langle u,u+v\rangle\int_{t_{k-1}}^{t}\int_{t'_{l-1}}^{t'}\left(|r'-r|r\right)^{2H-1}\varphi\left(u,r;v,r'\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}r'\\&\le C\int_{t_{k-1}}^{t}\int_{t'_{l-1}}^{t'}|r-r'|^{H-1}|r|^{H-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}r'.\end{aligned}\tag{5.2.19}$$

(iv) 对于 $H\ge\frac{1}{2}$, 有

$$\begin{aligned}&(1\wedge|u|^{-1})(1\wedge|v|^{-1})\langle u+v,v\rangle\langle u,u+v\rangle\int_{t_{k-1}}^{t}\int_{t'_{l-1}}^{t'}|r'r|^{2H-1}\varphi\left(u,r;v,r'\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}r'\\&\le\int_{t_{k-1}}^{t}\int_{t'_{l-1}}^{t'}|r'-r|^{2H-1}e^{-\left(u^2|r-r'|^{2H}+(u+v)^2|r'|^{2H}\right)}\mathrm{d}r\mathrm{d}(|r|^{2H})\\&\le C\int_{t_{k-1}}^{t}\int_{t'_{l-1}}^{t'}|r'-r|^{H-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}r'.\end{aligned}\tag{5.2.20}$$

(v) 若 $H<\frac{1}{2}$, 直接计算可得

$$(1\wedge|u|^{-1})(1\wedge|v|^{-1})\langle u+v,v\rangle\langle u,u+v\rangle\int_{t_{k-1}}^{t}\int_{t'_{l-1}}^{t'}|r'r|^{2H-1}\varphi\left(u,r;v,r'\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}r'$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C\int_{t_{k-1}}^{t}\int_{t'_{l-1}}^{t'}|r'|^{2H-1}e^{-\left(u^2|r|^{2H}+(u+v)^2|r'|^{2H}\right)}\mathrm{d}(r)^{2H}\mathrm{d}r'\\
&\leq C\int_{t_{k-1}}^{t}\int_{t'_{l-1}}^{t'}|r'|^{H-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}r'.
\end{aligned}\tag{5.2.21}
$$

因为当 $t\in[t_{k-1},t_k]$, $t'\in[t'_{l-1},t_l]$ 且 t_k, $t'_l\in[0,T]$ 时, 有

$$
\sum_{k-1>j\geq 2}\int_{t_{k-1}}^{t}\int_{t'_{l-1}}^{t'}(b-a)^{-\alpha}a^{-\beta}\mathrm{d}a\mathrm{d}b=\begin{cases}T^{2-\alpha-\beta}, & \alpha<1,\ \beta<1,\\ \Delta_n^{2-\alpha-\beta}, & \alpha>1,\ \beta>1,\end{cases}\tag{5.2.22}
$$

所以结合 (5.2.15)-(5.2.21) 可得

$$
\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\sum_{l=k+1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{t'_{l-1}}^{t'_l}\boldsymbol{E}_{t,t'}\mathrm{d}t\mathrm{d}t'\leq\begin{cases}T^{2H}, & H\geq\frac{1}{2},\\ T\Delta_n^{2H-1}, & H<\frac{1}{2}.\end{cases}\tag{5.2.23}
$$

此外, 若 $t_{k-1}\leq t\leq t'\leq t_k$, 因为

$$
\boldsymbol{E}_{t,t'}^{(u,v)}=\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{t_{k-1}}^{t}\left(\partial_r\varphi\left(u,r;v,r'\right)-\partial_{r'}\varphi\left(u,r;v,r'\right)\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}r',\tag{5.2.24}
$$

所以同 (5.2.22) 的证明, 结合 (5.2.15)-(5.2.21) 可得

$$
\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\sum_{l=k+1}^{\lfloor nT\rfloor}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{t_{k-1}}^{t'}\boldsymbol{E}_{t,t'}\mathrm{d}t\mathrm{d}t'\leq T^{2H}\Delta_n.\tag{5.2.25}
$$

□

定理 5.2.1 的证明: 因为

$$
\begin{aligned}
&\left\|\mathscr{O}_T([a,b])-\hat{\mathscr{O}}_{T,n}([a,b])\right\|_{L^2(\Omega)}^2\\
&=\mathbb{E}\left(\Delta_n\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\mathbf{1}_{[a,b]}(B_{t_{k-1}}^H)-\int_0^T\mathbf{1}_{[a,b]}(B_t^H)\mathrm{d}t\right)^2\\
&=\sum_{l,k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{t'_{l-1}}^{t'_l}\mathbb{E}\left(g(B_t^H)-g(B_{\Delta_n\lfloor t/\Delta_n\rfloor}^H)\right)\mathbb{E}\left(g(B_{t'}^H)-g(B_{\Delta_n\lfloor t'/\Delta_n\rfloor}^H)\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}t'
\end{aligned}
$$

$$\leq 4\Delta_n^2+2\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{t'_{l-1}}^{t'_l}\boldsymbol{E}_{t,t'}\mathrm{d}t\mathrm{d}t'+\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{t_{k-1}}^{t}\boldsymbol{E}_{t,t'}\mathrm{d}t\mathrm{d}t'\right), \tag{5.2.26}$$

其中 $g(x)=\mathbf{1}_{[a,b]}(x)$. 若 $t_{k-1}<t<t_k$, 则 $\Delta_n\lfloor t/\Delta_n\rfloor=t_{k-1}$.

综上, 对于 (5.2.26), 由引理 5.2.1 可得

$$\left\|\mathscr{O}_T([a,b])-\hat{\mathscr{O}}_{T,n}([a,b])\right\|_{L^2(\Omega)}^2\leq\begin{cases}4\Delta_n^2+2\left(T^{2H}+T^{2H}\Delta_n\right), & H\geq\frac{1}{2},\\ 4\Delta_n^2+2\left(T\Delta_n^{2H-1}+T^{2H}\Delta_n\right), & H<\frac{1}{2}.\end{cases} \tag{5.2.27}$$

接下来给出分数布朗运动局部时 Riemann 和估计的 $L^2(\Omega)$ 误差上界.

定理 5.2.2 对于任意 $\varepsilon<\frac{1-H}{2H}$, 设 B_t^H, $0<H<1$ 为分数布朗运动, $T>0$, $n\geq 1$, 则有

$$\left\|L_T(y)-\hat{L}_{T,n}(y)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\leq T^{2-H-\varepsilon H}\Delta_n^{\varepsilon}+\begin{cases}4\Delta_n^2+2\left(T^{2H}+T^{2H}\Delta_n\right), & H\geq\frac{1}{2},\\ 4\Delta_n^2+2\left(T\Delta_n^{2H-1}+T^{2H}\Delta_n\right), & H<\frac{1}{2}.\end{cases} \tag{5.2.28}$$

证明. 因为

$$\hat{L}_{T,n}(y)=\frac{1}{2\Delta_n}\hat{\mathscr{O}}_{T,n}([y-\Delta_n,y+\Delta_n]),$$

则根据定理 5.2.1 可得

$$\begin{aligned}\left\|L_T(y)-\hat{L}_{T,n}(y)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\leq&\left\|\frac{1}{2\Delta_n}\hat{\mathscr{O}}_T([y-\Delta_n,y+\Delta_n])-L_T(y)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\\&+\begin{cases}4\Delta_n^2+2\left(T^{2H}+T^{2H}\Delta_n\right), & H\geq\frac{1}{2},\\ 4\Delta_n^2+2\left(T\Delta_n^{2H-1}+T^{2H}\Delta_n\right), & H<\frac{1}{2}.\end{cases}\end{aligned} \tag{5.2.29}$$

由分数布朗运动的自相似性可得

$$L_T(x) = T^{1-H} L_1(T^{-H} x).$$

则结合局部时矩的有界性有

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{1}{2\Delta_n} \hat{\mathscr{O}}_T([y-\Delta_n, y+\Delta_n]) - L_T(y) \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&= \left\| \frac{1}{2\Delta_n} \int_{y-\Delta_n}^{y+\Delta_n} L_T(x)\mathrm{d}x - L_T(y) \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&= \left\| \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} L_T(y+x\Delta_n) - L_T(y)\mathrm{d}x \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\le C \int_{-1}^{1} \| L_T(y+x\Delta_n) - L_T(y) \|_{L^2(\Omega)} \mathrm{d}x \\
&\le C T^{1-\frac{H}{2}} \int_{-1}^{1} \left\| L_1(T^{-\frac{H}{2}}(y+x\Delta_n)) - L_1(T^{-\frac{H}{2}} y) \right\|_{L^2(\Omega)} \mathrm{d}x \\
&\le C T^{1-\frac{H}{2}} \int_{-1}^{1} \left(T^{-\frac{H}{2}} x\Delta_n \right)^{\varepsilon} \mathrm{d}x \\
&\le C T^{1-\frac{H}{2}-\frac{H}{2}\varepsilon} \Delta_n^{\varepsilon},
\end{aligned} \tag{5.2.30}$$

其中 $\varepsilon < \frac{1-H}{2H}$. □

5.2.2 Riemann 和估计的中心极限定理

接下来给出占位时和局部时估计 (5.1.4) 的中心极限定理, 本小节所用方法的基本思想是将矩估计方法应用于分数布朗运动占位时和局部时 Riemann 和估计. 基于 Fourier 分析和迭代过程的新方法来推出奇数阶收敛于零, 并在偶数阶矩证明过程中得到 Riemann 和估计与原占位时差的矩估计值, 从而得到 Riemann 和估计的中心极限定理.

定理 5.2.3 对于分数布朗运动 $(B_t^H)_{t\ge 0}$, 当 $\frac{1}{3} < H < 1$ 时有

$$\lim_{\Delta_n \to 0} \Delta_n^{\frac{H+1}{2}} \left(\hat{\mathscr{O}}_{n,T}(x) - \mathscr{O}_T(x) \right) \xrightarrow{d} \frac{1}{4} B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} T N^2 \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x, \tag{5.2.31}$$

其中 $f(x)=\mathbf{1}_{(x,\infty)}(B_t^H)$, $B(\cdot,\cdot)$ 为 Beta 函数且 N 是一个实值标准正态随机变量.

因为

$$\begin{aligned}\hat{\mathscr{O}}_{n,T}(x)-\mathscr{O}_T(x)&=\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\int_{t_{k-1}}^{t_k}f(B_{t_r}^H)-f(B_{t_{k-1}}^H)\mathrm{d}r\\&=\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\mathscr{F}f(u)\left(e^{-\imath uB_{t_r}^H}-e^{-\imath uB_{t_{k-1}}^H}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}t_r:=F_n,\end{aligned}\tag{5.2.32}$$

其中 $f(x)=\mathbf{1}_{(x,\infty)}(B_t^H)$, 所以为证明定理 5.2.3, 只需证明 F_n 的矩收敛于 (5.2.31) 右侧出现的随机变量的相应矩. 即, 根据矩估计方法需要证明对于任意 $m\geq 1$, 下面两个式子成立:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(\Delta_n^{\frac{H+1}{2}}\right)^{2m-1}\mathbb{E}(F_n^{2m-1})=0,\tag{5.2.33}$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(\Delta_n^{\frac{H+1}{2}}\right)^{2m}\mathbb{E}(F_n^{2m})=\frac{1}{4}B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}TN^2\int_{\mathbb{R}}f(x)\mathrm{d}x,\tag{5.2.34}$$

其中 $f(x)=\mathbf{1}_{(x,\infty)}(B_t^H)$, $B(\cdot,\cdot)$ 为 Beta 函数且 N 是一个实值标准正态随机变量.

5.2.2.1 奇数阶矩的收敛

首先基于 Fourier 分析和迭代过程来推出随机变量 F_n 的奇数阶矩的估计值, 其在 (5.2.33) 的证明中至关重要.

记 f 的 Fourier 变换为 $\mathscr{F}f$, 则对任意 $m\geq 1$, 有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(F_n^m)&=\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\int_{[t_{1,k-1},t_{1,k}]}\cdots\int_{[t_{m,k-1},t_{m,k}]}\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^m\left(f(B_{t_{i,r}}^H)-f(B_{t_{i,k-1}}^H)\right)\right)\mathrm{d}t_{m,r}\cdots\mathrm{d}t_{1,r}\\&=C_m\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\int_{[t_{1,k-1},t_{1,k}]}\cdots\int_{[t_{m,k-1},t_{m,k}]}\int_{\mathbb{R}^m}\prod_{i=1}^m\mathscr{F}f(u_i)\\&\quad\times\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^m\left(e^{-\imath u_iB_{t_{i,r}}^H}-e^{-\imath u_iB_{t_{i,k-1}}^H}\right)\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}t_{m,r}\cdots\mathrm{d}t_{1,r}.\end{aligned}\tag{5.2.35}$$

命题 5.2.2 设 B_t^H 为一维分数布朗运动, Hurst 参数 $H \in (0,1)$, 则可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{m}\left(e^{-\iota u_i B^H_{t_{i,r}}}-e^{-\iota u_i B^H_{t_{i,k-1}}}\right)\right)\\
\leq & C\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}|u_i|^2\left(|\gamma_i|^2|t_r^{\pi^r(i)}|^{2H}+|\bar{\gamma}_i|^2|t_{k-1}^{\pi^{k-1}(m+1)}|^{2H}\right)\right),
\end{aligned} \tag{5.2.36}$$

其中 $\gamma_i \in (0,1]$ 且 $\bar{\gamma}_i+\gamma_i=1,\ i=1,\cdots,m.$

证明. 因为

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{m}\left(e^{-\iota u_i B^H_{t_{i,r}}}-e^{-\iota u_i B^H_{t_{i,k-1}}}\right)\\
&\leq C\prod_{i=1}^{m}\left(|e^{-\iota u_i B^H_{t_{i,r}}}|+|e^{-\iota u_i B^H_{t_{i,k-1}}}|\right)\\
&\leq C\prod_{i=1}^{m}\left(|e^{-\iota \gamma_i u_i B^H_{t_{i,r}}}||e^{-\iota \bar{\gamma}_i u_i B^H_{t_{i,k-1}}}|\right),
\end{aligned} \tag{5.2.37}$$

且用 π^k 表示 $\{t_{1,k},\cdots,t_{m,k}\}$ 的重排后的集合, 记

$$D\left(\pi^1,\cdots,\pi^n\right)=\left\{t_{i,k}\in[0,T]|t_k^{\pi^k(i+1)}\geq t_k^{\pi^k(i)}\right\} \tag{5.2.38}$$

并规定 $t_k^{\pi^k(m+1)}=t_{k+1}^{\pi^{k+1}(1)}$, 所以在集合 $D\left(\pi^1,\cdots,\pi^n\right)$ 上使用分数布朗运动的局部非确定性可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{m}\left(e^{-\iota u_i B^H_{t_{i,r}}}-e^{-\iota u_i B^H_{t_{i,k-1}}}\right)\right)\\
&\leq C\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{m}\left(|e^{-\iota \gamma_i u_i B^H_{t_{i,r}}}||e^{-\iota \bar{\gamma}_i u_i B^H_{t_{i,k-1}}}|\right)\right)\\
&=C\mathbb{E}\left(\exp\left(\sum_{i=1}^{m}\left(-\iota\gamma_i u_i B^H_{t_{i,r}}-\iota\bar{\gamma}_i u_i B^H_{t_{i,k-1}}\right)\right)\right)\\
&=C\exp\left(-\frac{1}{2}Var\left(\sum_{i=1}^{m}u_i\left(\gamma_i B^H_{t_{i,r}}+\bar{\gamma}_i B^H_{t_{i,k-1}}\right)\right)\right)\\
&\leq C\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{m}|v_i|^2\left(|\gamma_i|^2|t_r^{\pi^r(i)}|^{2H}+|\bar{\gamma}_i|^2|t_{k-1}^{\pi^{k-1}(i)}|^{2H}\right)\right)\right),
\end{aligned} \tag{5.2.39}$$

其中 $\gamma_i \in (0,1]$, $\bar{\gamma}_i + \gamma_i = 1, i = 1, \cdots, m$ 且 $v_i = \sum_{j=i}^{m} u_j$. □

由 (5.2.36) 可得, (5.2.35) 可重写为:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(F_n^m) &= C_m \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \int_{[t_{1,k-1},t_{1,k}]} \cdots \int_{[t_{m,k-1},t_{m,k}]} \int_{\mathbb{R}^m} \prod_{i=1}^{m} \mathscr{F} f(u_i) \\
&\quad \times \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{m} \left(e^{-\iota u_i B^H_{t_{i,r}}} - e^{-\iota u_i B^H_{t_{i,k-1}}} \right) \right) \mathrm{d}u \mathrm{d}t_{m,r} \cdots \mathrm{d}t_{1,r} \\
&\leq C \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \sum_{\pi^1,\cdots,\pi^m} \int_{D(\pi^1,\cdots,\pi^m)} \int_{\mathbb{R}^m} \prod_{i=1}^{m} \mathscr{F} f(v_i - v_{i+1}) \\
&\quad \times \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} |v_i|^2 \left(|\gamma_i|^2 |t_r^{\pi^r(i)}|^{2H} + |\bar{\gamma}_i|^2 |t_{k-1}^{\pi^{k-1}(i)}|^{2H} \right) \right) \mathrm{d}v \mathrm{d}t_r^{\pi^r(m)} \cdots \mathrm{d}t_r^{\pi^r(1)}.
\end{aligned} \tag{5.2.40}$$

接下来为给出 (5.2.40) 的上界, 先通过链式论证给出 $\prod_{i=1}^{m} \mathscr{F} f(v_i - v_{i+1})$ 的上界, 其中链式论证的主要思路是将 $\mathscr{F} f(v_{2i-1} - v_{2i}) \mathscr{F} f(v_{2i} - v_{2i+1})$ 用

$$\mathscr{F} f(-v_{2i}) \mathscr{F} f(v_{2i}) = |\mathscr{F} f(v_{2i})|^2$$

替换.

对任意 x, $y \in \mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned}
&|\mathscr{F} f(x) - \mathscr{F} f(y)| \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left| e^{-\iota x \xi} - e^{-\iota y \xi} \right| |f(\xi)| \mathrm{d}\xi \\
&\leq \frac{1}{2\pi} |x-y|^{\alpha} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{\alpha} |f(\xi)| \mathrm{d}\xi := \frac{1}{2\pi} |x-y|^{\alpha} N(f),
\end{aligned} \tag{5.2.41}$$

其中 $\alpha \in (0,1]$ 且用到不等式

$$\left| e^{-\iota x \xi} - e^{-\iota y \xi} \right| \leq |(x-y)\xi|^{\alpha}.$$

特别地, 记 $N(f) = \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{\alpha} |f(\xi)| \mathrm{d}\xi$.

