

分类号 _____
U D C _____

密级 _____
编号 10741



硕士学位论文

论文题目：混合次分数跳扩散模型下的回望期权定价
及统计模拟分析

研究生姓名：安翔

指导教师姓名、职称：郭精军 教授

学科、专业名称：统计学 数理统计学

研究方向：金融统计分析

提交日期：2022年5月30日

独创性声明

本人声明所呈交的论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意。

学位论文作者签名： 安翔 签字日期： 2022.5.30

导师签名： 郭树军 签字日期： 2022.5.30

关于论文使用授权的说明

本人完全了解学校关于保留、使用学位论文的各项规定， 同意（选择“同意”/“不同意”）以下事项：

1. 学校有权保留本论文的复印件和磁盘，允许论文被查阅和借阅，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文；

2. 学校有权将本人的学位论文提交至清华大学“中国学术期刊（光盘版）电子杂志社”用于出版和编入 CNKI《中国知识资源总库》或其他同类数据库，传播本学位论文的全部或部分内容。

学位论文作者签名： 安翔 签字日期： 2022.5.30

导师签名： 郭树军 签字日期： 2022.5.30

Lookback Options Pricing and Statistical Simulation Analysis under the Mixed sub-Fractional Jump Diffusion Model

Candidate : Xiang An

Supervisor: Jingjun Guo

摘 要

回望期权是一种奇异期权，它具有强路径依赖性，其定价研究具有一定的难度和复杂性。如何对其进行合理定价一直是金融业界和学者关注的焦点，也是目前金融界理论研究的前沿问题。目前，学者们对于回望期权定价的研究大多都基于经典的 Black-Scholes 期权定价模型。但是，该模型中的假设条件过于严苛，譬如假定标的资产的价格变化服从几何布朗运动并且市场是无摩擦的，这并不能刻画金融资产价格的分形特征，且不能反映金融市场的实际交易情况。因此，本文采用混合次分数布朗运动驱动标的资产价格的变化，并结合 Poisson 过程建立混合次分数跳扩散模型，主要研究内容分为三部分：

(1) 基于混合次分数布朗运动，建立带红利的永久美式回望期权的定价模型。首先，利用 Δ -对冲原理得到该期权价格所满足的偏微分方程及其边界条件。然后，运用变量代换法求解该偏微分方程，从而获得混合次分数布朗运动下，永久美式回望期权价格的闭式解与最优实施边界。最后，通过数值模拟，验证该闭式解的线性等比例放缩性质，并且讨论 Hurst 指数、波动率等对期权价值的影响。

(2) 引入 Poisson 过程，建立混合次分数跳扩散模型，得到具有交易费用的欧式回望期权定价模型。首先，利用 Δ -对冲原理得到该期权价格所满足的非线性偏微分方程及其边界条件。然后，运用变量代换法对该偏微分方程进行降维，构造 Crank-Nicolson 格式求其数值解。最后，验证该数值方法的有效性，并讨论交易费用、波动率与无风险利率等对期权价值的影响。

(3) 选取真实的股票数据进行统计模拟分析。首先，在各大股票交易平台收集所需要的股票数据。然后，对所得数据进行简单的描述性统计分析，并对定价模型中的参数进行估计。最后，基于 Monte Carlo 模拟法获得不同定价模型下股票价格的模拟值，并与真实值进行对比，从而验证模型的有效性。

研究表明：与几何布朗运动、分数布朗运动、混合分数布朗运动相比，混合次分数跳扩散模型能够更好地刻画出金融资产价格的分形特征以及不连续波动，在此基础上对回望期权进行定价是合理有效的。

关键词：回望期权 混合次分数布朗运动 跳扩散模型 交易费用 差分格式

Abstract

Lookback options are exotic options, which have strong path dependence and are difficult and complex to price. How to reasonably price the option has been the focus of the financial industry and scholars, and is currently the forefront of theoretical research in the financial sector. At present, most of the research on the pricing of lookback options is based on the classical Black-Scholes option pricing model. However, the assumptions in this model are too stringent, such as the assumption that the price change of the underlying asset follows geometric Brownian motion and the market is frictionless, which does not characterize the fractal characteristics of financial asset prices and does not reflect the actual trading situation of the financial market. Therefore, this thesis uses the mixed sub-fractional Brownian motion to drive changes in the price of the underlying asset and combines the Poisson process to build a mixed sub-fractional jump diffusion model with three main research components.

(1) The pricing model for perpetual American lookback options of stock paying continuous dividend is constructed under the mixed sub-fractional Brownian motion. Firstly, the partial differential equation satisfying the option and its boundary conditions are obtained by using the Delta hedging principle. Then, a closed form solution to the perpetual American lookback options as well as its optional exercise boundary are

respectively obtained by using variable substitution method. Finally, numerical simulations are carried out to verify that the closed solution has the linear scaling property and it is discussed that the effects of Hurst index and volatility on the value of options.

(2) The pricing model of European lookback options with transaction costs is established based on the mixed sub-fractional Brownian motion and the Poisson process. Firstly, the nonlinear partial differential equation satisfying the option and its boundary conditions are obtained by using the Delta hedging principle. Then, the partial differential equation is reduced by variable substitution method, and its numerical solution is obtained by constructing a Crank-Nicolson format. Finally, the validity of the numerical method is verified, and the effects of transaction costs, volatility and risk-free interest rate on the value of the option are discussed.