根据 (5.2.41) 可知, $\mathscr{F}f(v_{2i-1}-v_{2i})-\mathscr{F}f(-v_{2i})$ 和 $\mathscr{F}f(v_{2i}-v_{2i+1})-\mathscr{F}f(v_{2i})$ 分别被 $|v_{2i}|^{\alpha}$ 和 $|v_{2i+1}|^{\alpha}$ 乘以一个常数界定.

因为

$$
\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{m}|\mathscr{F}f(v_i-v_{i+1})|\\
&=|\mathscr{F}f(v_1-v_2)-\mathscr{F}f(-v_2)+\mathscr{F}f(-v_2)|\,|\mathscr{F}f(v_2-v_3)-\mathscr{F}f(v_2)+\mathscr{F}f(v_2)|\\
&\times|\mathscr{F}f(v_3-v_4)-\mathscr{F}f(-v_4)+\mathscr{F}f(-v_4)|\,|\mathscr{F}f(v_4-v_5)-\mathscr{F}f(v_4)+\mathscr{F}f(v_4)|\\
&\vdots\\
&=\prod_{i=1}^{m}\left|\mathscr{F}f(v_i-v_{i+1})-\mathscr{F}f\left((-1)^i v_{2\lfloor\frac{i+1}{2}\rfloor}\right)+\mathscr{F}f\left((-1)^i v_{2\lfloor\frac{i+1}{2}\rfloor}\right)\right|,
\end{aligned}
\tag{5.2.42}
$$

其中 $\lfloor\frac{i+1}{2}\rfloor$ 表示 $\frac{i+1}{2}$ 的整数部分, 且 $|\mathscr{F}f(-v)|=|\mathscr{F}f(v)|$, 所以结合 (5.2.42) 可得

$$
\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{m}|\mathscr{F}f(v_i-v_{i+1})|\\
&\le\sum_{l=1}^{m}\begin{cases}\left(\prod_{i=1}^{l-1}\left|\mathscr{F}f\left(v_{2\frac{i+1}{2}}\right)\right|\left|\mathscr{F}f(v_l-v_{l+1})-\mathscr{F}f\left((-1)^l v_{2\frac{l+1}{2}}\right)\right|\right)\\ \times\prod_{i=l+1}^{m}|\mathscr{F}f(v_i-v_{i+1})|:=I_l,\ l=1,2,\cdots,m-1,\\ \\ \left(\prod_{i=1}^{m-1}\left|\mathscr{F}f\left(v_{2\frac{i+1}{2}}\right)\right|\right)\mathscr{F}f(v_m):=I_m,\ l=m.\end{cases}
\end{aligned}
\tag{5.2.43}
$$

由 (5.2.40) 和 (5.2.43) 可得:

$$
\begin{aligned}
&|\mathbb{E}(F_n^m)|\\
&\le C\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\sum_{\pi^1,\cdots,\pi^m}\int_{D(\pi^1,\cdots,\pi^m)}\int_{\mathbb{R}^m}\prod_{i=1}^{m}\mathscr{F}f(v_i-v_{i+1})\\
&\times\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}|v_i|^2\left(|\gamma_i|^2|t_r^{\pi^r(i)}|^{2H}+|\bar{\gamma}_i|^2|t_{k-1}^{\pi^{k-1}(m+1)}|^{2H}\right)\right)\mathrm{d}v\mathrm{d}t_r^{\pi^r(m)}\cdots\mathrm{d}t_r^{\pi^r(1)}\\
&\le C\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\sum_{l=1}^{m}\sum_{\pi^1,\cdots,\pi^m}\int_{D(\pi^1,\cdots,\pi^m)}\int_{\mathbb{R}^m}I_l\times
\end{aligned}
$$

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}|v_i|^2\left(|\gamma_i|^2|t_r^{\pi^r(i)}|^{2H}+|\bar{\gamma}_i|^2|t_{k-1}^{\pi^{k-1}(i)}|^{2H}\right)\right)\mathrm{d}v\mathrm{d}t_r^{\pi^r(m)}\cdots\mathrm{d}t_r^{\pi^r(1)}. \tag{5.2.44}$$

接下来给出 (5.2.44) 的上界, 在此之前先给出一个有用的命题.

命题 5.2.3 对于 $l=1,2,\cdots,m-1$ 和 $l=m$, 存在常数 C 使得

$$\begin{aligned}
&\Delta_n^{\frac{m(H+1)}{2}}\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\int_{D\left(\pi^1,\cdots,\pi^m\right)}\int_{\mathbb{R}^m}I_l\times\\
&\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}|v_i|^2\left(|\gamma_i|^2|t_r^{\pi^r(i)}|^{2H}+|\bar{\gamma}_i|^2|t_{k-1}^{\pi^{k-1}(i)}|^{2H}\right)\right)\mathrm{d}v\mathrm{d}t_r^{\pi^r(m)}\cdots\mathrm{d}t_r^{\pi^r(1)}\\
&\le\begin{cases}C(N(f))^mT^{\frac{m(H+1)}{2}}, & l\text{ 为偶数},\\ C(N(f))^mT^{m(H+1)+\theta}n^{-\theta}, & l\text{ 为奇数},\end{cases}
\end{aligned}\tag{5.2.45}$$

其中 $\theta=m(H+1)+H\sum\limits_{i=1}^{m}(1+\alpha_i)$, $\alpha_i\in(0,1]$, I_l 由 (5.2.43) 给出.

证明. 该结论证明将分为五步进行.

第一步: 首先给出当 $l=1$ 时的证明.

因为

$$\begin{aligned}
&\int_{D\left(\pi^1,\cdots,\pi^m\right)}\int_{\mathbb{R}^m}I_1\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}|v_i|^2\left(|\gamma_i|^2|t_r^{\pi^r(i)}|^{2H}+|\bar{\gamma}_i|^2|t_{k-1}^{\pi^{k-1}(i)}|^{2H}\right)\right)\mathrm{d}v\mathrm{d}t_r\\
&\le C\int_{D\left(\pi^1,\cdots,\pi^m\right)}\int_{\mathbb{R}^m}|\mathscr{F}f(v_1-v_2)-\mathscr{F}f(-v_2)|\prod_{l=2}^{m-1}|\mathscr{F}f(v_l-v_{l+1})||\mathscr{F}f(v_m)|\\
&\times\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}|v_i|^2\left(|\gamma_i|^2|t_r^{\pi^r(i)}|^{2H}+|\bar{\gamma}_i|^2|t_{k-1}^{\pi^{k-1}(i)}|^{2H}\right)\right)\mathrm{d}v\mathrm{d}t_r\\
&\le(N(f))^m\int_{D\left(\pi^1,\cdots,\pi^m\right)}\int_{\mathbb{R}^m}|v_1|^{\alpha_1}\prod_{l=2}^{m-1}\left(|v_l|^{\alpha_l}+|v_{l+1}|^{\alpha_{l+1}}\right)|v_m|^{\alpha_m}\\
&\times\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}|v_i|^2\left(|\gamma_i|^2|t_r^{\pi^r(i)}|^{2H}+|\bar{\gamma}_i|^2|t_{k-1}^{\pi^{k-1}(i)}|^{2H}\right)\right)\mathrm{d}v\mathrm{d}t_r\\
&\le(N(f))^m\sum_{S}\int_{D\left(\pi^1,\cdots,\pi^m\right)}\int_{\mathbb{R}^m}|v_1|^{\alpha_1}\prod_{l=2}^{m-1}\left(|v_l|^{\alpha_l\rho_l}|v_{l+1}|^{\bar{\rho}_l\alpha_{l+1}}\right)|v_m|^{L_m}\\
&\times\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}|v_i|^2\left(|\gamma_i|^2|t_r^{\pi^r(i)}|^{2H}+|\bar{\gamma}_i|^2|t_{k-1}^{\pi^{k-1}(i)}|^{2H}\right)\right)\mathrm{d}v\mathrm{d}t_r
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq (N(f))^m \sum_S \int_{D\left(\pi^1,\cdots,\pi^m\right)} \int_{\mathbb{R}^m} |v_1|^{\alpha_1} |v_2|^{\rho_2\alpha_2} \prod_{l=3}^{m-1} \left(|v_l|^{\alpha_l\rho_l+\bar{\rho}_{l-1}\alpha_{l-1}}\right) |v_m|^{\alpha_m} \\
&\times \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m |v_i|^2 \left(|\gamma_i|^2 |t_r^{\pi^r(i)}|^{2H} + |\bar{\gamma}_i|^2 |t_{k-1}^{\pi^{k-1}(i)}|^{2H}\right)\right) \mathrm{d}v\mathrm{d}t_r, \qquad (5.2.46)
\end{aligned}
$$

其中 $\mathrm{d}t_r = \prod_{i=1}^m \mathrm{d}t_r^{\pi^r(i)}$,

$$
S = \{\rho_l:\ \rho_l \in \{0,1\},\ \rho_l + \bar{\rho}_l = 1,\ l = 2,\cdots,m-1\},
$$

$\alpha_l \in (0,1],\ l = 1,\cdots,m$ 且

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^m} (v_1)^{\alpha} \exp\left(-\frac{1}{2}|v_1|^2 \left(|\gamma_1|^2 |t_r^{\pi^r(1)}|^{2H} + |\bar{\gamma}_1|^2 |t_{k-1}^{\pi^{k-1}(1)}|^{2H}\right)\right) \mathrm{d}v_1 \\
&\leq C\left(|\gamma_1|^2 |t_r^{\pi^r(1)}|^{2H} + |\bar{\gamma}_1|^2 |t_{k-1}^{\pi^{k-1}(1)}|^{2H}\right)^{-\frac{1}{2}(1+\alpha_1)} \\
&\leq C\left(|t_r^{\pi^r(1)} t_{k-1}^{\pi^{k-1}(1)}|\right)^{-\frac{H}{2}(1+\alpha_1)}, \qquad (5.2.47)
\end{aligned}
$$

所以 (5.2.46) 可写为

$$
\begin{aligned}
&\int_{D\left(\pi^1,\cdots,\pi^m\right)} \int_{\mathbb{R}^m} I_1 \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m |v_i|^2 \left(|\gamma_i|^2 |t_r^{\pi^r(i)}|^{2H} + |\bar{\gamma}_i|^2 |t_{k-1}^{\pi^{k-1}(i)}|^{2H}\right)\right) \mathrm{d}v\mathrm{d}t_r \\
&\leq C(N(f))^m \sum_S \int_{D\left(\pi^1,\cdots,\pi^m\right)} \left(|t_r^{\pi^r(1)} t_{k-1}^{\pi^{k-1}(1)}|\right)^{-\frac{H}{2}(1+\alpha_1)} \left(|t_r^{\pi^r(2)} t_{k-1}^{\pi^{k-1}(1)}|\right)^{-\frac{H}{2}(1+\alpha_2\rho_2)} \\
&\times \prod_{l=1}^{m-1} \left(|t_r^{\pi^r(l)} t_{k-1}^{\pi^{k-1}(l)}|\right)^{-\frac{H}{2}(1+\alpha_l\rho_l+\alpha_{l-1}\bar{\rho}_{l-1})} \left(|t_r^{\pi^r(m)} t_{k-1}^{\pi^{k-1}(m)}|\right)^{-\frac{H}{2}(1+\alpha_m\rho_m+\alpha_{m-1}\bar{\rho}_{m-1})} \mathrm{d}t_r,
\end{aligned}
$$

(5.2.48)

其中用到不等式 $a^{2H} + b^{2H} \geq 2(ab)^H$.

若假设

$$
\frac{H}{2}(1+\alpha_1) < 1, \quad \frac{H}{2}(1+\alpha_2\rho_2) < 1,
$$

$$
\frac{H}{2}(1+\alpha_l\rho_l+\alpha_{l-1}\bar{\rho}_{l-1}) < 1,
$$

且

$$
\frac{H}{2}(1+\alpha_m\rho_m+\alpha_{m-1}\bar{\rho}_{m-1}) < 1,
$$

则根据命题 4.3.1, (5.2.45) 可重写为

$$
\begin{aligned}
&\Delta_n^{m(H+1)}\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\int_{D\left(\pi^1,\cdots,\pi^m\right)}\int_{\mathbb{R}^m} I_1 \\
&\times\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m|v_i|^2\left(|\gamma_i|^2|t_r^{\pi^r(i)}|^{2H}+|\bar{\gamma}_i|^2|t_{k-1}^{\pi^{k-1}(i)}|^{2H}\right)\right)\mathrm{d}v\mathrm{d}t_r \\
&\leq C\Delta_n^{m(H+1)}(N(f))^m\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\sum_S\prod_{i=1}^m\left|t_{k-1}^{\pi^{k-1}(i)}\right|^{-\frac{H}{2}(1+\alpha_i)}\int_{D\left(\pi^1,\cdots,\pi^m\right)}\left|t_r^{\pi^r(i)}\right|^{-\frac{H}{2}(1+\alpha_i)}\mathrm{d}t_r \\
&\leq C\Delta_n^{m(H+1)}(N(f))^m\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\left|t_{k-1}^{\pi^{k-1}(i)}\right|^{-\frac{H}{2}\sum_{i=1}^m(1+\alpha_i)} \\
&\times\frac{\prod_{i=1}^m\Gamma\left(1-\frac{H}{2}(1+\alpha_i)\right)}{\Gamma\left(m+1-\sum_{i=1}^m\alpha_i\right)}\left(\frac{T}{n}\right)^{\sum_{i=1}^m\left(1-\frac{H}{2}(1+\alpha_i)\right)}.
\end{aligned}\tag{5.2.49}
$$

令 $\varepsilon>0$, 若 $H=1$, 则取 $\alpha_1=\frac{2-H}{H}-\varepsilon=1-\varepsilon$, 否则取 $\alpha_1=1$. 对于 $i=2,\cdots,m$, 取 $\alpha_i=\frac{2-H}{2H}-\varepsilon$, 根据 α_i 的取值可得

$$
m(H+1)+H\sum_{i=1}^m(1+\alpha_i)=\begin{cases}Hm(\varepsilon+1)-m=m\varepsilon, & H=1,\\[2ex] \frac{H}{2}m-Hm\varepsilon, & \frac{2}{3}<H<1.\end{cases}\tag{5.2.50}
$$

因此, 可以选择合适的 ε 使得 $m(H+1)+H\sum\limits_{i=1}^m(1+\alpha_i)=\theta$ 且

$$
\begin{aligned}
&\Delta_n^{m(H+1)}\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\int_{D\left(\pi^1,\cdots,\pi^m\right)}\int_{\mathbb{R}^m} \\
&\times I_1\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m|v_i|^2\left(|\gamma_i|^2|t_r^{\pi^r(i)}|^{2H}+|\bar{\gamma}_i|^2|t_{k-1}^{\pi^{k-1}(i)}|^{2H}\right)\right)\mathrm{d}v\mathrm{d}t_r \\
&\leq C\Delta_n^{m(H+1)}(N(f))^m\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\left|t_{k-1}^{\pi^{k-1}(i)}\right|^{-\frac{H}{2}\sum_{i=1}^m(1+\alpha_i)} \\
&\times\frac{\prod_{i=1}^m\Gamma\left(1-\frac{H}{2}(1+\alpha_i)\right)}{\Gamma\left(m+1-\sum_{i=1}^m\alpha_i\right)}\left(\frac{T}{n}\right)^{\sum_{i=1}^m\left(1-\frac{H}{2}(1+\alpha_i)\right)} \\
&\leq C(N(f))^m n^{-\theta}T^{mH+\theta}.
\end{aligned}\tag{5.2.51}
$$

第二步: 接下来考虑 $l=2$ 的情形.

因为

$$
\begin{aligned}
&\Delta_n^{m(H+1)}\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\int_{D(\pi^1,\cdots,\pi^m)}\int_{\mathbb{R}^m}\\
&\times I_2\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m|v_i|^2\left(|\gamma_i|^2|t_r^{\pi^r(i)}|^{2H}+|\bar{\gamma}_i|^2|t_{k-1}^{\pi^{k-1}(i)}|^{2H}\right)\right)\mathrm{d}v\mathrm{d}t_r\\
&\le C\Delta_n^{m(H+1)}\\
&\times\int_{D(\pi^1,\cdots,\pi^m)}\int_{\mathbb{R}^m}|\mathscr{F}f(v_2-v_3)-\mathscr{F}f(v_2)||-\mathscr{F}f(v_2)|\left(\prod_{l=3}^m|\mathscr{F}(v_l-v_{l+1})|\right)\\
&\times\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m|v_i|^2\left(|\gamma_i|^2|t_r^{\pi^r(i)}|^{2H}+|\bar{\gamma}_i|^2|t_{k-1}^{\pi^{k-1}(i)}|^{2H}\right)\right)\mathrm{d}v\mathrm{d}t_r. \qquad (5.2.52)
\end{aligned}
$$

同第一步的处理方法, 可得

$$
\begin{aligned}
&\int_{D(\pi^1,\cdots,\pi^m)}\int_{\mathbb{R}^m}I_2\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m|v_i|^2\left(|\gamma_i|^2|t_r^{\pi^r(i)}|^{2H}+|\bar{\gamma}_i|^2|t_{k-1}^{\pi^{k-1}(i)}|^{2H}\right)\right)\mathrm{d}v\mathrm{d}t_r\\
&\times\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m|v_i|^2\left(|\gamma_i|^2|t_r^{\pi^r(i)}|^{2H}+|\bar{\gamma}_i|^2|t_{k-1}^{\pi^{k-1}(i)}|^{2H}\right)\right)\mathrm{d}v\mathrm{d}t_r\\
&\le(N(f))^m\int_{D(\pi^1,\cdots,\pi^m)}\int_{\mathbb{R}^m}|v_2|^{\alpha_2}|v_3|^{\alpha_3}\prod_{l=3}^{m-1}(|v_l|^{\alpha_l}+|v_{l+1}|^{\alpha_{l+1}})|v_m|^{\alpha_m}\\
&\times\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m|v_i|^2\left(|\gamma_i|^2|t_r^{\pi^r(i)}|^{2H}+|\bar{\gamma}_i|^2|t_{k-1}^{\pi^{k-1}(i)}|^{2H}\right)\right)\mathrm{d}v\mathrm{d}t_r\\
&\le(N(f))^m\sum_S\int_{D(\pi^1,\cdots,\pi^m)}\int_{\mathbb{R}^m}|v_2|^{\alpha_2}|v_3|^{\alpha_3}\prod_{l=3}^{m-1}\left(|v_l|^{\alpha_l\rho_l}|v_{l+1}|^{\bar{\rho}_l\alpha_{l+1}}\right)|v_m|^{\alpha_m}\\
&\times\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m|v_i|^2\left(|\gamma_i|^2|t_r^{\pi^r(i)}|^{2H}+|\bar{\gamma}_i|^2|t_{k-1}^{\pi^{k-1}(i)}|^{2H}\right)\right)\mathrm{d}v\mathrm{d}t_r\\
&\le(N(f))^m\sum_S\int_{D(\pi^1,\cdots,\pi^m)}\int_{\mathbb{R}^m}|v_2|^{\alpha_2}|v_3|^{\alpha_3}\prod_{l=3}^{m-1}\left(|v_l|^{\alpha_l\rho_l+\bar{\rho}_{l-1}\alpha_{l-1}}\right)|v_m|^{\alpha_m}\\
&\times\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m|v_i|^2\left(|\gamma_i|^2|t_r^{\pi^r(i)}|^{2H}+|\bar{\gamma}_i|^2|t_{k-1}^{\pi^{k-1}(i)}|^{2H}\right)\right)\mathrm{d}v\mathrm{d}t_r\\
&\le C(N(f))^m\sum_{S_1}\int_{D(\pi^1,\cdots,\pi^m)}\left(|t_r^{\pi^r(1)}t_{k-1}^{\pi^{k-1}(1)}|\right)^{-\frac{H}{2}}\left(|t_r^{\pi^r(2)}t_{k-1}^{\pi^{k-1}(2)}|\right)^{-\frac{H}{2}(1+\alpha_1)}\\
&\times\left(|t_r^{\pi^r(3)}t_{k-1}^{\pi^{k-1}(3)}|\right)^{-\frac{H}{2}(1+\alpha_2+\rho_3\alpha_3)}\prod_{l=4}^{m-1}\left(|t_r^{\pi^r(l)}t_{k-1}^{\pi^{k-1}(l)}|\right)^{-\frac{H}{2}(1+\alpha_l\rho_l+\alpha_{l-1}\bar{\rho}_{l-1})}
\end{aligned}
$$

$$\times\left(|t_r^{\pi^r(m)}t_{k-1}^{\pi^{k-1}(m)}|\right)^{-\frac{H}{2}(1+\alpha_m+\alpha_{m-1}\bar{\rho}_{m-1})}\mathrm{d}t_r, \tag{5.2.53}$$

其中 $S_1=\{\rho_l,\bar{\rho}_l\in\{0,1\},\rho_l+\bar{\rho}_l=1,\ l=3,\cdots,m-1\}$, 则根据引理 4.3.2, (5.2.52) 可重写为

$$\begin{aligned}
&\Delta_n^{m(H+1)}\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\int_{[t_{1,k-1},t_{1,k}]}\cdots\int_{[t_{m,k-1},t_{m,k}]}\int_{\mathbb{R}^m}I_2\\
&\times\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m|v_i|^2\left(|\gamma_i|^2|t_r^{\pi^r(i)}|^{2H}+|\bar{\gamma}_i|^2|t_{k-1}^{\pi^{k-1}(i)}|^{2H}\right)\right)\mathrm{d}v\mathrm{d}t_r\\
&\le C\Delta_n^{m(H+1)}(N(f))^m\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\left|t_{k-1}^{\pi^{k-1}(i)}\right|^{-\frac{H}{2}\sum\limits_{i=1}^m(1+\alpha_i)}\\
&\times\frac{\prod\limits_{i=1}^m\Gamma\left(1-\frac{H}{2}(1+\alpha_i)\right)}{\Gamma\left(m+1-\sum\limits_{i=1}^m\alpha_i\right)}\left(\frac{T}{n}\right)^{\sum\limits_{i=1}^m\left(1-\frac{H}{2}(1+\alpha_i)\right)}.
\end{aligned}\tag{5.2.54}$$

第三步: 假设 $l=m$ 为偶数, 则由 (5.2.44) 可得

$$\begin{aligned}
&\Delta_n^{\frac{m(H+1)}{2}}\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\int_{[t_{1,k-1},t_{1,k}]}\cdots\int_{[t_{m,k-1},t_{m,k}]}\int_{\mathbb{R}^m}\left(\prod_{i=1}^{\frac{m}{2}}\mathscr{F}f(v_{2i})\right)\\
&\times E\left(\prod_{i=1}^m\left(e^{-\iota u_iB^H_{t_{i,r}}}-e^{-\iota u_iB^H_{t_{i,k-1}}}\right)\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}t_{m,r}\cdots\mathrm{d}t_{1,r}\\
&\le C\Delta_n^{\frac{m(H+1)}{2}}\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\sum_{\pi^1,\cdots,\pi^n}\left(\int_{D(\pi^1,\cdots,\pi^m)}\int_{\mathbb{R}^2}|\mathscr{F}f(v_2)|^2\right.\\
&\left.\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m|v_i|^2\left(|\gamma_i|^2|t_r^{\pi^r(i)}|^{2H}+|\bar{\gamma}_i|^2|t_{k-1}^{\pi^{k-1}(i)}|^{2H}\right)\right)\mathrm{d}v\mathrm{d}t_r\right)^{\frac{m}{2}}\\
&\le C\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\sum_{\pi^1,\cdots,\pi^n}\left(\int_{\mathbb{R}^2}|\mathscr{F}f(x)|^2|x|^{-\frac{H}{2}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{m}{2}}T^{\frac{m(2-H)}{2}}\\
&\le C(N(f))^mT^{\frac{m(2-H)}{2}}.
\end{aligned}\tag{5.2.55}$$

第四步: 当 l 为奇数且 $3\le l\le m$ 时, 有

$$A_{l,m}:=\Delta_n^{\frac{m(H+1)}{2}}\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\int_{[t_{1,k-1},t_{1,k}]}\cdots\int_{[t_{m,k-1},t_{m,k}]}\int_{\mathbb{R}^m}I_l$$

$$
\begin{aligned}
&\times\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}|v_i|^2\left(|\gamma_i|^2|t_r^{\pi^r(i)}|^{2H}+|\bar{\gamma}_i|^2|t_{k-1}^{\pi^{k-1}(i)}|^{2H}\right)\right)\mathrm{d}v\mathrm{d}t_r\\
&=\Delta_n^{\frac{m(H+1)}{2}}\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\int_{[t_{1,k-1},t_{1,k}]}\cdots\int_{[t_{m,k-1},t_{m,k}]}\int_{\mathbb{R}^m}\left(\prod_{j=1}^{\frac{l-1}{2}}|\mathscr{F}f(v_{2j})|^2\right.\\
&\times|\mathscr{F}f(v_l-v_{l+1})-\mathscr{F}f(-v_{l+1})|\prod_{j=l+1}^{m}|\mathscr{F}f(v_j-v_{j+1})|\\
&\left.\times\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}|v_i|^2\left(|\gamma_i|^2|t_r^{\pi^r(i)}|^{2H}+|\bar{\gamma}_i|^2|t_{k-1}^{\pi^{k-1}(i)}|^{2H}\right)\right)\right)\mathrm{d}v\mathrm{d}t_r\\
&:=A_{l-1,l-1}A_{1,m-l+1}. \qquad (5.2.56)
\end{aligned}
$$

因为 $l-1$ 为偶数, 则由第三步可得:

$$
A_{l-1,l-1}\leq C(N(f))^{l-1}T^{\frac{(l-1)(2-H)}{2}}. \qquad (5.2.57)
$$

对于 $A_{1,m-l+1}$, 同第一步的证明可知

$$
A_{1,m-l+1}\leq C(N(f))^{m-l+1}n^{-\theta}T^{(m-l+1)\frac{H}{2}+\theta_1}, \qquad (5.2.58)
$$

其中 $\theta_1=(m-l+1)(H+1)+H\sum_{i=1}^{(m-l+1)}(1+\alpha_i)$.

第五步: 当 l 为偶数且 $4\leq l\leq m-1$ 时, 记

$$
\begin{aligned}
B_{l,m}&:=\Delta_n^{\frac{m(H+1)}{2}}\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\int_{[t_{1,k-1},t_{1,k}]}\cdots\int_{[t_{m,k-1},t_{m,k}]}\int_{\mathbb{R}^m}I_l\\
&\times\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}|v_i|^2\left(|\gamma_i|^2|t_r^{\pi^r(i)}|^{2H}+|\bar{\gamma}_i|^2|t_{k-1}^{\pi^{k-1}(i)}|^{2H}\right)\right)\mathrm{d}v\mathrm{d}t_r\\
&=\Delta_n^{\frac{m(H+1)}{2}}\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\int_{[t_{1,k-1},t_{1,k}]}\cdots\int_{[t_{m,k-1},t_{m,k}]}\int_{\mathbb{R}^m}\left(\prod_{j=1}^{\frac{l-1}{2}}|\mathscr{F}f(v_{2j})|^2\right.\\
&\times|\mathscr{F}f(v_l-v_{l+1})-\mathscr{F}f(-v_{l+1})|\prod_{j=l+1}^{m}|\mathscr{F}f(v_j-v_{j+1})|\\
&\left.\times\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}|v_i|^2\left(|\gamma_i|^2|t_r^{\pi^r(i)}|^{2H}+|\bar{\gamma}_i|^2|t_{k-1}^{\pi^{k-1}(i)}|^{2H}\right)\right)\right)\mathrm{d}v\mathrm{d}t_r\\
&:=B_{l-2,l-2}B_{2,m-l+2}. \qquad (5.2.59)
\end{aligned}
$$

因为 $l-2$ 为偶数, 则由第三步可得

$$B_{l-2,l-2} \leq C(N(f))^{l-2} T^{\frac{(l-2)(2-H)}{2}}. \tag{5.2.60}$$

对于 $B_{2,m-l+2}$, 同第一步的证明可知

$$B_{2,m-l+2} \leq C(N(f))^{m-l+2} n^{-\theta} T^{(m-l+2)\frac{H}{2}+\theta_2}, \tag{5.2.61}$$

其中 $\theta_2 = (m-l+2)(H+1) + H\sum_{i=1}^{(m-l+2)}(1+\alpha_i)$.

综上可得,

$$\begin{aligned}
&\Delta_n^{\frac{m(H+1)}{2}} \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \int_{D(\pi^1,\cdots,\pi^m)} \int_{\mathbb{R}^m} I_l \times \\
&\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m |v_i|^2 \left(|\gamma_i|^2 |t_r^{\pi^r(i)}|^{2H} + |\bar{\gamma}_i|^2 |t_{k-1}^{\pi^{k-1}(i)}|^{2H}\right)\right) \mathrm{d}v \mathrm{d}t_r^{\pi^r(m)} \cdots \mathrm{d}t_r^{\pi^r(1)} \\
&\leq \begin{cases} C(N(f))^m T^{\frac{mH}{2}}, & l \text{ 为偶数}, \\ C(N(f))^m T^{mH+\theta} n^{-\theta}, & l \text{ 为奇数}, \end{cases}
\end{aligned} \tag{5.2.62}$$

其中 C 在不同行表示不同的正常数且 $\theta = m(H+1) + H\sum_{i=1}^m (1+\alpha_i)$. □

注 5.2.1 根据命题 5.2.2 和命题 5.2.3 的结论可证得当 $n \to \infty$ 时, (5.2.33) 成立.

5.2.2.2 偶数阶矩的收敛

在证明偶数阶矩 (5.2.34) 的收敛时借鉴文献 [14, 118] 中定理 1.1 的证明, 其中分数布朗运动的局部非确定性起到了至关重要的作用. 为了清楚起见, 接下来给出详细证明过程.

命题 5.2.4 若

$$F_n = \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathscr{F} f(u) \left(e^{-\iota u B_{t_r}^H} - e^{-\iota u B_{t_{k-1}}^H}\right) \mathrm{d}u \mathrm{d}t_r, \tag{5.2.63}$$

$$H_n = \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{1}{2\pi} \int_{|u|<1} \mathscr{F} f(0) \left(e^{-\iota u B_{t_r}^H} - e^{-\iota u B_{t_{k-1}}^H} \right) \mathrm{d}u \mathrm{d}t_r, \tag{5.2.64}$$

则有

$$\lim_{n\to\infty} (\Delta_n)^{\frac{H+1}{2}} \mathbb{E}[F_n - H_n] = 0. \tag{5.2.65}$$

证明. 根据 F_n, H_n 的具体表达式将 $F_n - H_n$ 可分解为:

$$F_n - H_n := I_{n,1} + I_{n,2} + I_{n,3} + I_{n,4}, \tag{5.2.66}$$

其中

$$I_{n,1} = \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \int_{[0,T]-[t_{k-1},t_k]} f\left(B_{t_r}^H\right) - f\left(B_{t_k}^H\right) \mathrm{d}t_r, \tag{5.2.67}$$

$$I_{n,2} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \int_{[t_{k-1},t_k]} \int_{|u|\geq 1} \mathscr{F} f(u) \left(e^{-\iota u B_{t_r}^H} - e^{-\iota u B_{t_{k-1}}^H} \right) \mathrm{d}u \mathrm{d}t_r, \tag{5.2.68}$$

$$I_{n,3} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \int_{[t_{k-1},t_k]} \int_{|u|<1} \mathscr{F} f(u) \left(e^{-\iota u B_{t_r}^H} - e^{-\iota u B_{t_{k-1}}^H} \right) \mathrm{d}u \mathrm{d}t_r, \tag{5.2.69}$$

$$I_{n,4} = -\frac{\mathscr{F} f(0)}{2\pi} \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \int_{[0,T]-[t_{k-1},t_k]} \int_{|u|<1} \left(e^{-\iota u B_{t_r}^H} - e^{-\iota u B_{t_{k-1}}^H} \right) \mathrm{d}u \mathrm{d}t_r. \tag{5.2.70}$$

对于 $I_{n,1}$, 根据占位时的定义可得

$$\begin{aligned}(\Delta_n)^{\frac{H+1}{2}} \mathbb{E}\left[|I_{n,1}|^2\right] \leq (\Delta_n)^{\frac{H+1}{2}} \sup_{u\in\mathbb{R}} |f(u)| + (\Delta_n)^{\frac{H+1}{2}} T^{1-H} \left(\int_{\mathbb{R}} f(u) \mathrm{d}u \right) \\ \longrightarrow 0,\ n \longrightarrow \infty. \end{aligned} \tag{5.2.71}$$

对于 $I_{n,2}$, 有

$$(\Delta_n)^{\frac{H+1}{2}} E\left[|I_{n,2}|^2\right] \leq C(\Delta_n)^{\frac{H+1}{2}} \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \int_{[t_{1,k-1},t_{1,k}]} \int_{[t_{2,k-1},t_{2,k}]} \int_{|u_1|,|u_2|\geq 1} \mathscr{F} f(u_1) \mathscr{F} f(u_2) \times \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{2}\left(e^{-\iota u_i B^H_{t_{i,r}}} - e^{-\iota u_i B^H_{t_{i,k-1}}}\right)\right] \prod_{i=1}^{2} \mathrm{d}u_i \mathrm{d}t_{i,r}. \tag{5.2.72}$$

根据局部非确定可得

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{2}\left(e^{-\iota u_i B^H_{t_{i,r}}} - e^{-\iota u_i B^H_{t_{i,k-1}}}\right)\right] \leq \left(\exp\left\{-\frac{C_1}{2}\sum_{i=1}^{2}|u_i|^2|t_{i,r}|^{2H}\right\} + \exp\left\{-\frac{C_2}{2}\sum_{i=1}^{2}|u_i|^2|t_{i,k-1}|^{2H}\right\}\right). \tag{5.2.73}$$

结合不等式

$$\int_0^T e^{p^2 t^{2\beta}} \mathrm{d}t \leq \frac{C}{1+p^{\frac{1}{\beta}}} \tag{5.2.74}$$

和 $|\mathscr{F} f(u)| \leq (1 \wedge |u|)$, 可得

$$\begin{aligned}
&(\Delta_n)^{\frac{H+1}{2}} \mathbb{E}\left[|I_{n,2}|^2\right] \\
&\leq C(\Delta_n)^{\frac{H+1}{2}} \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \int_{[t_{1,k-1},t_{1,k}]} \int_{[t_{2,k-1},t_{2,k}]} \int_{|u_1|,|u_2|\geq 1} \mathscr{F} f(u_1) \mathscr{F} f(u_2) \\
&\times \left(\exp\left\{-\frac{C_1}{2}\sum_{i=1}^{2}|u_i|^2|t_{i,r}|^{2H}\right\} + \exp\left\{-\frac{C_2}{2}\sum_{i=1}^{2}|u_i|^2|t_{i,k-1}|^{2H}\right\}\right) \prod_{i=1}^{2} \mathrm{d}u_i \mathrm{d}t_{i,r} \\
&\leq C(\Delta_n)^{\frac{H+1}{2}} \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \int_{|u_1|,|u_2|\geq 1} \mathscr{F} f(u_1) \mathscr{F} f(u_2) \frac{1}{1+|u_1|^{\frac{1}{H}}} \frac{1}{1+|u_2|^{\frac{1}{H}}} \prod_{i=1}^{2} \mathrm{d}u_i \\
&+ Cn(\Delta_n)^{\frac{H}{2}+2} \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \int_{|u_1|,|u_2|\geq 1} \mathscr{F} f(u_1) \mathscr{F} f(u_2) \left(\exp\left\{-\frac{C_2}{2}\sum_{i=1}^{2}|u_i|^2|t_{i,k-1}|^{2H}\right\}\right) \prod_{i=1}^{2} \mathrm{d}u_i \\
&\leq C(\Delta_n)^{\frac{H+1}{2}} \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \int_{|u_1|,|u_2|\geq 1} \mathscr{F} f(u_1) \mathscr{F} f(u_2) \frac{1}{1+|u_1|^{\frac{1}{H}}} \frac{1}{1+|u_2|^{\frac{1}{H}}} \prod_{i=1}^{2} \mathrm{d}u_i + C(n\Delta_n)^{\frac{H+1}{2}+2} \\
&\longrightarrow 0, \ \ n \longrightarrow \infty.
\end{aligned} \tag{5.2.75}$$