(3) We select real stock data for statistical simulation analysis. Firstly, the required stock data are obtained from major stock trading platforms. Then, simple descriptive statistical analysis is performed on the data and the parameters in the pricing model are estimated. Finally, the simulated values of stock prices under different pricing models are obtained based on Monte Carlo simulations and compared with the real values to verify the validity of the mixed sub-fractional jump diffusion model.

The study result shows that the mixed sub-fractional jump diffusion model can better characterize the fractal characteristics and discontinuous fluctuations of financial asset prices than other models and that it is reasonable and effective to price lookback options on the model.

Key words: Lookback options; Mixed sub-fractional Brownian motion; Jump diffusion model; Transaction costs; Difference format

目 录

1 引言	1
1.1 研究背景	1
1.2 研究现状	1
1.3 研究意义	5
1.4 研究内容及安排	5
1.5 创新之处	7
2 预备知识	8
2.1 相关定义	8
2.2 经典 B-S 期权定价模型	9
2.3 次分数布朗运动	9
2.4 混合次分数布朗运动	10
2.5 跳扩散模型	11
3 混合次分数布朗运动下永久美式回望期权的定价	12
3.1 金融市场的基本假设条件	12
3.2 永久美式回望期权价格的偏微分方程	12
3.3 永久美式回望期权的定价公式	15
3.4 永久美式回望期权的数值模拟	18
4 混合次分数跳扩散模型下欧式回望期权的定价	21
4.1 带交易费的基本假设条件	21
4.2 带交易费的欧式回望期权定价模型	21
4.3 定价模型的数值解	25

4.4 欧式回望期权的数值模拟	28
5 统计模拟分析	31
5.1 数据选取	31
5.2 数据的统计特征以及正态性检验	31
5.3 参数估计	35
5.4 模拟结果	37
5.5 拟合效果分析	39
6 研究总结与展望	43
6.1 研究总结	43
6.2 研究展望	43
参考文献	45
致 谢	50
硕士期间的学术成果	51
附录	52

1 引言

1.1 研究背景

随着金融市场日益呈现出高度的不确定性和高风险性,无论金融机构还是个人投资者都亟需丰富的金融衍生品来管理和规避风险,期权就是其中一种。对于金融衍生品在金融市场中所起到的作用,1990年诺贝尔经济学奖得主 Merton Miller 有过这样的经典评价:“企业和机构可以利用金融衍生品有效和经济地处理困扰其多年的风险,世界也会随之变得更加安全,而不是变得更加危险。”

然而,由于标准期权缺乏弹性而存在诸多局限性。近年来,通过增加约束条件或新变量等方式,金融机构在标准期权的基础上衍生出了许多非标准期权,称为奇异期权,回望期权就是其中一种。它是一种强路径依赖期权,即期权的收益不仅依赖于到期日当天标的资产的价格,而且依赖于整个有效期内标的资产价格的变化幅度。该期权赋予持有者“低买高卖”的权利,这是他们梦寐以求的情形:期权持有者可以选取回望期内最低的价格,买入标的资产;也可以选取回望期内最高的价格,卖出标的资产。由于持有者始终处于最有利的地位,这保证了他可以得到较高的收益,从而回望期权的价格也十分昂贵。鉴于此,回望期权的定价一直是期权定价中的热点问题之一。

目前,对于回望期权的定价研究大多都基于经典的 Black-Scholes 期权定价模型(以下简称 B-S 模型)。但是,B-S 模型中的假设条件过于严苛,譬如采用几何布朗运动驱动价格变化,而且市场是无摩擦的,这并不符合金融市场的实际情况。因此,本文从 B-S 模型的不足出发,对回望期权的定价模型进行改进及扩展研究。

1.2 研究现状

1.2.1 回望期权定价的研究现状

对于回望期权的定价研究,最早可以追溯到 Goldman 等(1976)基于经典的 B-S 模型,得到了具有浮动行权价的欧式回望期权价格的闭式解,这奠定了回望

期权定价研究的基础。此后,国内外学者从不同的角度对回望期权的定价问题进行了大量研究。Broadie 等(1999)在离散情形下研究了具有浮动行权价的欧式回望期权的定价问题。Terry(1997)使用二叉树方法,得到了回望期权价格的数值解,但该方法的计算速度较慢。Duffie 等(2000)基于傅里叶变换,提高了二叉树方法的计算速度,也得到回望期权价格的数值解。姜礼尚(2003)基于偏微分定价方法,得到了欧式回望期权的定价公式。Buchen 等(2005)简化了 B-S 模型下的公式推导,结合障碍期权的积分形式,给出了回望期权的定价公式。袁国军等(2006)考虑交易成本对定价结果的影响,得到了回望期权价格满足的偏微分方程。黄伟等(2009)基于回望期权的路径依赖性,研究了期货定价模型。袁国军等(2011)使用有限差分方法,得到了带有交易成本的回望期权价格的数值解。孙祥艳(2018)引入随机利率模型,并同时考虑交易费,研究了回望期权的定价问题。黄东南(2019)基于跳扩散模型,建立了美式回望期权的定价模型,并利用 WLSM 法求得该期权价格的数值解。Zhang(2021)考虑浮动利率,并基于不确定性理论,得到了回望期权的定价公式。

1.2.2 分数布朗运动下期权定价的研究现状

由于 B-S 模型中采用几何布朗运动描述资产价格的变化,这并不能刻画出价格变动的分形特征,因此有学者提出用分数布朗运动驱动标的资产价格的变化。Peters(1989)首次提出采用分数布朗运动驱动标的资产的价格变化,但是直接将分数布朗运动引入定价模型中,会产生套利机会。为了刻画标的资产价格的长相依、自相似等特征,并消除套利机会,Neuhaus(2008)和 Hu 等(2003)通过 Wick-Itô 积分进一步发展了分数布朗运动的积分理论,并且证明了 Itô 型分数市场是无套利的。在此基础上,学者们对期权定价问题进行了大量研究。刘韶跃等(2004)基于分数布朗运动,并考虑标的资产支付红利,得到了欧式未定权益的一般定价公式及几种奇异期权的定价公式。赵旭(2008)基于分数布朗运动,对 B-S 模型进行了扩展研究。肖炜麟等(2013)基于双分数布朗运动,研究了期权定价的相关问题。特别地,对于回望期权也有不少类似的研究,如桑利恒等(2010)基于分数布朗运动,建立了欧式回望期权的定价模型。杨朝强(2012)基于混合分数布朗运动,也得到了类似结果。Chen 等(2019)得到了混合分数布朗运动下回望期权价格的数值解。

然而, 此类研究中大多都是采用分数布朗运动或混合分数布朗运动来刻画标的资产价格的变化, 遗憾的是这并不能显著地改善定价模型的精确度。为了更好地刻画标的资产的价格变动, 有学者引入混合次分数布朗运动。Charles 等(2015)证明了当 Hurst 指数 $H \in [0.75, 1)$ 时, 混合次分数布朗运动具有长相依、自相似等特征, 并且是一个半鞅, 此时, 由混合次分数布朗运动驱动的金融市场是完备的。此后, 有学者基于混合次分数布朗运动对期权定价问题进行研究。如郭精军等(2018)建立了混合次分数布朗运动下的定价模型, 给出了永久美式期权的定价公式及其最优实施边界, 并通过实证分析验证了混合次分数布朗运动下标的资产的模拟价格更接近真实值。彭波等(2020)基于混合次分数布朗运动, 并考虑资产价格发生跳跃的情形, 得到了欧式期权的定价公式。

1.2.3 跳扩散模型下期权定价的研究现状

由于几何布朗运动的路径是连续的, 不能刻画出标的资产价格的不连续波动, 因此有学者提出用跳扩散模型描述这种不连续的波动。在金融市场中, 各种突发事件都可能会对股价产生较大的影响, 此时股票价格就可能会出现不连续的波动。Merton(1976)为了描述这种不连续的波动, 引入 Poisson 过程建立了跳扩散模型。此后, 许多学者对该模型做了进一步的研究。Scott(1997)在此基础上, 研究了欧式期权的定价问题。Gukhal(2001)基于跳扩散模型, 采用傅里叶变换方法建立了美式期权的定价模型。Xu 等(2003)、Kim 等(2007)基于跳扩散模型, 分别对欧式期权和亚式期权的定价问题进行了研究。Clift 等(2008)提出了一种隐含的有限差分方法, 在跳扩散模型下, 分别讨论了欧式期权和美式期权的定价问题。Zhang 等(2009)研究了跳扩散模型下美式期权的定价问题, 采用离散化的方法求得其数值解。魏正元等(2011)引入有多个风险源的跳扩散模型, 推导出了脆弱欧式期权的定价公式。张利花(2013)利用 Monte Carlo 法得到跳扩散模型下美式回望期权价格的数值解。姚怡等(2018)基于跳扩散模型, 提高了亚式期权的定价精度。甘小艇等(2019)利用全离散有限体积格式, 求解跳扩散模型, 并验证了其方法的合理性。Yang(2019)基于混合分数跳扩散模型, 研究了美式回望期权定价的相关问题。吴桑等(2019)基于跳扩散模型, 研究了脆弱期权定价的相关问题, 并给出了其定价公式。

1.2.4 考虑交易费用的期权定价研究现状

由于 B-S 模型中未考虑交易费用,这并不符合金融市场的实际情况,因此有学者提出具有交易费用的定价模型。Leland(1985)首次提出了考虑交易费用的期权定价模型,并给出了带交易费用的欧式期权价格的闭式解。此后,许多学者研究了带交易费用的期权定价问题。Grandits 等(2001)进一步优化了 Leland 方法的证明,论证了具有交易费用的期权定价模型的合理性。Amster 等(2005)考虑交易费用,对 B-S 定价模型进行扩展研究,得到了带交易费用的欧式期权定价公式。Mastinsek(2006)利用自融资策略对冲风险,得到了离散情形下具有交易费用的定价模型。孙琳(2009)基于分数布朗运动,得到了带交易费用的欧式期权定价公式。王晓天(2010, 2011)基于分数布朗运动,研究了离散情形下带交易费的欧式期权定价问题。Mariani 等(2012)基于随机波动率模型,建立了具有交易费用的欧式期权定价模型,并给出了该模型的数值解。Gu 等(2012)采用时变分数布朗运动刻画资产的价格变化,研究了带有交易费用的期权定价问题。肖炜麟等(2014)基于次分数布朗运动,建立了带交易费用的备兑权证定价模型。Sun 等(2014)基于分数布朗运动,得到了带交易费用的欧式回望期权价格所满足的偏微分方程,并通过构造 Crank-Nicolson 格式,求得其数值解。Shokrollahi(2018)基于混合分数布朗运动,在离散情形下,得到了带交易费用的欧式期权的定价公式。陈海珍等(2018)采用混合分数布朗运动,并考虑交易费用,建立了欧式回望看跌期权的定价模型。