接下来对于 $I_{n,3}$, 可得

$$
\begin{aligned}
&(\Delta_n)^{\frac{H+1}{2}}\mathbb{E}\left[|I_{n,3}|^2\right]\\
&\leq C(\Delta_n)^{\frac{H+1}{2}}\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\int_{[t_{1,k-1},t_{1,k}]}\int_{[t_{2,k-1},t_{2,k}]}\int_{|u_1|,|u_2|<1}\mathscr{F}f(u_1)\mathscr{F}f(u_2)\\
&\times\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{2}\left(e^{-\iota u_iB^H_{t_{i,r}}}-e^{-\iota u_iB^H_{t_{i,k-1}}}\right)\right]\prod_{i=1}^{2}\mathrm{d}u_i\mathrm{d}t_{i,r}\\
&\leq C(\Delta_n)^{\frac{H+1}{2}}\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\int_{|u_1|,|u_2|<1}\mathscr{F}f(u_1)\mathscr{F}f(u_2)\times\\
&\left(\exp\left\{-\frac{C_1}{2}\sum_{i=1}^{2}|u_i|^2|t_{i,r}|^{2H}\right\}+\exp\left\{-\frac{C_2}{2}\sum_{i=1}^{2}|u_i|^2|t_{i,k-1}|^{2H}\right\}\right)\prod_{i=1}^{2}\mathrm{d}u_i\mathrm{d}t_{i,r}\\
&\leq C(\Delta_n)^{\frac{H+1}{2}}\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\int_{|u_1|,|u_2|<1}|u_1|^{\beta_1}|u_2|^{\beta_2}\times\\
&\left(\exp\left\{-\frac{C_1}{2}\sum_{i=1}^{2}|u_i|^2|t_{i,r}|^{2H}\right\}+\exp\left\{-\frac{C_2}{2}\sum_{i=1}^{2}|u_i|^2|t_{i,k-1}|^{2H}\right\}\right)\prod_{i=1}^{2}\mathrm{d}u_i\mathrm{d}t_{i,r}\\
&\leq C(\Delta_n)^{\frac{H+1}{2}}\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\int_{|u_1|,|u_2|<1}\prod_{i=1}^{2}\left(1\wedge|u_i|^{-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\\
&+C(\Delta_n)^{\frac{H+1}{2}}\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\int_{|u_1|,|u_2|<1}|u_1|^{\beta_1}|u_2|^{\beta_2}\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\longrightarrow 0,\ \ n\longrightarrow\infty,
\end{aligned}\tag{5.2.76}
$$

其中用到不等式

$$
\int_0^T e^{-a^2u^{2H}}\mathrm{d}u\leq C\left(1\wedge a^{-\frac{1}{2}}\right).\tag{5.2.77}
$$

对于 $I_{n,4}$, 同 $I_{n,2}$, $I_{n,3}$ 的处理方式可得

$$
\begin{aligned}
&(\Delta_n)^{\frac{H+1}{2}}\mathbb{E}\left[|I_{n,4}|^2\right]\\
&\leq C(\Delta_n)^{\frac{H+1}{2}}\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\int_{[0,T]-[t_{1,k-1},t_{1,k}]}\int_{[0,T]-[t_{2,k-1},t_{2,k}]}\int_{|u_1|,|u_2|<1}\mathbf{1}_{t_{1,r}<t_{2,r},t_{1,k-1}<t_{2,k-1}}\\
&\times\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{2}\left(e^{-\iota u_iB^H_{t_{i,r}}}-e^{-\iota u_iB^H_{t_{i,k-1}}}\right)\right]\prod_{i=1}^{2}\mathrm{d}u_i\mathrm{d}t_{i,r}\\
&\leq C(\Delta_n)^{\frac{H+1}{2}}\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\int_{[t_{1,k-1},t_{1,k}]}\int_{[t_{2,k-1},t_{2,k}]}\int_{|u_1|,|u_2|<1}\exp\left\{-\frac{C_H}{2}|u_2|^2|t_{2,r}-t_{1,r}|^{2H}\right\}
\end{aligned}
$$

$$\times\exp\left\{-\frac{C_H}{2}|u_1+u_2|^2|t_{1,r}|^{2H}\right\}+\exp\left\{-\frac{C_H}{2}|u_2|^2|t_{2,k-1}-t_{1,k-1}|^{2H}\right\}$$
$$\times\exp\left\{-\frac{C_H}{2}|u_1+u_2|^2|t_{1,k-1}|^{2H}\right\}\prod_{i=1}^{2}\mathrm{d}u_i\mathrm{d}t_{i,r}$$
$$\leq C(\Delta_n)^{\frac{H+1}{2}}\int_{|u|<1}\left(\int_0^T\exp\left\{-\frac{C_H}{2}|u^2||t_r|^{2H}\right\}\mathrm{d}t_r\right)^2\mathrm{d}u$$
$$\leq C(\Delta_n)^{\frac{H+1}{2}}\longrightarrow 0,\quad n\longrightarrow\infty. \tag{5.2.78}$$

综上可得

$$\lim_{n\to\infty}(\Delta_n)^{\frac{H+1}{2}}\mathbb{E}\left[F_n-H_n\right]=0.$$

□

为方便, 记

$$\bar{H}_n=\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\int_{[t_{1,k-1},t_{1,k}]}\int_{|u<1|}\left(e^{-\iota uB^H_{t_r}}-e^{-\iota uB^H_{t_{k-1}}}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}t_r, \tag{5.2.79}$$

则 $H_n=\frac{\mathscr{F}f(0)}{2\pi}\bar{H}_n$ 且求 H_n 的极限等价于求 $\bar{H}_n$ 的极限.

接下来给出 $\bar{H}_n$ 极限的证明.

命题 5.2.5 设 B^H_t 为分数布朗运动, 对任意 $t>0$, 有

$$(\Delta_n)^{\frac{H+1}{2}}\bar{H}_n\xrightarrow{d}\frac{1}{4}B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)\sqrt{2\pi}TN^2,\quad n\longrightarrow\infty, \tag{5.2.80}$$

其中 $B(\cdot,\cdot)$ 为 Beta 函数, N 为一个实值标准正态随机变量.

证明. 将证明过程分为几步来进行.

第一步: 首先证明 $(\Delta_n)^{\frac{H+1}{2}}\bar{H}_n$ 的紧性.

设 M^m_n 表示 $\bar{H}_n$ 的 m- 阶矩, 其中 m 为偶数, 则由 (5.2.79) 可得

$$M^m_n=\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\int_{[t_{1,k-1},t_{1,k}]}\cdots\int_{[t_{m,k-1},t_{m,k}]}\int_{B^m(0,1)}\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{m}\left(e^{-\iota u_iB^H_{t_{i,r}}}-e^{-\iota u_iB^H_{t_{i,k-1}}}\right)\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}t_r, \tag{5.2.81}$$

其中 $\mathrm{d}u=\prod_{i=1}^{m}\mathrm{d}u_i$, $\mathrm{d}t_r=\prod_{i=1}^{m}\mathrm{d}t_{i,r}$.

记

$$M_n=\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\int_{D(\pi^1,\cdots,\pi^n)}\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{m}\left(e^{-\iota u_iB^H_{t_{i,r}}}-e^{-\iota u_iB^H_{t_{i,k-1}}}\right)\right)\mathrm{d}t_r, \tag{5.2.82}$$

$$M_n^{\sigma}=\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\int_{D(\pi^1,\cdots,\pi^n)}\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{m}\left(e^{-\iota u_{\sigma(i)}B^H_{t_{\sigma(i),r}}}-e^{-\iota u_{\sigma(i)}B^H_{t_{\sigma(i),k-1}}}\right)\right)\mathrm{d}t_r, \tag{5.2.83}$$

其中 $\sigma\in\{\pi^1,\cdots,\pi^n\}$ 且

$$D(\pi^1,\cdots,\pi^n)=\{t_{i,r}\in[t_{i,k-1},t_{i,k}]|t_r^{\pi^r(i+1)}\geq t_r^{\pi^r(i)}\}. \tag{5.2.84}$$

根据 Cauchy-Schwarz 不等式可得

$$\begin{aligned}
&(\Delta_n)^{\frac{m(H+1)}{2}}M_n\\
&=(\Delta_n)^{\frac{m(H+1)}{2}}m!\sum_{\pi^1,\cdots,\pi^n}\int_{B^m(0,1)}M_nM_n^{\sigma}\mathrm{d}u\\
&\leq(\Delta_n)^{\frac{m(H+1)}{2}}m!\sum_{\pi^1,\cdots,\pi^n}\left(\int_{B^m(0,1)}(M_n)^2\mathrm{d}u\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{B^m(0,1)}(M_n^{\sigma})^2\mathrm{d}u\right)^{\frac{1}{2}}\\
&=(\Delta_n)^{\frac{m(H+1)}{2}}(m!)^2\sum_{\pi^1,\cdots,\pi^n}\int_{B^m(0,1)}(M_n)^2\mathrm{d}u\\
&=(\Delta_n)^{\frac{m(H+1)}{2}}(m!)^2\times\\
&\sum_{\pi^1,\cdots,\pi^n}\int_{B^m(0,1)}\left(\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\int_{D(\pi^1,\cdots,\pi^n)}\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{m}\left(e^{-\iota u_iB^H_{t_{i,r}}}-e^{-\iota u_iB^H_{t_{i,k-1}}}\right)\right)\mathrm{d}t_r\right)^2\mathrm{d}u\\
&\leq C(\Delta_n)^{\frac{m(H+1)}{2}}(m!)^2\sum_{\pi^1,\cdots,\pi^n}\int_{B^m(0,1)}\left(\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\int_{D(\pi^1,\cdots,\pi^n)}\times\right.\\
&\left.\exp\left(-\frac{C_H}{2}Var\left(\sum_{i=1}^{m}u_i\left(\gamma_i(B^H_{t_{i,r}}-B^H_{t_{i,k-1}})+B^H_{t_{i,k-1}}\right)\right)\right)\mathrm{d}t_r\right)^2\mathrm{d}u\\
&\leq C(\Delta_n)^{\frac{m(H+1)}{2}}(m!)^2\sum_{\pi^1,\cdots,\pi^n}\int_{B^m(0,1)}\left(\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\int_{D(\pi^1,\cdots,\pi^n)}\times\right.
\end{aligned}$$

$$\exp\left(-\frac{C_H}{2}\left(\sum_{i=1}^{m}|\sum_{j=i}^{m}u_j|^2\left(|\gamma_i|^2\left|t_r^{\pi^r(i)}-t_{k-1}^{\pi^{k-1}(i)}\right|^{2H}+\left|t_{k-1}^{\pi^{k-1}(i)}\right|^{2H}\right)\right)\right)\mathrm{d}t_r\Bigg)^2\mathrm{d}u. \tag{5.2.85}$$

对于 $i=1,\cdots,m$, 根据变量变换 $\Delta t_{i,r}=t_r^{\pi^r(i)}-t_{k-1}^{\pi^{k-1}(i)}$, $i=1,\cdots,m$ 和

$$v_i=\sum_{j=i}^{m}u_j, \tag{5.2.86}$$

(5.2.85) 可重写为

$$\begin{aligned}
&(\Delta_n)^{\frac{m(H+1)}{2}}M_n\\
&\le C(\Delta_n)^{\frac{m(H+1)}{2}}(m!)^2\int_{B^m(0,m)}\left(\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\int_{[0,T]^m}\times\right.\\
&\left.\exp\left(-\frac{C_H}{2}\left(\sum_{i=1}^{m}|v_j|^2\left(|\gamma_i|^2|\Delta t_{i,r}|^{2H}+\left|t_{k-1}^{\pi^{k-1}(i)}\right|^{2H}\right)\right)\right)\mathrm{d}\Delta t_{i,r}\right)^2\mathrm{d}v\\
&\le C(m!)^2\left((\Delta_n)^{\frac{H+1}{2}}\int_{|v_1|<m(T)^H}\left(\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\int_{[0,1]^m}\right.\right.\\
&\left.\left.\times\exp\left(-\frac{C_H}{2}\left(|v_1|^2\left(|\gamma_1|^2|\Delta t_r|^{2H}+\left|t_{k-1}^{\pi^{k-1}(1)}\right|^{2H}\right)\right)\right)\mathrm{d}\Delta t_{i,r}\right)^2\mathrm{d}v\right)^m\\
&\le C(m!)^2\left((\Delta_n)^{\frac{H+1}{2}}\int_{|v_1|<m(T)^H}\left(1\wedge|v_1|^{-1}\right)\mathrm{d}v\right)^m\le C_{m,H,T},
\end{aligned} \tag{5.2.87}$$

其中 $C_{m,H,T}$ 为仅依赖于 m, H, T 的正常数.

第二步：对任意正常数 $\eta>0$, 记

$$M_{n,\eta}=\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\int_{D_\eta(\pi^1,\cdots,\pi^n)}\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{m}\left(e^{-\imath u_iB^H_{t_{i,r}}}-e^{-\imath u_iB^H_{t_{i,k-1}}}\right)\right)\mathrm{d}t_r, \tag{5.2.88}$$

$$M^\sigma_{n,\eta}=\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\int_{D_\eta(\pi^1,\cdots,\pi^n)}\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{m}\left(e^{-\imath u_{\sigma(i)}B^H_{t_{\sigma(i),r}}}-e^{-\imath u_{\sigma(i)}B^H_{t_{\sigma(i),k-1}}}\right)\right)\mathrm{d}t_r, \tag{5.2.89}$$

其中

$$D_\eta(\pi^1,\cdots,\pi^n)=D(\pi^1,\cdots,\pi^n)-\cup_{1\le i\ne l\le m}\left(\Delta t_{l,r}/\eta\le\Delta t_{i,r}\le\eta\Delta t_{l,r}\right). \tag{5.2.90}$$

同第一步, 记

$$(\Delta_n)^{\frac{m(H+1)}{2}}M_{n,\eta}^m=m!(\Delta_n)^{\frac{m(H+1)}{2}}\sum_{\pi^1,\cdots,\pi^n}\int_{B^m(0,1)}M_{n,\eta}M_{n,\eta}^\sigma\mathrm{d}u, \tag{5.2.91}$$

则可得

$$\begin{aligned}
&M_n^m-M_{n,\eta}^m\\
=&m!\sum_{\pi^1,\cdots,\pi^n}\int_{B^m(0,1)}\left((M_n-M_{n,\eta})M_{n,\eta}^\sigma+\left(M_n^\sigma-M_{n,\eta}^\sigma\right)M_{n,\eta}\right)\mathrm{d}u\\
\le&m!\sum_{\pi^1,\cdots,\pi^n}\int_{B^m(0,1)}\left((M_n-M_{n,\eta})M_{n,\eta}^\sigma\right)^2\mathrm{d}u.
\end{aligned} \tag{5.2.92}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式和 (5.2.92) 可得

$$\begin{aligned}
&(\Delta_n)^{\frac{m(H+1)}{2}}\left(M_n^m-M_{n,\eta}^m\right)\\
\le&m!(\Delta_n)^{\frac{m(H+1)}{2}}\sum_{\pi^1,\cdots,\pi^n}\left(\int_{B^m(0,1)}(M_n-M_{n,\eta})^2\mathrm{d}u\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{5.2.93}$$

且

$$\begin{aligned}
&(\Delta_n)^{\frac{m(H+1)}{2}}\int_{B^m(0,1)}(M_n-M_{n,\eta})^2\mathrm{d}u\\
&=(\Delta_n)^{\frac{m(H+1)}{2}}\times\\
&\int_{B^m(0,1)}\left(\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\int_{D(\pi^1,\cdots,\pi^n)-D_\eta(\pi^1,\cdots,\pi^n)}\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^m\left(e^{-\imath u_iB^H_{t_{i,r}}}-e^{-\imath u_iB^H_{t_{i,k-1}}}\right)\right)\mathrm{d}t_r\right)^2\mathrm{d}u\\
&\le C\sum_{\pi^1,\cdots,\pi^n}(\Delta_n)^{\frac{m(H+1)}{2}}\int_{B^m(0,1)}\left(\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\int_{D(\pi^1,\cdots,\pi^n)-D_\eta(\pi^1,\cdots,\pi^n)}\times\right.\\
&\left.\exp\left(-\frac{C_H}{2}Var\left(\sum_{i=1}^m u_i\left(\gamma_i(B^H_{t_{i,r}}-B^H_{t_{i,k-1}})+B^H_{t_{i,k-1}}\right)\right)\right)\mathrm{d}t_r\right)^2\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le C(\Delta_n)^{\frac{m(H+1)}{2}} \sum_{1\le p\ne q\le m} \int_{|v_i|,|v_l|<m} \left(\sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \int_{[t_{k-1},t_k]} \int_{[\Delta t_{l,r}/\eta, \Delta t_{l,r}\eta]} \times \right. \\
&\left. \exp\left(-\frac{C_H}{2} \left(\left(|v_p|^2 \left| t_r^{\pi^r(p)} - t_{k-1}^{\pi^{k-1}(p)} \right|^{2H} + |v_q|^2 \left| t_{k-1}^{\pi^{k-1}(q)} \right|^{2H} \right) \right) \right) \mathrm{d}t_r^{\pi^r(p)} \right)^2 \mathrm{d}v_p \mathrm{d}v_q \\
&= C(\Delta_n)^{\frac{m(H+1)}{2}} \sum_{1\le p\ne q\le m} \int_{|v_i|,|v_l|<m} \int_{[t_{k-1},t_k]} \int_{[t_{k'-1},t'_k]} \int_{[\Delta t_{l,r}/\eta, \Delta t_{l,r}\eta]} \int_{[\Delta t_{l,r'}/\eta, \Delta t_{l,r'}\eta]} \\
&\times \exp\left(-\frac{C_H}{2} \left(\left(|v_p|^2 \left(\left| t_r^{\pi^r(p)} - t_{k-1}^{\pi^{k-1}(p)} \right|^{2H} + \left| t_{k-1}^{\pi^{k-1}(q)} \right|^{2H} \right) \right. \right. \right. \\
&\left. \left. \left. + |v_q|^2 \left(\left| t_{r'}^{\pi^{r'}(q)} - t_{k'-1}^{\pi^{k'-1}(q)} \right|^{2H} + \left| t_{k'-1}^{\pi^{k'-1}(q)} \right|^{2H} \right) \right) \right) \right) \mathrm{d}t_r^{\pi^r(p)} \mathrm{d}t_{r'}^{\pi^{r'}(q)} \mathrm{d}v_p \mathrm{d}v_q. \qquad (5.2.94)
\end{aligned}
$$

因为

$$
\begin{aligned}
&\int_{|v|<m} \int_{|v|<m} \exp\left(-\frac{C_H}{2} \left(u^2 |t^{2H}| + v^2 |s^{2H}| \right) \right) \mathrm{d}u \mathrm{d}v \\
&\le C|t|^{-\frac{H}{2}} (1 \wedge |s|^{-\frac{H}{2}}), \qquad (5.2.95)
\end{aligned}
$$

所以 (5.2.93) 可写为

$$
\begin{aligned}
&(\Delta_n)^{\frac{m(H+1)}{2}} \int_{B^m(0,1)} (M_n - M_{n,\eta})^2 \mathrm{d}u \\
&\le C(\Delta_n)^{\frac{m(H+1)}{2}} \sum_{1\le p\ne q\le m} \int_{[t_{k-1},t_k]} \int_{[t_{k'-1},t'_k]} \int_{[\Delta t_{l,r}/\eta, \Delta t_{l,r}\eta]} \int_{[\Delta t_{l,r'}/\eta, \Delta t_{l,r'}\eta]} \\
&\times \left(\left| t_r^{\pi^r(p)} - t_{k-1}^{\pi^{k-1}(p)} \right|^{2H} + \left| t_{k-1}^{\pi^{k-1}(q)} \right|^{2H} \right)^{-\frac{1}{2}} \\
&\times \left(1 \wedge \left(\left| t_{r'}^{\pi^{r'}(q)} - t_{k'-1}^{\pi^{k'-1}(q)} \right|^{2H} + \left| t_{k'-1}^{\pi^{k'-1}(q)} \right|^{2H} \right)^{-\frac{1}{2}} \right) \mathrm{d}t_r^{\pi^r(p)} \mathrm{d}t_{r'}^{\pi^{r'}(q)} \\
&\le C(\Delta_n)^{\frac{m(H+1)}{2}} \sum_{p=1}^{m} (\ln \eta) \\
&\times \int_{[t_{k-1},t_k]} \int_{[t_{k'-1},t'_k]} \left(1 \wedge \left(\left| t_{r'}^{\pi^{r'}(q)} - t_{k'-1}^{\pi^{k'-1}(q)} \right|^{2H} + \left| t_{k'-1}^{\pi^{k'-1}(q)} \right|^{2H} \right)^{-\frac{1}{2}} \right) \mathrm{d}t_r^{\pi^r(p)} \mathrm{d}t_{r'}^{\pi^{r'}(q)} \\
&\le C(\Delta_n)^{\frac{m(H+1)}{2}} (\ln \eta). \qquad (5.2.96)
\end{aligned}
$$

综上可得

$$0 \le (\Delta_n)^{\frac{m(H+1)}{2}} \left(M_n^m - M_{n,\eta}^m\right) \le C\left((\Delta_n)^{m(H+1)}(\ln\eta)\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{5.2.97}$$

即可知 $(\Delta_n)^{\frac{H+1}{2}} M_n^m$ 渐近等于 $(\Delta_n)^{\frac{H+1}{2}} M_{n,\eta}^m$.

第三步: 由第二步的证明可知, 仅需给出 $M_{n,\eta}^m$ 的估计.

首先, 为方便先给出几个简单的记号: 对任意 $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $y_1 > 0$, $y_2 > 0$, 记

$$\begin{aligned} &J_n^m(x_1,x_2,y) \\ =&m!\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\sum_{\pi^1,\cdots,\pi^n}\int_{B^m(0,x_1)}\int_{x_2 t_{k-1}^{\pi^{k-1}(i)}}^{x_2 t_k^{\pi^k(i)}}\exp\left(-y\sum_{i=1}^m|u_i\gamma_i|^2\left|t_r^{\pi^r(i)}-t_{k-1}^{\pi^{k-1}(i)}\right|^{2H}\right)\mathrm{d}t_r^{\pi^r}\mathrm{d}u, \end{aligned} \tag{5.2.98}$$

$$\begin{aligned} J_{n,\eta,1}^m(x_1,x_2,y) =& m!\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\sum_{\pi^1,\cdots,\pi^n} \\ &\times\int_{B^m(0,x_1)}\int_{[x_2 t_{k-1}^{\pi^{k-1}(i)},x_2 t_k^{\pi^k(i)}]-O_{m,\eta}}\exp\left(-y\sum_{i=1}^m|u_i\gamma_i|^2\left|t_r^{\pi^r(i)}-t_{k-1}^{\pi^{k-1}(i)}\right|^{2H}\right)\mathrm{d}t_r^{\pi^r}\mathrm{d}u, \end{aligned} \tag{5.2.99}$$

$$\begin{aligned} J_{n,\eta,2}^m(x_1,x_2,y) =& m!\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\sum_{\pi^1,\cdots,\pi^n} \\ &\times\int_{B_\eta^m(0,x_1)}\int_{[x_2 t_{k-1}^{\pi^{k-1}(i)},x_2 t_k^{\pi^k(i)}]-O_{m,\eta}}\exp\left(-y\sum_{i=1}^m|u_i\gamma_i|^2\left|t_r^{\pi^r(i)}-t_{k-1}^{\pi^{k-1}(i)}\right|^{2H}\right)\mathrm{d}t_r^{\pi^r}\mathrm{d}u, \end{aligned} \tag{5.2.100}$$

其中 $\mathrm{d}t_r^{\pi^r} = \prod_{i=1}^m \mathrm{d}t_r^{\pi^r(i)}, \mathrm{d}u = \prod_{i=1}^m \mathrm{d}u_i$,

$$O_{m,\eta} = \cup_{1\le i\ne l\le m}\left(t_r^{\pi^r(l)}/\eta \le t_r^{\pi^r(i)} \le \eta t_r^{\pi^r(l)}\right) \tag{5.2.101}$$

且

$$B_\eta^m(0,x_1)=\{y_i\in\mathbb{R}:|y_i|<x_1,i=1,2,\cdots,m\}-\cup_{1\le i\neq l\le m}\{|y_l|/\eta<|y_i|<|y_l|\eta\}. \tag{5.2.102}$$

同第二步, 可得

$$0\le(\Delta_n)^{\frac{m(H+1)}{2}}\left(J_n^m(x_1,x_2,y)-J_{n,\eta,1}^m(x_1,x_2,y)\right)\le C\left((\Delta_n)^{m(H+1)}(\ln\eta)\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{5.2.103}$$

且

$$0\le(\Delta_n)^{\frac{m(H+1)}{2}}\left(J_n^m(x_1,x_2,y)-J_{n,\eta,2}^m(x_1,x_2,y)\right)\le C\left((\Delta_n)^{m(H+1)}(\ln\eta)\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.2.104}$$

由 [10] 中的引理 4, 并结合 (5.2.103) 和 (5.2.104) 可得

$$\begin{aligned}M_{n,\eta}^m&\le J_n^m(m,1,\frac{1}{2}-\frac{C}{2\eta^H})\\&\le -C(\ln\eta)^{\frac{1}{2}}+J_{n,\eta,2}^m(m,1,\frac{1}{2}-\frac{C}{2\eta^H}),\end{aligned} \tag{5.2.105}$$

$$\begin{aligned}M_{n,\eta}^m&\ge -C(\ln\eta)^{\frac{1}{2}}+J_{n,\eta,1}^m(\frac{1}{m},\frac{1}{m},\frac{1}{2}+\frac{C}{2\eta^H})\\&\ge -C(\ln\eta)^{\frac{1}{2}}+J_n^m(\frac{1}{m},\frac{1}{m},\frac{1}{2}+\frac{C}{2\eta^H}).\end{aligned} \tag{5.2.106}$$

第四步: 最后给出 M_n^m 的极限并且证得其收敛的矩.

由前面的计算直接可得

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty}(\Delta_n)^{\frac{m(H+1)}{2}}M_{n,\eta}^m\\&\le\limsup_{n\to\infty}\limsup_{\eta\to\infty}(\Delta_n)^{\frac{m(H+1)}{2}}J_n^m(m,1,\frac{1}{2}-\frac{C}{2\eta^H})\\&=(2\pi)^{\frac{m}{2}}\left(\frac{1}{4}B(\frac{1}{4},\frac{1}{4})\right)^m(2m-1)!!T^m,\end{aligned} \tag{5.2.107}$$

$$\begin{aligned}
&\liminf_{n\to\infty}(\Delta_n)^{\frac{m(H+1)}{2}}M_{n,\eta}^m \\
&\geq \liminf_{n\to\infty}\liminf_{\eta\to\infty}(\Delta_n)^{\frac{m(H+1)}{2}}J_n^m(\frac{1}{m},\frac{1}{m},\frac{1}{2}+\frac{C}{2\eta^H}) \\
&=(2\pi)^{\frac{m}{2}}\left(\frac{1}{4}B(\frac{1}{4},\frac{1}{4})\right)^m(2m-1)!!T^m.
\end{aligned} \tag{5.2.108}$$

因为 $(\Delta_n)^{\frac{H+1}{2}}M_n^m$ 渐近等于 $(\Delta_n)^{\frac{H+1}{2}}M_{n,\eta}^m$, 所以由 (5.2.107) 和 (5.2.108) 可得

$$\lim_{n\to\infty}(\Delta_n)^{\frac{m(H+1)}{2}}M_n^m=\lim_{n\to\infty}(\Delta_n)^{\frac{m(H+1)}{2}}M_{n,\eta}^m=(2\pi)^{\frac{m}{2}}\left(\frac{1}{4}B(\frac{1}{4},\frac{1}{4})\right)^m(2m-1)!!T^m, \tag{5.2.109}$$

其中 $B(\cdot,\cdot)$ 为 Beta 函数. □

证明定理 5.2.3: 由命题 5.2.2-5.2.5, 结论得证. □

5.3 条件期望估计

设 B_t^H 为分数布朗运动, 其中 $t\geq 0$. 首先给出在水平 $y\in\mathbb{R}$ 处局部时 (5.1.3) 的极限形式:

$$L_T(y):=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^T \mathbf{1}_{(y-\varepsilon,y+\varepsilon)}(B_s^H)\mathrm{d}s, \tag{5.3.1}$$

其为一个连续递增过程. 进一步, 在区间 (y,∞) 上的占位时也可写为

$$\mathscr{O}_T(y)=\int_0^T \mathbf{1}_{(y,\infty)}(B_s^H)\mathrm{d}s=\int_y^\infty L_T(x)\mathrm{d}x \quad a.s. \tag{5.3.2}$$

接下来目的是证明 $L_T(y)$ 和 $\mathscr{O}_T(y)$ 的条件期望估计 $\mathbb{E}[\mathscr{O}_T(y)|\mathscr{G}_{t_k}]$ 和 $\mathbb{E}[L_T(y)|\mathscr{G}_{t_k}]$ 的相关极限定理, 其中 $\mathscr{G}_n$ 为 $B_{t_k}^H$, $k=1,\cdots,nT$ 生成的 σ 代数.

首先给出后续证明中用到的条件期望估计的一个相关性质.

命题 5.3.1 对于分数布朗运动 $B_{t_k}^H$, 其中 $t_k=\frac{k}{n}$, $k=1,\cdots,nT$. 设 $B_{t_0}^H$ 与 $B_{t_k}^H$ 相互独

立, 则 $B_{t_k}^H$ 的局部时 $L_T(x)$ 和占位时 $\mathscr{O}_T(x)$ 的条件期望估计分别满足

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[L_T(x)|B_T^H=z]&=T^{1-H}f\left(\frac{x}{T^H},\frac{z}{T^H}\right),\\ \mathbb{E}[\mathscr{O}_T(x)|B_T^H=z]&=TF\left(\frac{x}{T^H},\frac{z}{T^H}\right),\end{aligned}\tag{5.3.3}$$

其中

$$f(x,z)=\mathbb{E}[L_1(x)|B_1^H=z],$$

$$F(x,z)=\mathbb{E}[\mathscr{O}_1(x)|B_1^H=z]=\int_x^\infty f(y,z)\mathrm{d}y.$$

证明. 首先根据局部时的定义和分数布朗运动的自相似性可得

$$\begin{aligned}L_T(x)&=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^T\mathbf{1}_{(x-\varepsilon,x+\varepsilon)}(B_s^H)\mathrm{d}s\\ &=T\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^1\mathbf{1}_{(x-\varepsilon,x+\varepsilon)}(B_{Ts}^H)\mathrm{d}s\\ &\overset{d}{=}\frac{T}{2\varepsilon}\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^1\mathbf{1}_{(x-\varepsilon,x+\varepsilon)}(T^HB_s^H)\mathrm{d}s=T^{1-H}L_1\left(\frac{x}{T^H}\right),\end{aligned}\tag{5.3.4}$$

所以

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[L_T(y)|B_T^H=z]&=\mathbb{E}[T^{1-H}L_1\left(\frac{x}{T^H}\right)|T^HB_1^H=z]\\ &=T^{1-H}f\left(\frac{x}{T^H},\frac{z}{T^H}\right).\end{aligned}$$

对于占位时的证明, 因为

$$\mathscr{O}_T(x)=\int_x^\infty L_T(y)\mathrm{d}y,$$

则同 (5.3.4) 的证明. □

接下来给出条件期望 $\mathbb{E}[\mathscr{O}_T(x)|\mathscr{G}_{t_k}]$ 和 $\mathbb{E}[L_T(x)|\mathscr{G}_{t_k}]$ 的 $L^2(\Omega)$-误差的相关性质.

命题 5.3.2 对于分数布朗运动 $B^H_{t_k}$, $t_k = k\Delta_n$, $k = 1, \cdots, nT$, 有

$$\begin{aligned}
&\Delta_n^2 \|\mathscr{O}_T(x) - \mathbb{E}[\mathscr{O}_T(x)|\mathscr{G}_{t_k}]\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\quad = \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \mathbb{E}\left[Var\left(\mathscr{O}_1\left(x\Delta_n^{-\frac{1}{H}} - k^{\frac{1}{H}} B_1^H\right)\right) |((t_k)^{\frac{1}{H}} B_1^H)_{k\geq 1}\right],
\end{aligned} \tag{5.3.5}$$

$$\begin{aligned}
&\Delta_n^{2-\frac{2}{H}} \|L_T(x) - \mathbb{E}[L_T(x)|\mathscr{G}_{t_k}]\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\quad = \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \mathbb{E}\left[Var\left(L_1\left(x\Delta_n^{-\frac{1}{H}} - (k-1)^{\frac{1}{H}} B_1^H\right)\right) |((t_k)^{\frac{1}{H}} B_1^H)_{k\geq 1}\right],
\end{aligned} \tag{5.3.6}$$

其中 $\mathscr{G}_{t_k}$ 为 $B^H_{t_k}$, $k = 1, \cdots, nT$ 生成的 σ 代数.

证明. 首先给出 (5.3.5) 的证明.

令 $g(x) = \mathbf{1}_{\{x\geq y\}}$, 由占位时的定义可知

$$\mathscr{O}_T(x) - \mathbb{E}[\mathscr{O}_T(x)|\mathscr{G}_{t_k}] = \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(g(B_r^H) - \mathbb{E}\left[g(B_r^H)|\mathscr{G}_{t_k}\right]\right) \mathrm{d}r, \tag{5.3.7}$$

则

$$\begin{aligned}
&\|\mathscr{O}_T(x) - \mathbb{E}[\mathscr{O}_T(x)|\mathscr{G}_{t_k}]\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(g(X_r) - \mathbb{E}\left[g(B_r^H)|\mathscr{G}_{t_k}\right]\right) \mathrm{d}r\right]^2 \\
&= \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \mathbb{E}\left[\int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(g(X_r) - \mathbb{E}\left[g(B_r^H)|\mathscr{G}_{t_k}\right]\right) \mathrm{d}r\right]^2 \\
&= \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(g(B_r^H) - \mathbb{E}\left[g(B_r^H)|\mathscr{G}_{t_k}\right]\right) \mathrm{d}r\right]^2 |\mathscr{G}_{t_k}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \mathbb{E}\left[Var\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} g(B_r^H) \mathrm{d}r |\mathscr{G}_{t_k}\right)\right].
\end{aligned} \tag{5.3.8}$$

取 $t = \frac{r - t_{k-1}}{\Delta_n}$ 有

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} g(B_r^H) \mathrm{d}r = \Delta_n \int_0^1 g\left(B^H_{\Delta_n t + t_{k-1}}\right) \mathrm{d}t. \tag{5.3.9}$$

根据分数布朗运动的自相似性和平稳增量性可得

$$\begin{aligned} g\left(B^H_{\Delta_n t+t_{k-1}}\right) &= g\left(B^H_{\Delta_n t+t_{k-1}} - B^H_{t_{k-1}} + B^H_{t_{k-1}}\right) \\ &\overset{d}{=} g\left(B^H_{\Delta_n t} + B^H_{t_{k-1}}\right) = g\left(\Delta_n^{\frac{1}{H}} B^H_t + (t_{k-1})^{\frac{1}{H}} B^H_1\right), \end{aligned} \tag{5.3.10}$$

且

$$g\left(\Delta_n^{\frac{1}{H}} B^H_t + (t_{k-1})^{\frac{1}{H}} B^H_1\right) = \mathbf{1}_{\left\{\Delta_n^{\frac{1}{H}} B^H_t + (t_{k-1})^{\frac{1}{H}} B^H_1 \geq x\right\}} = \mathbf{1}_{\left\{B^H_t \geq x\Delta_n^{-\frac{1}{H}} - (t_{k-1})^{\frac{1}{H}} B^H_1\right\}}. \tag{5.3.11}$$

结合 (5.3.7)-(5.3.11) 可得

$$\begin{aligned} &\|\mathscr{O}_T(x) - \mathbb{E}[\mathscr{O}_T(x)|\mathscr{G}_{t_k}]\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &= \Delta_n^2 \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \mathbb{E}\left[Var\left(\int_0^1 g\left(B^H_{\Delta_n t+t_{k-1}}\right) \mathrm{d}t | (B^H_{t_k})_{k\geq 1}\right)\right] \\ &= \Delta_n^2 \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \mathbb{E}\left[Var\left(\int_0^1 g\left(\Delta_n^{\frac{1}{H}} B^H_t + (t_{k-1})^{\frac{1}{H}} B^H_1\right) \mathrm{d}t | (B^H_{t_k})_{k\geq 1}\right)\right] \\ &= \Delta_n^2 \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \mathbb{E}\left[Var\left(\mathscr{O}_1\left(x\Delta_n^{-\frac{1}{H}} - (t_{k-1})^{\frac{1}{H}} B^H_1\right) | ((t_k)^{\frac{1}{H}} B^H_1)_{k\geq 1}\right)\right]. \end{aligned} \tag{5.3.12}$$

接下来给出 (5.3.6) 的证明.