1.2.5 文献述评

通过梳理已有的文献发现,学者们对回望期权的定价做了大量研究,也取得了一些有意义的成果,为本文的研究提供了诸多借鉴与参考。但深入分析,仍有以下提升空间:

(1) 目前对回望期权的定价研究,大多都是基于分数布朗运动或混合分数布朗运动。但是,这两种具有分形特征的随机过程并不能很好地刻画出金融资产价格的分形特征。因此,可以采用混合次分数布朗运动,进一步提高定价模型的精确度。

(2) 已有研究的切入点比较单一，大多都只针对标的资产价格的一个或两个特征展开，很少有学者同时从标的资产价格的分形特征和不连续波动，以及考虑交易费用的角度去研究回望期权的定价问题。因此，从多角度同时考虑 B-S 模型的不足，从而对回望期权的定价进行拓展研究显得十分必要。

1.3 研究意义

回望期权是一种由标准期权衍化、派生而来的新型期权，它具有强路径依赖性，加上考虑交易费用和跳跃等因素的影响，其定价研究具有一定的难度和复杂性。如何对其进行合理定价一直是金融业界和学者关注的焦点，也是目前金融界理论研究的前沿问题。因此，回望期权的定价研究具有重要的理论意义和现实意义。

(1) 理论意义

丰富期权定价理论。由于 B-S 模型中的假设条件与金融市场的实际情况不相符，故本文采用混合次分数布朗运动刻画标的资产价格的变化趋势，基于此得到了永久美式回望期权价格所满足的偏微分方程及定价公式，拓展了永久美式回望期权的定价研究。并且，在考虑交易费用和标的资产价格发生跳跃的情形下，结合 Poisson 过程，建立了具有交易费用的欧式回望期权定价模型，丰富了欧式回望期权的定价理论。

(2) 现实意义

为投资人员提供决策依据。通过对回望期权定价的研究，让金融投资者更加科学地认识回望期权，为其进行理性投资、规避风险、获得超额收益提供参考，使得投资者能够稳定收益，降低金融风险。同时，有助于金融市场的繁荣与稳定，也对金融衍生品的丰富具有重要的现实意义。

1.4 研究内容及安排

1.4.1 研究内容

本文采用混合次分数布朗运动驱动标的资产价格的变化，在此基础上主要研究以下内容：

(1) 建立混合次分数布朗运动下带红利的永久美式回望期权的定价模型。根据 Δ -对冲原理, 获得该期权价格所满足的偏微分方程; 运用变量代换法求解该偏微分方程, 得到永久美式回望期权的定价公式与最优实施边界; 讨论了定价公式中各参数对定价结果的影响。

(2) 建立混合次分数跳扩散模型下具有交易费用的欧式回望期权定价模型。引入 Poisson 过程与混合次分数布朗运动相结合, 建立了混合次分数跳扩散模型以此来刻画标的资产价格发生跳跃的情形; 得到了该模型下欧式回望期权价格所满足的非线性偏微分方程, 通过构造 Crank-Nicolson 格式求得其数值解; 验证了该数值方法的有效性, 并讨论了各参数对定价结果的影响。

(3) 选取真实的股票数据进行统计模拟分析。通过各大股票交易平台收集所需要的股票数据, 接着对所得数据进行简单的描述性统计分析, 得到数据的基本特征, 并对定价模型中的未知参数进行估计; 采用 Monte Carlo 模拟法, 分别获得了几何布朗运动、分数布朗运动、混合分数布朗运动、混合次分数跳扩散模型下股票价格的模拟值, 并与真实值进行对比, 从数值模拟的角度验证了定价模型的有效性。

1.4.2 结构安排

第一部分为引言。介绍选题的研究背景、研究现状及意义与研究内容和创新之处等。

第二部分为预备知识。介绍了回望期权定价理论的相关定义、经典 B-S 期权定价模型、次分数布朗运动、混合次分数布朗运动和跳扩散模型的相关内容。

第三部分为永久美式回望期权的定价研究。基于混合次分数布朗运动, 通过数理推导, 得到了该期权的定价公式以及最优实施边界。

第四部分为欧式回望期权的定价研究。基于混合次分数跳扩散模型, 并考虑具有交易费用情形, 建立了欧式回望期权的定价模型, 得到了该模型的数值解。

第五部分为统计模拟分析。利用 Monte Carlo 法, 对不同模型下股票的价格进行模拟, 并与真实值进行对比, 验证混合次分数跳扩散模型的有效性。

第六部分为研究的总结及展望。总结了全文要点, 并且对未来研究方向和内容做了简单展望。

1.5 创新之处

针对现有定价模型的不足，本文主要的工作及创新在于以下三点：

第一，采用混合次分数布朗运动驱动标的资产的价格变化。学者们通过金融市场的大量实证研究发现：金融资产对数收益率的分布呈“尖峰厚尾”状，并不服从正态分布，并且金融资产的价格变化具有长相依、自相似等分形特征，不是单纯的随机游走。因此，本文采用混合次分数布朗运动刻画标的资产的价格变化，从而能够更好地体现出金融市场的分形特征，基于此，推导出了永久美式回望期权的定价公式及最优实施边界。