因为

$$L_T(x) := \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^T \mathbf{1}_{\{x-\varepsilon, x+\varepsilon\}}(B^H_s) \mathrm{d}s.$$

为方便, 记

$$h(B^H_s) = \mathbf{1}_{\{x-\varepsilon, x+\varepsilon\}}(B^H_s),$$

所以

$$\begin{aligned} &\|L_T(x) - \mathbb{E}[L_T(x)|\mathscr{G}_{t_k}]\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &= \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)^2 \mathbb{E}\left[\int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(h(B^H_r) - \mathbb{E}\left[h(B^H_r)|(B^H_{t_k})_{k\geq 1}\right]\right) \mathrm{d}r\right]^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)^2\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k}h(B_r^H)-\mathbb{E}\left[h(B_r^H)|(B_{t_k}^H)_{k\geq 1}\right]\mathrm{d}r\right)^2|(B_{t_k}^H)_{k\geq 1}\right]\\
&=\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)^2\mathbb{E}\left[Var\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k}h(B_r^H)\mathrm{d}r|(B_{t_k}^H)_{k\geq 1}\right)\right]. \qquad (5.3.13)
\end{aligned}
$$

由分数布朗运动的平稳增量性和自相似性可得

$$
\frac{1}{2\varepsilon}\int_{t_{k-1}}^{t_k}h(B_r^H)\mathrm{d}r=\Delta_n^{1-\frac{1}{H}}L_1\left(\Delta_n^{-\frac{1}{H}}x-(t_{k-1})^{\frac{1}{H}}B_1^H\right). \qquad (5.3.14)
$$

结合 (5.3.15) 和 (5.3.14) 可知

$$
\begin{aligned}
&\|L_T(x)-\mathbb{E}\left[L_T(x)|\mathscr{G}_{t_k}\right]\|_{L^2(\Omega)}^2\\
&=\Delta_n^{2-\frac{2}{H}}\mathbb{E}\left[Var\left(L_1\left(\Delta_n^{-\frac{1}{H}}x-(t_{k-1})^{\frac{1}{H}}B_1^H\right)|((t_k)^{\frac{1}{H}}B_1^H)_{k\geq 1}\right)\right], \qquad (5.3.15)
\end{aligned}
$$

即 (5.3.6) 成立. □

定理 5.3.1 对于分数布朗运动 $B_{t_k}^H$, $t_k=k\Delta_n$, $k=1,\cdots,nT$, 设 $B_{t_0}^H$ 与 $B_{t_k}^H$ 相互独立, 则对 $x\in\mathbb{R}$, 有

$$
n^{H-1}\left(\tilde{L}_T(x)-L_T(x)\right)\xrightarrow{d}\frac{\upsilon_0}{\sqrt{\sigma}}W_{L_T(x)},\quad n\to\infty, \qquad (5.3.16)
$$

$$
n^{H-1}\left(\tilde{\mathscr{O}}_T(x)-\mathscr{O}_T(x)\right)\xrightarrow{d}\frac{\upsilon_1}{\sqrt{\sigma}}W_{L_T(x)},\quad n\to\infty, \qquad (5.3.17)
$$

其中 $W_{L_T(x)}$ 是方差为 $L_T(x)$ 的布朗运动, $\tilde{L}_T(x)$, $\tilde{\mathscr{O}}_T(x)$ 分别表示 $L_T(x)$, $\mathscr{O}_T(x)$ 的条件期望估计, 即:

$$
\tilde{L}_T(x)=\mathbb{E}[L_T(x)|\mathscr{G}_{t_k}],\quad \tilde{\mathscr{O}}_T(x)=\mathbb{E}[\mathscr{O}_T(x)|\mathscr{G}_{t_k}],
$$

且

$$
\begin{aligned}
\upsilon_0^2 &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[f\left(x, B_1^H\right) - L_1(x)\right]^2 \mathrm{d}x, \\
\upsilon_1^2 &= \int_{\mathbb{R}} G(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[F\left(x, B_1^H\right) - n\mathscr{O}_1(x)\right]^2 \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

证明. 由 B_t^H 的平稳增量性及与 B_0^H 的独立性, 根据命题 5.3.1 可导出:

$$
\begin{aligned}
\tilde{L}_T(x) &= \frac{1}{n^{1-H}} \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \mathbb{E}\left[L_1\left(n^H(x - B_{t_{k-1}}^H)\right) | n^H\left(\Delta_k B_{t_k}^H, B_{t_0}^H\right)\right] \\
&= \frac{1}{n^{1-H}} \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \mathbb{E}\left[L_1\left(n^H(x - B_{t_k}^H)\right) | n^H\left(\Delta_k B_{t_k}^H\right)\right] \\
&= \frac{1}{n^{1-H}} \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} f\left(\left(n^H(x - B_{t_k}^H)\right), n^H\left(\Delta_k B_{t_k}^H\right)\right), \qquad (5.3.18)
\end{aligned}
$$

同理可得:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathscr{O}}_T(x) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \mathbb{E}\left[\mathscr{O}_1\left(n^H(x - B_{t_{k-1}}^H)\right) | n^H\left(\Delta_k B_{t_k}^H, B_{t_0}^H\right)\right] \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \mathbb{E}\left[\mathscr{O}_1\left(n^H(x - B_{t_k}^H)\right) | n^H\left(\Delta_k B_{t_k}^H\right)\right] \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} F\left(n^H\left(x - B_{t_k}^H\right), n^H\left(\Delta_k B_{t_k}^H\right)\right), \qquad (5.3.19)
\end{aligned}
$$

其中 $\Delta_k B_{t_k}^H = B_{t_k}^H - B_{t_{k-1}}^H$.

接下来先给出局部时 $\tilde{L}_T(x)$ 的证明.

(i) 由 (5.3.18), 可得

$$
\begin{aligned}
&\tilde{L}_T(x) - L_T(x) = \frac{1}{n^{1-H}} \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} f\left(\left(n^H(x - B_{t_k}^H)\right), n^H\left(\Delta_k B_{t_k}^H\right)\right) - L_{[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]}(x) \\
&= \frac{1}{n^{1-H}} \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \left(f\left(\left(n^H(x - B_{t_k}^H)\right), n^H\left(\Delta_k B_{t_k}^H\right)\right) - n^{1-H} L_{[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]}(x)\right) \\
&:= \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \xi_{k,n}, \qquad (5.3.20)
\end{aligned}
$$

其中 $L_{[a,b]}(x)$ 表示区间 $[a,b]$ 上的局部时.

因为 $L_T(x)=T^{1-H}L_1(\frac{x}{T^H})$, 记

$$\begin{aligned}\xi_{k,n}=&\frac{1}{n^{1-H}}\left(f\left(\left(n^H(x-B^H_{t_k})\right),n^H\left(\Delta_k B^H_{t_k}\right)\right)-n^{1-H}L_1\left(n^H\left(x-B^H_{t_k}\right)\right)\right)\\ :=&\frac{1}{n^{1-H}}g\left(n^H\left(x-B^H_{t_k}\right)\right),\end{aligned}\tag{5.3.21}$$

其中

$$g(x)=f\left(x,n^H B^H_{\frac{1}{n}}\right)-n^{1-H}L_{\frac{1}{n}}\left(\frac{x}{n^H}\right)=f(x,B^H_1)-L_1(x)$$

且有

$$\mathbb{E}[g(x)]=\mathbb{E}\left[f(x,B^H_1)-L_1(x)\right]=0.$$

则由 [70] 中定理 4.1 的证明可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[\xi_{k,n}|\mathscr{G}_{\frac{k-1}{n}}]\\ =&n^{H-1}\mathbb{E}\left[\left(f(n^H(x-B^H_{t_{k-1}})),n^H\Delta_k B^H_{t_k}\right)-n^{1-H}L_{[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]}|\mathscr{G}_{\frac{k-1}{n}}\right]\\ =&n^{H-1}\mathbb{E}\left[\left(f(n^H(x-B^H_{t_{k-1}})),n^H\Delta_k B^H_{t_k}\right)-n^{1-H}L_{[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]}\right],\end{aligned}\tag{5.3.22}$$

其中 $\mathscr{G}_{\frac{k-1}{n}}$ 为 $B^H_{t_{k-1}}$, $k=1,\cdots,nT$ 生成的 σ 代数.

根据分数布朗运动的自相似性可得

$$L_T(x)=T^{1-H}L_1\left(\frac{x}{T^H}\right).\tag{5.3.23}$$

结合 (5.3.23) 和条件期望的性质可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\left(f(n^H(x-B^H_{t_{k-1}})),n^H\Delta_k B^H_{t_k}\right)-n^{1-H}L_{[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]}\right]\\ =&\mathbb{E}\left[\left(f(n^H(x-B^H_{t_{k-1}})),B^H_1\right)-L_1\left(n^H(x-B^H_{t_{k-1}})\right)\right]\\ =&\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(L_1(n^H(x-B^H_{t_{k-1}}))|B^H_1\right)-L_1\left(n^H\left(x-B^H_{t_{k-1}}\right)\right)\right]=0,\end{aligned}\tag{5.3.24}$$

即,

$$\mathbb{E}[\xi_{k,n}|\mathscr{G}_{\frac{k-1}{n}}]=0. \tag{5.3.25}$$

(ii) 由 (5.3.21) 可得

$$\begin{aligned}
&\Delta_n^{(1-H)}\mathbb{E}[\xi_{k,n}^2|\mathscr{G}_{\frac{k-1}{n}}]\\
=&\Delta_n^{(1-H)}\mathbb{E}\left[\left(\left(f(n^H(x-B_{t_{k-1}}^H)),n^H\Delta_k B_{t_k}^H\right)-n^{1-H}L_{[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]}\right)^2|\mathscr{G}_{\frac{k-1}{n}}\right]\\
=&\Delta_n^{(1-H)}\mathbb{E}\left[\left(f(n^H(x-B_{t_{k-1}}^H)),n^H\Delta_k B_{t_k}^H\right)-n^{1-H}L_{[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]}\right]^2\\
=&n^{H-1}g_1\left(n^H(x-B_{t_{k-1}}^H)\right),
\end{aligned} \tag{5.3.26}$$

其中

$$g_1(y)=\mathbb{E}\left[f(y,B_1^H)-L_1(y)\right]^2$$

且 $y=n^H(x-B_{t_{k-1}}^H)$. 因为

$$g_1(y)=\mathbb{E}\left[h(y,B_1^H)-L_1(y)\right]^2\le c\mathbb{E}[L_1(y)]^2.$$

由 [61] 中定理 3 的证明可知, 函数 $g_1(y)$ 有界且 $g_1(y)\in L^1(\mathbb{R})$, 所以根据 [1] 可得

$$\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\Delta_n^{(1-H)}\mathbb{E}[\xi_{k,n}^2|\mathscr{G}_{\frac{k-1}{n}}]=n^{H-1}g_1\left(n^H(x-B_{t_{k-1}}^H)\right)\longrightarrow L_T(x)\int_{\mathbb{R}}g_1(x)\mathrm{d}x,\ \ n\longrightarrow\infty. \tag{5.3.27}$$

(iii) 对于

$$\begin{aligned}
&\Delta_n^{(1-H)}\mathbb{E}[\xi_{k,n}^2(B_{t_k}^H-B_{t_{k-1}}^H)|\mathscr{G}_{\frac{k-1}{n}}]\\
=&\mathbb{E}\left[\left(\left(f(n^H(x-B_{t_{k-1}}^H)),n^H\Delta_k B_{t_k}^H\right)-n^{1-H}L_{[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]}\right)\Delta B_{t_k}^H\right].
\end{aligned} \tag{5.3.28}$$

因为

$$\Delta_k B_{t_k}^H = B_{t_k}^H - B_{t_{k-1}}^H = B_{\frac{1}{n}}^H = \left(\frac{1}{n}\right)^H B_1^H,$$

所以 (5.3.28) 可写为

$$\begin{aligned} g_2(y) &= \left(\frac{1}{n}\right)^H \mathbb{E}[\big(f(y,B_1^H) - L_1(y)\big) B_1^H] \\ &= \left(\frac{1}{n}\right)^H \big(\mathbb{E}[f(y,B_1^H)B_1^H] - \mathbb{E}[L_1(y)B_1^H]\big) \\ &= \left(\frac{1}{n}\right)^H \big(\mathbb{E}[\mathbb{E}(L_1(y)|B_1^H)B_1^H] - \mathbb{E}[L_1(y)B_1^H]\big) = 0. \end{aligned} \tag{5.3.29}$$

(iv) 同 (i) 和 (ii) 的计算, 直接可得

$$\begin{aligned} &\Delta_n^{(1-H)}\mathbb{E}[\xi_{k,n}^4|\mathscr{G}_{\frac{k-1}{n}}] \\ =&\Delta_n^{(1-H)} \cdot n^{4(H-1)}\mathbb{E}\left[\left(\left(f(n^H(x-B_{t_{k-1}}^H)),n^H\Delta_k B_{t_k}^H\right) - n^{1-H}L_{[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]}\right)^4 |\mathscr{G}_{\frac{k-1}{n}}\right] \\ =&\Delta_n^{(5-5H)}\mathbb{E}\left[\left(f(n^H(x-B_{t_{k-1}}^H)),n^H\Delta_k B_{t_k}^H\right) - n^{1-H}L_{[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]}\right]^4 \\ =&\Delta_n^{(5-5H)} g_3\left(n^H(x-B_{t_{k-1}}^H)\right). \end{aligned} \tag{5.3.30}$$

根据 $g_1(y)$ 和 $g_2(y)$ 的证明可知, $g_3(y)$ 有界且在 $L^1(\mathbb{R})$ 中.

结合 Chebyshev 不等式可知对任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$\begin{aligned} &\Delta_n^{(1-H)} \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \mathbb{E}\left[|\xi_{k,n}|^2 \mathbf{1}_{\{|\xi_{k,n}|>\varepsilon\}}|\mathscr{G}_{\frac{k-1}{n}}\right] \\ &\le \Delta_n^{(1-H)}\varepsilon^{-2} \sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} \mathbb{E}[\xi_{k,n}^4|\mathscr{G}_{\frac{k-1}{n}}] \to 0. \end{aligned} \tag{5.3.31}$$

因此由 (i)-(iv) 并结合 [74] 中定理 IX.7.28 可知 (5.3.16) 成立.

对于占位时公式可得

$$\tilde{\mathscr{O}}_T(x) - \mathscr{O}_T(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\lfloor nT \rfloor} F\left(n^H(x-B_{t_k}^H), n^H\left(\Delta_k B_{t_k}^H\right)\right) - \mathscr{O}_{[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]}(x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\left(F\left(n^H(x-B_{t_k}^H), n^H\left(\Delta_k B_{t_k}^H\right)\right) - n\mathscr{O}_{[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]}(x)\right)\\
&:= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\eta_{k,n},
\end{aligned}
\tag{5.3.32}
$$

则同局部时 (5.3.16) 的证明可得 (5.3.17) 成立. □

注 5.3.1 特别地, 分数布朗运动局部时和占位时的非参数估计也可以拓展至下列连续随机微分方程

$$
\mathrm{d}X_t = \mu(X_t)\mathrm{d}t + \sigma(X_t)\mathrm{d}B_t, \tag{5.3.33}
$$

其中 B_t 为标准布朗运动且 $\sigma \in C^1(\mathbb{R})$, $\mu \in C(\mathbb{R})$ 使得 (5.3.33) 存在唯一解. 在 [70] 中局部时 $L_T(x)$ 的估计形式为

$$
L_{n,T}(h,x) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor} h\left(\sqrt{n}\left(x - X_{t_{k-1}}\right), \sqrt{n}\Delta_k X_{t_k}\right). \tag{5.3.34}
$$

当 $\sigma > 0$, 对满足 $\int_{\mathbb{R}}|y^r|\tilde{h}(x)\mathrm{d}x < \infty$, $r > 3$ 的有界函数 $\tilde{h}$, 函数 $h(x,z)$ 满足 $|h(x,z)| \le \tilde{h}(x)\exp(a|z|)$, 则

$$
n^{-\frac{1}{4}}\left(L_{n,T}(h,x) - c_h(x)L_T(x)\right) \to v_h(x)W_{L_T(x)} \tag{5.3.35}
$$

成立(见 [70], Theorem 1. 2]), 其中正常数 $v_h(x)$ 可以通过模型 $X_t = \sigma(x)B_t$ 求得. 通过本章的证明可得, 对于一般的随机过程, 可以证得条件期望估计量 $\mathbb{E}[L_T(y)|B_t = z]$ 在统计量 $L_{n,t}(h,x)$ 类内是渐近最优的.

6 总结与展望

6.1 研究总结

本文基于布朗运动多重自相交局部时和分数布朗运动等一般自相似高斯过程的二重自相交局部时研究, 旨在将分数布朗运动等自相似高斯过程二重自相交局部时推广至多重的情形, 并引导出导数型多重自相交局部时的相关结论, 最后从应用的角度出发, 给出分数布朗运动占位时和局部时的非参数估计. 首先, 给出自相似高斯过程 MSLT 的存在性条件等相关性质, 为后面研究该类 DMSLT 奠定基础. 接着, 定义自相似高斯过程的 DMSLT, 并证明其存在性、Hölder 连续性和平滑性等. 最后, 基于离散观测, 给出分数布朗运动占位时和局部时的非参数估计, 证明其相关统计性质. 具体结论如下:

(1) 研究自相似高斯过程 MSLT, 旨在将分数布朗运动二重局部时的研究推广至自相似高斯过程的多重自相交局部时. 首先利用 Fourier 分析方法和强局部非确定性研究自相似高斯过程 X^H 的 MSLT. 证得当 Hurst 参数 $H \in (0,1)$ 时, MSLT 在 $L^p(\Omega)$, $p \in [1,\infty)$ 中存在且在此条件下满足指数可积性. 其次, 根据自相似高斯过程的局部非确定性证得 MSLT 关于时间变量和空间变量的 Hölder 连续性阶分别为 $\beta < \left(1 - \frac{H(k-1)}{k}\right)$ 和 $\alpha < \left(1 \wedge \frac{k}{2H(k-1)} - \frac{1}{2}\right)$. 接着, 受到 Eddahbi [39] 工作的激励, 借助 Malliavin 分析研究 MSLT 的 Wiener 混沌展式. 为方便, 本文仅给出一维分数布朗运动 MSLT 的 Wiener 混沌展式并证得其满足 Meyer-Watanabe 意义下的平滑性. 最后, 将研究扩展至 d ($d \geq 2$) 维分数布朗运动的情形, 得到其 Wiener 混沌展式并证明相关的性质, 其它自相似高斯过程 MSLT 的平滑性类似可得.