第二，引入 Poisson 过程刻画标的资产价格的不连续波动。许多关于标的资产价格的实证研究表明：当一个公司或行业面临重大事件发生时，譬如自然灾害，疫情等，资产价格会发生异常的跳跃，即此时资产价格的变化路径不是连续的。因此，本文建立混合次分数跳扩散模型，从而更好地刻画出标的资产价格的不连续波动。

第三，建立具有交易费用的欧式回望期权定价模型。在实际的金融市场中，每次交易标的资产都需要缴纳一定的交易费和税收。虽然每笔交易费用都较小，可以忽略不计，但是投资者为了对冲风险，需要进行频繁交易来调整持有标的资产的份额，此时每笔交易费积累到一起就会比较高，从而不能直接将其忽略掉。因此，本文基于混合次分数跳扩散模型，建立了具有交易费用的欧式回望期权定价模型，并给出了模型的数值解。

2 预备知识

这部分主要介绍回望期权定价理论的相关定义、经典 B-S 期权定价模型、次分数布朗运动、混合次分数布朗运动和跳扩散模型的相关内容。

2.1 相关定义

本文针对回望期权建立定价模型，在推导过程需要用到 Δ -对冲原理，下面给出相关定义。

定义 2.1^[42]（回望期权） 回望期权(Lookback options)就是在期权到期日持有人可以“回望”期权的有效期内标的资产价格变化的整个过程，选取最低价格作为行权价购进标的资产，或者选取最高价格作为行权价出售标的资产。

设回望期权的有效期（也称为回望期）为 $[0, T]$ ，标的资产的价格 S_t 在该回望期内达到的最大值和最小值分别记为 $M_t = \max_{0 < t < T} S_t$ 和 $m_t = \min_{0 < t < T} S_t$ 。若采用最大值 M 作为行权价格，则得到具有浮动行权价的回望看跌期权，其回报为 $(M - S_T)^+$ ；若采用最小值 m 作为行权价格，则得到具有浮动行权价的回望看涨期权，其回报为 $(S_T - m)^+$ 。

定义 2.2^[42]（ Δ -对冲原理） 构造投资组合 Π ：一份给定的期权 V ， Δ 份在相反方向交易的标的资产 S 。选取适当的 Δ ，使得投资组合 Π 在 $(t, t + dt)$ 时间段内是无风险的，这称为 Δ -对冲原理。

在模型推导过程中，需要构造投资组合，并且要保证不存在套利机会，下面给出相关定义。

定义 2.3^[42]（自融资策略） 如果在整个交易期 $[0, T]$ 内，投资人在决定投资策略 Π 以后，没有加入新资金，也没有资金被消耗或抽走，则称投资策略 Π 是自融资的。

定义 2.4^[42]（套利机会） 一个自融资策略 Π 在 $[0, T]$ 内存在套利机会，如果存在 $t \in [0, T]$ ，当 $V_t(\Pi) = 0$ 时，使得 $V_T(\Pi) \geq 0$ ，并且 $P\{V_T(\Pi) > 0\} > 0$ 。

定义 2.5^[42]（无套利市场） 如果任何自融资策略 Π 都不存在套利机会，则称

市场是无套利的。

2.2 经典 B-S 期权定价模型

1973 年 Fischer Black 和 Myron Scholes 建立了 B-S 期权定价模型, 并给出了欧式期权的定价公式, 这给期权定价的理论方面带来了重大突破, 对后续期权定价研究有着深远的影响。B-S 模型的基本假设^[2]:

(1) 标的资产价格 S_t 服从几何布朗运动

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

其中, μ 表示标的资产的期望回报率, σ 表示波动率, W_t 表示标准布朗运动;

(2) 无风险利率 r 为常数;

(3) 市场是无摩擦的, 并且标的资产不支付红利;

(4) 没有对交易头寸大小、方向和时间的限制, 无卖空限制;

(5) 市场是完全的, 不存在套利机会。

基于以上假设, 通过推导可得欧式期权价格所满足的偏微分方程, 称为 B-S 方程:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} + r S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} - rV = 0,$$

求解该方程, 就可得到 B-S 模型下欧式期权的定价公式:

$$V(S_t, t) = Ke^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t N(-d_1),$$

$$U(S_t, t) = S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2),$$

其中,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t},$$

$N(\cdot)$ 为标准正态分布的累积概率分布函数, K 为行权价格, T 为到期日, V 表示看跌期权的价格, U 表示看涨期权的价格。

2.3 次分数布朗运动

2004 年 Bojdeckia 等在分数布朗运动的基础上, 研究了一类更一般的高斯过

程，并将这个过程称为次分数布朗运动。该过程具有分数布朗运动的一些性质，譬如自相似、长相依性，但与分数布朗运动不同的是，分数布朗运动的增量是平稳的，而它具有非平稳的增量。

定义 2.6^[3] 次分数布朗运动是 Hurst 指数 $H \in (0, 1)$ 的连续高斯过程，记为 $\{\xi_t^H, t \geq 0\}$ ，其均值为 $E(\xi_t^H) = 0$ ，协方差为

$$E(\xi_t^H \xi_s^H) = t^{2H} + s^{2H} - \frac{1}{2}(|t + s|^{2H} + |t - s|^{2H}).$$