(2) 考虑自相似高斯过程 DMSLT. 基于 (1) 中得到的自相似高斯过程 MSLT 的存在性, 结合占位时公式, 将分数布朗运动导数型二重自相交局部时推广至自相似高斯过程 MSLT 的情形, 给出 MSLT 关于空间变量的导数定义. 首先利用样

本配置方法结合自相似高斯过程的局部非确定性, 证得 $\frac{\partial}{\partial x_l}L_k^H(x,t)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中的存在性条件为 $0<H<\frac{k-1}{k}$, $k\geq 2$ 且关于空间变量满足 Hölder 连续性. 此外, 根据多项式定理将相应结论推广至 MSLT 梯度的情形, 证明其存在性、联合 Hölder 连续性和关于空间变量 x 的 Hölder 连续性等. 最后, 基于存在性条件, 借助 Hermite 多项式给出 DMSLT 的混沌展式, 证得其满足 Meyer-Watanabe 意义下的平滑性.

(3) 基于离散观测, 研究分数布朗运动占位时和局部时非参数估计的相关统计性质. 首先介绍占位时和局部时的 Riemann 和估计

$$\hat{\mathscr{O}}_{T,n}(A)=\Delta_n\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\mathbf{1}_A(B^H_{t_{k-1}})\qquad \hat{L}_{T,n}(y)=\frac{\Delta_n}{h_n}\sum_{k=1}^{\lfloor nT\rfloor}\mathbf{1}_{[y-h_n,y+h_n]}(B^H_{t_{k-1}}),\tag{6.1.1}$$

其中 $h_n>0$ 为带宽参数.

通过分数布朗运动的特征函数和其满足的局部非确定性分别给出占位时和局部时 Riemann 和近似的 L^2 逼近误差的精确上界. 另一方面, 由于分数布朗运动的特殊性质, 文献中已有的鞅方法或随机积分表示无法直接用来证明 (6.1.1) 的中心极限定理, 所以本文利用分数布朗运动的局部非确定性和 Fourier 分析方法, 通过矩估计方法结合链式论证证得相应结论. 最后为提高估计速率, 简要介绍占位时和局部时的另一种非参数估计方法——条件期望估计 $\mathbb{E}[\mathscr{O}_T(A)|\mathscr{G}_{t_k}]$ $\mathbb{E}[L_T(y)|\mathscr{G}_{t_k}]$, 其中 $\mathscr{G}_{t_k}$ 为 $B^H_{t_k}$, $k=1,\cdots,nT$ 生成的 σ 代数. 利用分数布朗运动和条件期望的相关性质, 通过直接计算得到条件期望估计的中心极限定理. 由相关研究可知, 条件期望估计是速率最优的, 也为占位时和局部时的应用奠定一定的理论基础.

6.2 研究展望

虽然本文将布朗运动多重自相交局部时的研究推广至自相似高斯过程, 并研究了导数型多重自相交局部时, 尝试证明了占位时和局部时的非参数估计的相关性质. 但受限于时间和精力, 仍存在一些不足之处, 有待进一步研究:

(1) 本文给出自相似高斯过程 MSLT 存在性等性质的详细证明过程. 特别地, 通过分数布朗运动的 Malliavin 分析给出分数布朗运动 MSLT 的 Wiener 混沌展式且证明相关性质. 由次分数布朗运动和双分数布朗运动的性质可知, 其相应结果类似可得证. 但由于多重局部时的结构更为复杂、细节问题较多, 现阶段对于自相似高斯过程的多重碰撞局部时、多重相交局部时等研究仍处于探索阶段, 未来仍需对它们的 Wiener 混沌展式、平滑性等问题进行研究.

(2) 本文研究了自相似高斯过程 DMSLT, 而对于导数型碰撞局部时、导数型相交局部时等均处于二重的研究状态. 由于文章篇幅限制, 并未对其它随机过程的导数型多重碰撞局部时、相交局部时等深入分析. 在后续研究中应尝试将自相似高斯过程 DMSLT 的研究推广至碰撞局部时和相交局部时的情形, 通过不同的方法证明相关的性质和极限定理.

(3) 从应用的角度出发, 本文目前仅研究了占位时和局部时的非参数估计问题, 而对其具体的应用并未给出详细介绍, 因此在后续研究中可尝试研究占位时衍生品, 即收益取决于终端资产价格及其占位时之一的衍生品, 如障碍期权、阶梯期权和分位数期权等. 为此, 可使用 M. Kac 的一个公式来计算高斯过程及其占位时的联合分布律, 建立占位时衍生品的一般定价公式, 并讨论一些数值实现问题等.

参考文献

[1] Altmeyer R. Approximation of occupation time functionals[J]. Bernoulli, 2021, 27(4): 2714-2739.

[2] Akahori J. Some formulae for a new type of path-dependent option[J]. Annals of Applied Probability, 1995, 5(2): 383-388.

[3] Atkinson C, Fusai G. Discrete extrema of Brownian motion and pricing of exotic options[J]. Journal of Computational Finance, 2007, 10(3): 1-43.

[4] Aoudia D, Renaud J F. Pricing occupation-time options in a mixed-exponential jump-diffusion model[J]. Applied Mathematical Finance, 2016, 23(1): 1-21.

[5] Altmeyer R, Le Guével R. Optimal L^2-approximation of occupation and local times for symmetric stable processes[J]. Electronic Journal of Statistics, 2022, 16(1): 2859-2883.

[6] Altmeyer R. Central limit theorems for discretized occupation time functionals[J]. Stochastic Processes and their Applications, 2023, 156: 101-125.

[7] Altmeyer R, Chorowski J. Estimation error for occupation time functionals of stationary Markov processes[J]. Stochastic Processes and their Applications, 2018, 128(6): 1830-1848.

[8] Allaoui O, Sghir A, Hadiri S. On the existence and the Hölder regularity of the local time of the Brownian bridge[J]. Random Operators and Stochastic Equations, 2022, 30(4): 259-270.

[9] Albrecher H, Ivanovs J. A risk model with an observer in a Markov environment[J]. Risks, 2013, 1(3): 148-161.

[10] Butkovsky O, Dareiotis K, Gerencsér M. Approximation of SDEs: a stochastic sewing approach[J]. Probability Theory and Related Fields, 2021, 181: 975-1034.

[11] Bojdecki T, Gorostiza L G, Talarczyk A. Sub-fractional Brownian motion and its relation to occupation times[J]. Statistics & Probability Letters, 2004, 69(4): 405-419.

[12] Berman S. Local nondeterminism and local times of Gaussian processes[J]. Indiana University Mathematics Journal, 1973, 23(1): 69-94.

[13] Berman S. Local times and sample function properties of stationary Gaussian processes[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1969, 137: 277-299.

[14] Bi J, Xu F. A first-order limit law for functionals of two independent fractional Brownian motions in the critical case[J]. Journal of Theoretical Probability, 2016, 29(3): 941-957.

[15] Bass R F, Khoshnevisan D. Intersection local times and Tanaka formulas[J]. Annales de l'IHP Probabilités et Statistiques, 1993, 29(3): 419-451.

[16] Bornales J, Oliveira M J, Streit L. Chaos decomposition and gap renormalization of Brownian self-intersection local times[J]. Reports on Mathematical Physics, 2016, 77(2): 141-152.

[17] Blanke D, Pumo B. Optimal sampling for density estimation in continuous time[J]. Journal of Time Series Analysis, 2003, 24(1): 1-23.

[18] Borodin A N. On the character of convergence to Brownian local time[J]. Probability Theory and Related Fields, 1986, 72(2): 231-250.

[19] Bosq D. Nonparametric statistics for stochastic processes: estimation and prediction[M]. Springer Science & Business Media, 2012.

[20] Breuer L. Occupation times for Markov-modulated Brownian motion[J]. Journal of Applied Probability, 2012, 49(2): 549-565.

[21] Chen Z, Sang L, Hao X. Renormalized self-intersection local time of bifractional Brownian motion[J]. Journal of Inequalities and Applications, 2018, 326: 1-20.

[22] Cai N. Pricing and hedging of quantile options in a flexible jump diffusion model[J]. Journal of Applied Probability, 2011, 48(3): 637-656.

[23] Cai N, Chen N, Wan X. Occupation times of jump-diffusion processes with double exponential jumps and the pricing of options[J]. Mathematics of Operations Research, 2010, 35(2): 412-437.

[24] Chesney M, Jeanblanc-Picqué M, Yor M. Brownian excursions and Parisian barrier options[J]. Advances in Applied Probability, 1997, 29(1): 165-184.

[25] Cohen J W, Hooghiemstra G. Brownian excursion, the M/M/1 queue and their occupation times[J]. Mathematics of Operations Research, 1981, 6(4): 608-629.

[26] Catellier R, Gubinelli M. Averaging along irregular curves and regularisation of ODEs[J]. Stochastic Processes and their Applications, 2016, 126(8): 2323-2366.

[27] Castellana J V, Leadbetter M R. On smoothed probability density estimation for stationary processes[J]. Stochastic Processes and their Applications, 1986, 21(2): 179-193.

[28] Comte F, Merlevéde F. Super optimal rates for nonparametric density estimation via projection estimators[J]. Stochastic Processes and their Applications, 2005, 115(5): 797-826.

[29] Das K, Markowsky G. Existence, renormalization, and regularity properties of higher order derivatives of self-intersection local time of fractional Brownian motion[J]. Stochastic Analysis and Applications, 2022, 40(1): 133-157.

[30] Dassios A. The distribution of the quantile of a Brownian motion with drift and the pricing of related path-dependent options[J]. Annals of Applied Probability, 1995, 5(2): 389-398.

[31] Dassios A. Sample quantiles of stochastic processes with stationary and independent increments[J]. Annals of Applied Probability, 1996, 6(3): 1041-1043.

[32] Davydov D, Linetsky V. Structuring, pricing and hedging double-barrier step options[J]. Journal of Computational Finance, 2002, 5(2): 55-88.

[33] Dynkin E B. Self-intersection gauge for random walks and for Brownian motion[J]. Annals of Probability, 1988, 16(1): 1-57.

[34] Dalalyan A. Sharp adaptive estimation of the drift function for ergodic diffusions[J]. Annals of Statistics, 2005, 33(6): 2507-2528.

[35] Dos Reis A E. How long is the surplus below zero?[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 1993, 12(1): 23-38.

[36] Dickson D C M, Egídio Dos Reis A D. On the distribution of the duration of negative surplus[J]. Scandinavian Actuarial Journal, 1996, 1996(2): 148-164.

[37] Dickson D C M, Li S. The distributions of the time to reach a given level and the duration of negative surplus in the Erlang (2) risk model[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2013, 52(3): 490-497.

[38] Embrechts P, Rogers L C G, Yor M. A proof of Dassios' representation of the α-quantile of Brownian motion with drift[J]. Annals of Applied Probability, 1995, 5(3): 757-767.

[39] Eddahbi M, Lacayo R, Solé J L, et al. Regularity of the local time for the d-dimensional fractional Brownian motion with N-parameters[J]. Stochastic Analysis and Applications, 2005, 23(2): 383-400.

[40] Eddahbi M, Vives J. Chaotic expansion and smoothness of some functionals of the fractional Brownian motion[J]. Journal of Mathematics of Kyoto University, 2003, 43(2): 349-368.

[41] Fusai G. Corridor options and arc-sine law[J]. Annals of Applied Probability, 2000, 10(2): 634-663.

[42] Fusai G, Tagliani A. Pricing of occupation time derivatives: continuous and discrete monitoring[J]. Journal of Computational Finance, 2001, 5(1): 1-38.

[43] Florens-Zmirou D. On estimating the diffusion coefficient from discrete observations[J]. Journal of Applied Probability, 1993, 30(4): 790-804.

[44] Faria M, Drumond C, Streit L. The renormalization of self-intersection local times I: the chaos expansion[J]. Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, 2011, 3(02): 223-236.

[45] Fujita T, Miura R. Edokko options: A new framework of barrier options[J]. Asia-Pacific Financial Markets, 2002, 9: 141-151.

[46] Guo J, Hu Y, Xiao Y. Higher-order derivative of intersection local time for two independent fractional Brownian motions[J]. Journal of Theoretical Probability, 2019, 32: 1190-1201.

[47] Geman D, Horowitz J. Occupation densities[J]. Annals of Probability, 1980, 1-67.

[48] Guo J, Zhang C, Ma A. Derivative of multiple self-intersection local time for fractional Brownian motion[J]. Journal of Theoretical Probability, 2023, 1-19.

[49] Guo J, Jiang G, Xiao Y. Multiple intersection local time of fractional Brownian motion[J]. J. Math, 2011, 31: 388-394.

[50] Ganychenko I, Knopova V, Kulik A. Accuracy of discrete approximation for integral functionals of Markov processes[J]. Modern Stochastics: Theory and Applications, 2015, 2(4): 401-420.

[51] Gerber H U. When does the surplus reach a given target?[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 1990, 9(2-3): 115-119.

[52] Hong M, Xu F. Derivatives of local times for some Gaussian fields[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2020, 484(2): 123716.

[53] Hu Y. Self-intersection local time of fractional Brownian motions-via chaos expansion[J]. Journal of Mathematics of Kyoto University, 2001, 41(2): 233-250.

[54] Houdré C, Villa J. An example of infinite dimensional quasi-helix[J]. Contemporary Mathematics, 2003, 336: 195-202.

[55] Hu Y, Jolis M, Tindel S. On Stratonovich and Skorohod stochastic calculus for Gaussian processes[J]. Annals of Probability, 2013, 41(3A): 1656-1693.

[56] Hu Y, Nualart D. Renormalized self-intersection local time for fractional Brownian motion[J]. Annals of Probability, 2005, 33(3): 948-983.

[57] Hu Y, Øksendal B. Chaos expansion of local time of fractional Brownian motions[J]. Stochastic Analysis and Applications, 2002, 20: 815-837.

[58] Hu Y. Analysis on Gaussian spaces[M]. World Scientific, 2016.

[59] Hu Y, Nualart D. Regularity of renormalized self-intersection local time for fractional Brownian motion[J]. Communications in Information and Systems, 2007, 7(1): 21-30.

[60] Harnett D, Nualart D. Central limit theorem for functionals of a generalized self-similar Gaussian process[J]. Stochastic Processes and their Applications, 2018, 128(2): 404-425.

[61] Ivanovs J, Podolskij M. Optimal estimation of the supremum and occupation times of a self-similar Lévy process[J]. Electronic Journal of Statistics, 2022, 16(1): 892-934.

[62] Izyumtseva O L. On the local times for Gaussian integrators[J]. Theory of Stochastic Processes, 2014, 19(1): 11-25.

[63] Imkeller P, Yan J. Multiple intersection local time of planar Brownian motion as a particular Hida distribution[J]. Journal of Functional Analysis, 1996, 140(1): 256-273.

[64] Ivanovs J, Podolskij M. Optimal estimation of some random quantities of a Lévy process[J]. arXiv preprint arXiv: 2001. 02517, 2020.

[65] Imkeller P, Perez-Abreu V, Vives J. Chaos expansions of double intersection local time of Brownian motion in $\mathbb{R}^d$ and renormalization[J]. Stochastic Processes and their Applications, 1995, 56(1): 1-34.

[66] Imkeller P, Weisz F. The asymptotic behaviour of local times and occupation integrals of the N-parameter Wiener process in $\mathbb{R}^d$[J]. Probability Theory and Related Fields, 1994, 98(1): 47-75.

[67] Jiang Y, Wang Y. Self-intersection local times and collision local times of bifractional Brownian motions[J]. Science in China Series A: Mathematics, 2009, 52(9): 1905-1919.

[68] Jaramillo A, Nualart D. Functional limit theorem for the self-intersection local time of the fractional Brownian motion[J]. Annales de L'Institut Henri Poincare, Probabilites et Statistiques, 2019, 55(1): 480-527.

[69] Jung P, Markowsky G. Hölder continuity and occupation-time formulas for fBm self-intersection local time and its derivative[J]. Journal of Theoretical Probability, 2015, 28: 299-312.

[70] Jacod J. Rates of convergence to the local time of a diffusion[J]//Annales de l'Institut Henri Poincare / Probabilites et statistiques, 1998, 34(4): 505-544.

[71] Jung P, Markowsky G. On the Tanaka formula for the derivative of self-intersection local time of fractional Brownian motion[J]. Stochastic Processes and their Applications, 2014, 124(11): 3846-3868.

[72] Jaramillo A, Nualart D. Asymptotic properties of the derivative of self-intersection local time of fractional Brownian motion[J]. Stochastic Processes and their Applications, 2017, 127(2): 669-700.

[73] Jiang Y, Wang Y. On the collision local time of fractional Brownian motions[J]. Chinese Annals of Mathematics, Series B, 2007, 28(3): 311-320.

[74] Jacod J, Shiryaev A. Limit theorems for stochastic processes[M]. Springer Science & Business Media, 2013.

[75] Kou S G. A jump-diffusion model for option pricing[J]. Management science, 2002, 48(8): 1086-1101.

[76] Kwok Y K, Lau K W. Pricing algorithms for options with exotic path dependence[J]. Journal of Derivatives, 2001, 9(1): 23-38.

[77] Kwok Y K, Leung K S. Distribution of occupation times for CEV diffusions and pricing of alpha-quantile options[J]. Available at SSRN 638961, 2006, 7(1): 87-94.

[78] Kolmogorov A N. Wienersche spiralen und einige andere interessante kurven in hilbertscen raum, cr (doklady)[J]. Acad. Sci. URSS (NS), 1940, 26: 115-118.

[79] Kohatsu-Higa A, Makhlouf A, Ngo H L. Approximations of non-smooth integral type functionals of one dimensional diffusion processes[J]. Stochastic Processes and their Applications, 2014, 124(5): 1881-1909.

[80] Kerchev G, Nourdin I, Saksman E, et al. Local times and sample path properties of the Rosenblatt process[J]. Stochastic Processes and their Applications, 2021, 131: 498-522.

[81] Kolkovska E T, López-Mimbela J A, Morales J V. Occupation measure and local time of classical risk processes[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2005, 37(3): 573-584.

[82] Linetsky V. Steps to the barrier[J]. Risk-London-Risk Magazine Limited-, 1998, 11: 62-66.

[83] Linetsky V. Step options[J]. Mathematical Finance, 1999, 9(1): 55-96.