次分数布朗运动 ξ_t^H 具有如下性质：

- (1) 自相似性：当 $a > 0$ 时，过程 $\{\xi_{at}^H, t \geq 0\}$ 与 $\{a^H \xi_t^H, t \geq 0\}$ 具有相同分布；
- (2) 长相依性：当 Hurst 指数 $H \in (0.5, 1)$ 时，令

$$y(n) = \text{Cov}(\xi_1^H, \xi_{n+1}^H - \xi_n^H),$$

则有 $\sum_{n=1}^{\infty} y(n) = \infty$ ，即 ξ_t^H 具有长相依性。

- (3) 增量的非平稳性：对于 $\forall 0 < s \leq t$ ，有

$$E(\xi_t^H - \xi_s^H)^2 = -2^{2H-1}(t^{2H} + s^{2H}) + (t + s)^{2H} + (t - s)^{2H}.$$

- (4) 对于 $\forall t > 0$ 和 $H \in (0, 1)$ ，有

$$E(\xi_t^H)^2 = (2 - 2^{2H-1})t^{2H}.$$

2.4 混合次分数布朗运动

在次分数布朗运动的基础上，结合布朗运动，将两者进行线性组合，就可以得到混合次分数布朗运动，下面给出其定义。

定义 2.7^[6] 设 (Ω, \mathcal{F}, P) 是一个完备的概率空间，混合次分数布朗运动 M_t^H 是布朗运动 W_t 与次分数布朗运动 ξ_t^H 的一个线性组合，即

$$M_t^H = M_t^H(a, b) = aW_t + b\xi_t^H, \forall t \geq 0,$$

其中， $a, b \in \mathbb{R}$ 且不同时为 0； H 为 Hurst 指数； W_t 与 ξ_t^H 相互独立。 M_t^H 具有以下性质：

(1) M_t^H 是一个中心的高斯过程;

(2) $M_0^H = aW_0 + b\xi_0^H = 0$;

(3) $\forall u, v \geq 0$, M_u^H 与 M_v^H 的协方差函数为

$$\text{Cov}(M_u^H(a, b), M_v^H(a, b)) = a^2(u \wedge v) + b^2(u^{2H} + v^{2H} - \frac{1}{2}((u+v)^{2H} + |u-v|^{2H}))$$

其中, $u \wedge v = \min\{u, v\}$;

(4) $\forall t > 0$, M_t^H 平方的期望函数为

$$E((M_t^H(a, b))^2) = a^2t + b^2((2 - 2^{2H-1})t^{2H});$$

(5) 当 $a \neq 0$ 并且 $H \in [0.75, 1)$ 时, 混合次分数布朗运动 M_t^H 是一个半鞅。

2.5 跳扩散模型

为了刻画标的资产价格变化的不连续性, 1976年 Merton 首次提出跳扩散模型, 即在几何布朗运动的基础上, 结合 Poisson 过程刻画标的资产价格的变动^[39]:

$$dS_t = (\mu - \lambda k)S_t dt + \sigma S_t dW_t + JS_t dQ_t, \quad (2.1)$$

其中, Q_t 表示参数为 λ 的 Poisson 过程, J 是描述跳跃幅度的独立同分布随机变量, 且 $E(J) = k$.

如果用式(2.1)描述股票价格的变化, 则称股价遵循跳扩散模型。

3 混合次分数布朗运动下永久美式回望期权的定价

本节主要研究永久美式回望期权的定价。基于混合次分数布朗运动，建立了带红利的永久美式回望期权的定价模型。首先，获得了该期权价格所满足的偏微分方程及其边界条件。然后，运用变量代换法求解该偏微分方程，得到了混合次分数布朗运动下，永久美式回望期权价格的闭式解与最优实施边界。最后，运用 R 语言、MATLAB 等软件进行数值模拟。

3.1 金融市场的基本假设条件

假设金融市场中存在两种可自由连续交易的资产，无风险资产 B_t （如债券）和风险资产 S_t （如股票），并满足以下条件：

- (1) 无交易费用；
- (2) 标的资产可自由、连续交易，无卖空限制；
- (3) 标的资产连续支付红利，红利率为常数，记为 q ；
- (4) 风险资产 S_t 的价格满足混合次分数布朗运动

$$dS_t = (\mu - q)S_t dt + \sigma_1 S_t dW_t + \sigma_2 S_t d\xi_t^H, \quad (3.1)$$

其中， μ 表示风险资产的期望回报率， σ_1 与 σ_2 均为非负常数分别表示布朗运动与次分数布朗运动的波动率，Hurst 指数 $H \in [0.75, 1)$ ；

- (5) 无风险资产 B_t 的价格满足下面的微分方程

$$dB_t = rB_t dt, \quad (3.2)$$

其中， r 表示无风险利率并且为常数。

3.2 永久美式回望期权价格的偏微分方程

根据假设条件，利用 Δ -对冲原理，得到了混合次分数布朗运动下，永久美式回望看跌期权价格所满足的偏微分方程，接下来以定理的形式给出。

引理 3.1 设 $V = V(t, S_t)$ 是二元可微函数，如果随机过程 S_t 满足式(3.1)，则有

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + (\mu - q)S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \right) dt + H(2 - 2^{2H-1})\sigma_2^2 t^{2H-1} S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} dt + \sigma_1 S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} dW_t + \sigma_2 S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} d\xi_t^H. \quad (3.3)$$

证明：由 Taylor 展开，得

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S_t} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} (dS_t)^2 + o(dt). \quad (3.4)$$