[84] Luan N. Strong local non-determinism of sub-fractional Brownian motion[J]. Applied Mathematics, 2015, 6(13): 2211-2216.

[85] Labrador B. Rates of strong uniform convergence of the κ_T-occupation time density estimator[J]. Statistical Inference for Stochastic Processes, 2009, 12: 269-283.

[86] Landriault D, Renaud J F, Zhou X. Occupation times of spectrally negative Lévy processes with applications[J]. Stochastic Processes and their Applications, 2011, 121(11): 2629-2641.

[87] Loeffen R L, Renaud J F, Zhou X. Occupation times of intervals until first passage times for spectrally negative Lévy processes[J]. Stochastic Processes and their Applications, 2014, 124(3): 1408-1435.

[88] Mendy I, Dakaou I . Occupation densities for certain processes related to subfractional Brownian motion[J]. Brazilian Journal of Probability and Statistics, 2015, 29(4): 733-746.

[89] Müller-Gronbach T, Yaroslavtseva L. Sharp lower error bounds for strong approximation of SDEs with discontinuous drift coefficient by coupling of noise[J]. Annals of Applied Probability, 2023, 33(2): 1102-1135.

[90] Miura R. A note on look-back options based on order statistics[J]. Hitotsubashi Journal of Commerce and Management, 1992, 27(1): 15-28.

[91] Van Ness M. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications[J]. Siam Review, 1968, 10: 422-437.

[92] Mattingly J C, Stuart A M, Tretyakov M V. Convergence of numerical time-averaging and stationary measures via Poisson equations[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2010, 48(2): 552-577.

[93] Markowsky G. The derivative of the intersection local time of Brownian motion through Wiener chaos[M]//Séminaire de Probabilités XLIV. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2012.

[94] Mendonça S, Streit L. Multiple intersection local times in terms of white noise[J]. Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, 2001, 4(04): 533-543.

[95] Mishura Y, Mishura I U S. Stochastic calculus for fractional Brownian motion and related processes[M]. Springer Science & Business Media, 2008.

[96] Miura R. Rank process, stochastic corridor and applications to finance[M]//Advances in Statistical Modeling and Inference: Essays in Honor of Kjell a Doksum. 2007.

[97] Neuenkirch A, Szölgyenyi M. The Euler-Maruyama scheme for SDEs with irregular drift: convergence rates via reduction to a quadrature problem[J]. IMA Journal of Numerical Analysis, 2021, 41(2): 1164-1196.

[98] Nualart D. The Malliavin calculus and related topics[M]. Berlin: Springer, 2006.

[99] Nualart D, Xu F. Central limit theorem for an additive functional of the fractional Brownian motion II[J]. Electronic Communications in Probability, 2013, 18: 1-10.

[100] Nualart D, Vives J. Chaos expansions and local times[J]. Publicacions Matematiques, 1992, 36(2B): 827-836.

[101] Nualart D, Vives J. Smoothness of Brownian local times and related functionals[J]. Potential Analysis, 1992, 1(3): 257-263.

[102] Nualart D, Xu F. Asymptotic behavior for an additive functional of two independent self-similar Gaussian processes[J]. Stochastic Processes and their Applications, 2019, 129(10): 3981-4008.

[103] Ngo H L, Ogawa S. On the discrete approximation of occupation time of diffusion processes[J]. Electronic Journal of Statistics, 2011, 5: 1374-1393.

[104] Oliveira M J, Da Silva J L, Streit L. Intersection local times of independent fractional Brownian motions as generalized white noise functionals[J]. Acta Applicandae Mathematicae, 2011, 113(1): 17-39.

[105] Pitt L D. Local times for Gaussian vector fields[J]. Indiana University Mathematics Journal, 1978, 27(2): 309-330.

[106] Russo F, Tudor C. On bifractional Brownian motion[J]. Stochastic Processes and their applications, 2006, 116(5): 830-856.

[107] Rosen J. Derivatives of self-intersection local times[J]. Séminaire de Probabilités XXXVIII, 2005, 263-281.

[108] Rogers L C G, Walsh J B. $A(t, B_t)$ is not a semimartingale[C]//Seminar on Stochastic Processes, 1991, 275-283.

[109] Rosen J, Yor M. Tanaka formulae and renormalization for triple intersections of Brownian motion in the plane[J]. Annals of Probability, 1991, 19(1): 142-159

[110] Rosen J. Continuous differentiability of renormalized intersection local times in $\mathbb{R}^1$[C]//Annales de l'IHP Probabilités et statistiques. 2010, 46(4): 1025-1041.

[111] Rosen J. Tanaka's formula for multiple intersections of planar Brownian motion[J]. Stochastic Processes and their Applications, 1986, 23(1): 131-141.

[112] Suryawan H P. Weighted local times of a sub-fractional Brownian motion as Hida distributions[J]. em Jurnal Matematika Integratif, 2019, 15(2): 81-87.

[113] Shen G. Necessary and sufficient condition for the smoothness of intersection local time of subfractional Brownian motions[J]. Journal of Inequalities and Applications, 2011, 139(1): 1-16.

[114] Shi Q. Fractional smoothness of derivative of self-intersection local times with respect to bi-fractional Brownian motion[J]. Systems & Control Letters, 2020, 138(4): 104627.

[115] Shieh N R. White noise analysis and Tanaka formula for intersections of planar Brownian motion[J]. Nagoya Mathematical Journal, 1991, 122: 1-17.

[116] Sang L, Chen Z. Existence and smoothness of local time and self-intersection local time for spherical Gaussian random fields[J]. Frontiers of Mathematics, 2023, 18(3): 591-614.

[117] Shi Q, Yu X. Fractional smoothness of derivative of self-intersection local times[J]. Statistics & Probability Letters, 2017, 129: 241-251.

[118] Song J, Xu F, Yu Q. Limit theorems for functionals of two independent Gaussian processes[J]. Stochastic Processes and their Applications, 2019, 129(11): 4791-4836.

[119] Tudor C, Xiao Y. Sample path properties of bifractional Brownian motion[J]. Bernoulli, 2007, 14: 1023-1052.

[120] Varadhan S. Appendix to ”Euclidean quantum field theory” by K. Symanzik[J]. Local Quantum Theory, 1969, 285.

[121] Wu D, Xiao Y. Regularity of intersection local times of fractional Brownian motions[J]. Journal of Theoretical Probability, 2010, 23(4): 972-1001.

[122] Whitt W. Stochastic-process limits: an introduction to stochastic-process limits and their application to queues[J]. Space, 2002, 500: 391-426.

[123] Wang X, Guo J, Jiang G. Collision local times of two independent fractional Brownian motions[J]. Frontiers of Mathematics in China, 2011, 6(2): 325-338.

[124] Xiao Y. Hölder conditions for the local times and the Hausdorff measure of the level sets of Gaussian random fields[J]. Probability Theory and Related Fields, 1997, 109: 129-157.

[125] Xiao Y. Strong local nondeterminism of Gaussian random fields and its applications[J]. Asymptotic Theory in Probability and Statistics with Applications, 2007, 136-176

[126] Xiao Y. Properties of local-nondeterminism of Gaussian and stable random fields and their applications[J]. Annales de la facultédes sciences de Toulouse Mathématiques, 2006, 15(1): 157-193.

[127] Yan L, Shen G. On the collision local time of sub-fractional Brownian motions[J]. Statistics & Probability Letters, 2010, 80(5-6): 296-308.

[128] Yan L, Yang X, Lu Y. P-variation of an integral functional driven by fractional Brownian motion[J]. Statistics & Probability Letters, 2008, 78(9): 1148-1157.

[129] Yan L, Yu X. Derivative for self-intersection local time of multidimensional fractional Brownian motion[J]. Stochastics an International Journal of Probability and Stochastic Processes, 2015, 87(6): 966-999.

[130] Yor M. The distribution of Brownian quantiles[J]. Journal of Applied Probability, 1995, 32(2): 405-416.

[131] Yu X. Smoothness of self-intersection local time of multidimensional fractional Brownian motion[J]. Communications in Statistics-Theory and Methods, 2019, 48(17): 4278-4293.

[132] Yu Q. Asymptotic properties for q-th chaotic component of derivative of self-intersection local time of fractional Brownian motion[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2020, 492(2): 124477.

[133] Yu Q. Higher-order derivative of self-intersection local time for fractional Brownian motion[J]. Journal of Theoretical Probability, 2021, 1-26.

[134] Yu Q, Chang Q, Shen G. Smoothness of higher order derivative of self-intersection local time for fractional Brownian motion[J]. Communications in Statistics-Theory and Methods, 2023, 52(10): 3541-3556.

[135] Yan L, Liu J, Chen C. On the collision local time of bifractional Brownian motions[J]. Stochastics and Dynamics, 2009, 9(03): 479-491.

[136] 陈希孺. 高等数理统计学[M]. 中国科学技术大学出版社, 1999.

[137] 董晓芳, 张良勇. 排序集抽样下系统可靠度的非参数估计[J]. 系统科学与数学, 2023, 43(06): 1635-1646.

[138] 黄志远. 随机分析学基础(第二版)[M]. 科学出版社, 2001.

[139] 黄志远, 严加安. 无穷维随机分析引论[M]. 科学出版社, 1997.

[140] 倪文清, 陈振龙. 算子尺度稳定随机场的局部不确定性和局部时的联合连续性[J]. 中国科学: 数学, 2020, 50: 301-316.

[141] 栾娜娜. 次分数布朗运动局部时的研究[J]. 数学学报(中文版), 2020, 63(01): 89-96.

[142] 林先伟, 秦学志, 尚勤. 混合分数布朗运动下欧式期权模糊定价研究[J]. 运筹与管理, 2022, 31(7): 173-178.

[143] 匡能晖. 关于次双分数布朗运动的振动局部时[J]. 数学进展, 2019, 48(5): 627-640.

[144] 桑利恒, 陈振龙, 郝晓珍. 双分数布朗运动重整化自相交局部时的平滑性[J]. 数学物理学报: A 辑, 2020, 40(3): 796-810.

[145] 吴光旭, 程乾生, 潘家柱. 中国股票市场风险值的非参数估计[J]. 北京大学学报(自然科学版), 2004, 40(5): 696-701.

[146] 温馨, 徐小雅, 郭先平. 风险概率准则下的非平稳马氏决策过程[J]. 应用概率统计, 2023, 39(4): 589-603.

[147] 尤左伟, 刘善存. 分数布朗运动下或有可转债定价模型[J]. 北京航空航天大学学报(社会科学版), 2019, 32(4): 78-86.

[148] 张爱丽, 刘章. 带两步保费率的复合 Poisson 风险模型的占位时(英文)[J]. 应用概率统计, 2020, 36(03): 261-276.

[149] 张万路, 殷晓龙, 赵翔华. 对偶延迟更新风险模型的占位时[J]. 数学物理学报, 2019, 39(4): 918-931.

[150] 朱志锋, 黄弘. 一般状态空间连续时间 Markov 过程的常返性[J]. 数学物理学报, 2021, 41(3): 860-873.

攻读博士学位期间承担的科研任务及主要成果

一、攻读博士学位期间参加的科研项目

1. 国家自然科学基金地区科学基金项目《混合高斯 Heston 资产价格模型构建及其在投资组合中的应用》(71961013), 参加人, 在研.
2. 国家自然科学基金地区科学基金项目《基于集成框架的欧式期权价格预测及应用》(72361016), 参加人, 在研.
3. 甘肃省优秀研究生“创新之星”项目《高斯过程的多重局部时及其在金融风险中的应用》(2021CXZX-701), 主持人, 结项.
4. 兰州财经大学博士研究生科研创新项目《分数布朗运动多重自相交局部时的渐近性研究》(2021D03), 主持人, 结项.

二、攻读博士学位期间发表的学术论文

[1] Derivative of multiple self-intersection local time for fractional Brownian motion[J]. Journal of Theoretical Probability (SCI, Corresponding author), 2023, 1-19.

[2] 对称 Stable 过程的多重自相交局部时研究[J]. 数学学报 (中文版) (CSCD, 第一作者), 2023, 66(04): 779-790.

[3] 基于离散观测的次分数Vasicek 模型的参数估计[J]. 山东大学学报 (理学版) (CSCD, 第一作者), 2023, 58(8): 1-12.

[4] 分数布朗运动的多重自相交局部时[J]. 中国科学. 数学 (稿号:SSM-2023-0071) (CSCD, 通讯作者) (外审).

[5] 分数布朗运动多重局部时的存在性与光滑性[J]. 应用数学学报 (CSCD, 通讯作者) (外审).

致谢

曾幻想过无数次, 会如何落笔我的博士论文致谢, 以为会是洋洋洒洒泪流满面, 实际却是难以下笔略有哽咽. 始于 2019 年秋, 终于 2023 年秋. 词难达意, 一生铭记.

出生于甘肃农村的我, 身边的同学大多初中或高中毕业就走进了柴米油盐, 养儿育女的家庭生活. 所幸我不一样, 30 岁还在读博的女性, 可能也是他们眼中奇怪的人, 总会有许多特定的偏见, 它好像一条长满荆棘的沟壑, 难以跨越, 且难以消失. 大器晚成也好, 登不到山顶也罢, 我没有成为很优秀的人, 但也没困在原地, 就很好. 求学路上, 有过怀疑、有过绝望, 感恩一路帮助我的师友与家人, 让我成为那个命运的漏网之鱼, 才能写下这篇博士论文的致谢. 家人的教育与引导, 让我意识到努力学习是我唯一能做的事情, 感谢我的父母和弟弟妹妹对我学习、生活的支持和鼓励, 你们用朴素的话语与实际的行动告诉我, 青春的底色应该是奋斗. 坚持学习这件事, 确实也让我人生之路越走越宽, 读过的书成为了光, 渐渐点亮了前方的路. 回望过去这艰难的四年多时间, 无比庆幸自己来到了这里, 收获了不一样的自己, 比原来更好的自己.

何其幸运, 师恩难忘. 首先要感谢我的导师郭精军老师, 一朝沐杏雨, 一生感师恩. 何其有幸, 成为老师带的第一届博士研究生. 从入学进入这个温暖的大家庭, 无比荣幸得到您的肯定也十分感谢导师为我博士生涯的每个阶段严守把关, 从研究方向的反复斟酌, 到论文语言的细节表述, 再到为人处世的态度道理. 导师的高瞻远瞩与低调谦逊、对学术严谨求实的态度和对学生无微不至的关心刻在了我的内心深处. 师从老师的四年多时光, 也是我人生中最为重要的一段记录. 感谢老师在我学术迷茫时期拉我一把, 如果没有老师, 我恐怕难以进入学术的状态. 老师在论文上对我细心指导与耐心督促, 在学术道路上对我无比鼓励与大力帮助, 在生活上更是像亲人般关心我的状态. 反反复复的论文打磨已深深映入我的脑海. 很感谢在统计与数据科学学院遇到的每一位老师, 诸多良师, 言传身教, 受益匪浅,

让我充分体会到老师们对教学的热情与对科研的求真. 可以想象又乏于文字, 在未来的工作中能遇到如此老师该是多么幸运. 恩师情义重, 愿老师们如春风.

知己难遇, 并肩前行. 感谢博士生涯里遇到的每一位优秀师兄师姐和师弟师妹, 孤军奋战总是艰难, 团结协作才能迎难而上. 感谢所有同门博士们一直以来对我的照顾和关心, 感谢马爱琴、汪育兵、康维义、谢雁、马小雯等研讨小组成员的学术交流, 在学术上毫无保留的答疑解惑与热情支持. 从来不觉得博士是一个多么优越的抬头, 也发现身边越优秀的同学越努力越低调. 学生情谊珍, 愿大家未来可期.

我有很爱我的爸爸妈妈, 尊重我大人般的决定, 也给足我小孩样的内心, 支撑我远航前行的脚步, 也永远为我留一盏小憩的灯. 我以你们为大幸福, 也很满足成为你们的小骄傲. 感谢我的弟弟和妹妹妹夫一家人, 无论是什么样的决定, 你们都一路无条件支持, 给我最强大的底气. 感谢小姨们一家人, 让我在兰州有家的感觉, 让我在读博路上有一位很棒的倾诉对象, 让我在前进方向上有一个引领标杆, 既是家人也是朋友更是良师. 感谢所有关心照顾我的家人, 也更是无比怀念这份激动永远无法传达到的远方. 至此已泪目, 愿家人都安好.

感谢我的丈夫牟其峰, 虽是新婚不久, 但这一路你对我的支持、关爱和包容都尽收眼底. 感谢你自认识起就对我的“盲目”信任和无条件支持, 促使我渐渐成为想成为的自己, 未来也请继续盲目信任. 读博的日子, 从不给我压力, 独自抗下家中的经济压力, 哪怕自己工作压力再大, 也始终把我的情绪放在首位. 你稳定的情绪和包容的心, 让我内心始终坚定无比. 最最要感谢你, 让我遇到了最好的婆婆与公公还有小叔子和小姑子一家, 感恩有你们的支持, 虽然大论文的写作伴随着我的备婚期, 但你们承担了我应担的责任, 不仅让我可以心无旁骛的完成我的大论文写作, 还让我可以有一个完美的婚礼, 不留遗憾. 词难达意, 你们的恩情我铭记于心!

写尽千山, 落笔致自己. 十分珍惜每一个阶段遇到的自己, 是一开始迷茫的学术小白, 是情绪丰富默默落泪的哭包, 是无数个日夜枯燥坐在电脑桌前的论文工作者, 是忙碌穿梭在教室与图书馆的莘莘学子中的一员, 是不断挫败又重拾信心的独立行走的大人也始终是那个带着微笑与热情追求卓越的姑娘. 学会了思考反省, 接受孤独无助懂得了如何调节情绪和心态, 看淡随时可能发生的不确定性, 平常心于投出去的论文...这些都是读博的收获吧. 对于读博这个决定, 可能是一念之间; 对于读博这个过程, 却是漫长的四年多时间. 对于未来, 希望遇见更多可能性的自己, 在专业领域优秀而迷人, 在其它地方可爱如小孩, 成熟稳重又葆有珍贵的少年心.

行笔至此, 不是终点, 是崭新的起点. 路还是那条路, 只是要和昨日同行的人暂时作别, 继续走下去. 希望这次能有不一样的成长, 虽不知未来会怎样, 但已学会接受生活的所有馈赠, 好的或坏的. 这一路追着光、靠近光, 未来希望自己也能活成为一道光, 如果能散发哪怕一点点光, 照亮别人的人生, 那就更美好了. 此去经年, 惟愿一生坦荡, 一生纯善.

2023年9月3日于兰州财经大学图书馆