根据混合次分数布朗运动的性质(3)知

$$\begin{aligned} & \text{Cov}(M_u^H(\sigma_1, \sigma_2), M_v^H(\sigma_1, \sigma_2)) \\ &= \sigma_1^2(u \wedge v) + \sigma_2^2(u^{2H} + v^{2H} - \frac{1}{2}((u+v)^{2H} + |u-v|^{2H})), \end{aligned}$$

则有

$$E(M_t^H(\sigma_1, \sigma_2))^2 = \sigma_1^2 t + \sigma_2^2 (2 - 2^{2H-1}) t^{2H}.$$

因此，可近似地认为

$$\begin{aligned} (dM_t^H(\sigma_1, \sigma_2))^2 &= \text{Var}(dM_t^H(\sigma_1, \sigma_2)) = E(dM_t^H(\sigma_1, \sigma_2))^2 \\ &= (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 (2 - 2^{2H-1}) 2H t^{2H-1}) dt. \end{aligned}$$

从而

$$(dS_t)^2 = \sigma_1^2 S_t^2 dt + \sigma_2^2 (2 - 2^{2H-1}) 2H t^{2H-1} S_t^2 dt + o(dt). \quad (3.5)$$

将式(3.1)、(3.5)代入式(3.4)，并忽略高阶无穷小，就可以得到式(3.3)。证毕。

定理 3.1 考虑永久美式回望看跌期权，其标的资产价格 S_t 满足式(3.1)，记该期权的最优实施边界为 S_τ 。对于 $\forall t \geq 0$ ， $x = S_t$ ， $y = \max_{0 \leq u \leq t} S_u$ ，则混合次分数布朗运动下永久美式回望看跌期权的价格 $V = V(x, y)$ 满足的偏微分方程为

$$\left(\frac{1}{2}\sigma_1^2 + (2 - 2^{2H-1})Ht^{2H-1}\sigma_2^2 \right) x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (r - q)x \frac{\partial V}{\partial x} - rV = 0, \quad (3.6)$$

边界条件为

$$V(S_\tau, y) = y - S_\tau, \quad \frac{\partial V}{\partial y} \Big|_{x=y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{x=S_\tau} = -1.$$

证明：构造投资组合 Π ：一份永久美式回望看跌期权多头和 Δ 份标的资产空头，那么在 t 时刻该投资组合的价值为

$$\Pi_t = V - S_t \Delta = V - x \Delta. \quad (3.7)$$

根据假设(3)可知，投资组合在 dt 时间内的价值变化为

$$d\Pi_t = dV - \Delta dx - \Delta q x dt. \quad (3.8)$$

根据引理 3.1, 有

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + (\mu - q)x \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (2 - 2^{2H-1}) \right. \\ \left. Ht^{2H-1} \sigma_2^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) dt + \sigma_1 x \frac{\partial V}{\partial x} dW_t + \sigma_2 x \frac{\partial V}{\partial x} d\xi_t^H + \frac{\partial V}{\partial y} dy. \quad (3.9)$$

因为 $y = \max_{0 \leq u \leq t} S_u$ 是路径依赖变量, 故 y 关于 t 不可微。因此, 构造序列 $\{y_n\}$ 对 y 进行逼近^[42]。令

$$y_n = \left(\frac{1}{t} \int_0^t s_u^n du \right)^{\frac{1}{n}},$$

则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \max_{0 \leq u \leq t} S_u = y$, 并且当 $n \rightarrow \infty$ 时

$$dy = \frac{S_t \left(\frac{S_t}{y_n} \right)^{n-1} - y_n}{nt} dt.$$

易知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_t \left(\frac{S_t}{y_n} \right)^{n-1} - y_n}{nt} = 0,$$

所以 $dy = 0$ 。

又因为永久美式回望期权的价值与时间无关, 即 $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$, 所以式(3.9)可写为

$$dV = \left((\mu - q)x \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (2 - 2^{2H-1}) Ht^{2H-1} \sigma_2^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) dt \\ + \sigma_1 x \frac{\partial V}{\partial x} dW_t + \sigma_2 x \frac{\partial V}{\partial x} d\xi_t^H. \quad (3.10)$$

将式(3.1)、(3.10)代入式(3.8), 得

$$d\Pi_t = \left(\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \Delta \right) \mu x - qx \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (2 - 2^{2H-1}) Ht^{2H-1} \sigma_2^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) dt \\ + \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \Delta \right) \sigma_1 x dW_t + \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \Delta \right) \sigma_2 x d\xi_t^H.$$

在上式中, 令 $\Delta = \frac{\partial V}{\partial x}$, 可消除随机项对投资组合价值的影响, 从而得到

$$d\Pi_t = \left(-qx \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (2 - 2^{2H-1}) Ht^{2H-1} \sigma_2^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) dt. \quad (3.11)$$

根据无风险资产的假设, 投资组合的价值变化又可表示为

$$d\Pi_t = r\Pi_t dt = r \left(V - x \frac{\partial V}{\partial x} \right) dt. \quad (3.12)$$

联立式(3.11)与(3.12), 则有

$$(r - q)x \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (2 - 2^{2H-1}) Ht^{2H-1} \sigma_2^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = rV. \quad (3.13)$$

整理式(3.13), 就可得式(3.6)。

不难看出, $S_\tau < x \leq y$, 当 $x = S_\tau$ 时, 永久美式回望看跌期权会被立即执行。因此, 边界条件为

$$V(S_\tau, y) = y - S_\tau, \quad \left. \frac{\partial V}{\partial y} \right|_{x=y} = 0, \quad \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=S_\tau} = -1.$$

证毕。

类似地, 可建立永久美式回望看涨期权价格满足的偏微分方程, 下面以推论的形式给出。

推论 3.1 考虑永久美式回望看涨期权, 其标的资产价格 S_t 满足式(3.1), 记该期权的最优实施边界为 S_η 。对于 $\forall t \geq 0$, 设 $x = S_t$, $w = \min_{0 < u < t} S_u$, 则混合次分数

布朗运动下永久美式回望看涨期权的价格 $U = U(x, w)$ 满足的偏微分方程为

$$\left(\frac{1}{2}\sigma_1^2 + (2 - 2^{2H-1})Ht^{2H-1}\sigma_2^2\right)x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + (r - q)x \frac{\partial U}{\partial x} - rU = 0, \quad (3.14)$$

边界条件为

$$U(S_\eta, w) = S_\eta - w, \quad \left. \frac{\partial U}{\partial w} \right|_{x=w} = 0, \quad \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=S_\eta} = 1.$$

3.3 永久美式回望期权的定价公式

根据定理 3.1, 运用变量代换法, 求解所得到的偏微分方程, 获得了永久美式回望看跌期权的定价公式与最优实施边界, 下面以定理的形式给出。

引理 3.2 设 $k_1 > 1$, $k_2 < 0$, 且均为常数, 则关于 z 的方程

$$k_2(1 - k_1)z^{k_1 - k_2 + 1} + k_1 k_2 z^{k_1 - k_2} - k_1(1 - k_2)z - k_1 k_2 = 0. \quad (3.15)$$

在 $(0, 1)$ 与 $(1, +\infty)$ 内分别存在唯一解。

证明: 先证该方程在 $(1, +\infty)$ 内存在唯一解, 设

$$G(z) = k_2(1 - k_1)z^{k_1 - k_2 + 1} + k_1 k_2 z^{k_1 - k_2} - k_1(1 - k_2)z - k_1 k_2,$$

其中, $z \geq 0$, 通过计算可知,

$$G(1) = k_2 - k_1 < 0, \quad G(+\infty) = \lim_{z \rightarrow +\infty} G(z) > 0.$$

$$G'(1) = (1 - k_2)(k_2 - k_1) < 0, \quad G'(+\infty) = \lim_{z \rightarrow +\infty} G'(z) > 0.$$

$$G''(z) = k_2(1 - k_1)(k_1 - k_2 + 1)(k_1 - k_2)z^{k_1 - k_2 - 1} + k_1 k_2(k_1 - k_2)(k_1 - k_2 - 1)z^{k_1 - k_2 - 2}.$$

令 $G''(a) = 0$, 得

$$a = \frac{k_1(k_1 - k_2 - 1)}{(k_1 - 1)(k_1 - k_2 + 1)} > 0.$$

容易看出, $G''(z) < 0, z \in (0, a); G''(z) > 0, z \in (a, +\infty)$.

如果 $a < 1$, 则 $\forall z \in (1, +\infty)$, 有

$$G''(z) > 0.$$

从而 $G'(z)$ 在 $(1, +\infty)$ 内存在唯一零点, 记该点为 b , 即 $G'(b) = 0$.

于是, $G'(z) < 0, z \in (1, b)$, 即 $G(z)$ 在 $(1, b)$ 内严格单调递减; $G'(z) > 0, z \in (b, +\infty)$, 即 $G(z)$ 在 $(b, +\infty)$ 内严格单调递增。因为 $G(b) < G(1) < 0$, 且 $G(+\infty) > 0$, 所以 $G(z)$ 在 $(b, +\infty)$ 内存在唯一零点。因此, 由式(3.15)确定的方程在 $(1, +\infty)$ 内存在唯一解。

如果 $a \geq 1$, 可类似证明。根据文献[9]中的引理 1, 可知该方程在 $(0, 1)$ 内存在唯一解。证毕。

定理 3.2 在混合次分数布朗运动环境下, 永久美式回望看跌期权的价格 $V(x, y)$ 与最优实施边界 S_τ 分别为

$$V(x, y) = p_1 x^{1-\lambda_1} y^{\lambda_1} + p_2 x^{1-\lambda_2} y^{\lambda_2}, \quad S_\tau = \frac{y}{z_\tau},$$

其中,

$$\lambda_{1,2} = \frac{r - q + M}{2M} \pm \theta, \quad M = \frac{1}{2}\sigma_1^2 + (2 - 2^{2H-1})Ht^{2H-1}\sigma_2^2, \quad \theta = \sqrt{\left(\frac{r-q+M}{2M}\right)^2 + \frac{q}{M}},$$

$$p_1 = \frac{(1 - \lambda_2)z_\tau + \lambda_2}{2\theta z_\tau^{\lambda_1}}, \quad p_2 = \frac{(1 - \lambda_1)z_\tau + \lambda_1}{-2\theta z_\tau^{\lambda_2}},$$

z_τ 是方程 $\lambda_2(1 - \lambda_1)z^{2\theta+1} + \lambda_1\lambda_2z^{2\theta} - \lambda_1(1 - \lambda_2)z - \lambda_1\lambda_2 = 0$ 在 $(1, +\infty)$ 内的唯一解。

证明: 作变量代换, 令

$$z = \frac{y}{x}, \quad F(z) = \frac{V(x, y)}{x},$$

则式(3.6)可写为

$$\left(\frac{1}{2}\sigma_1^2 + (2 - 2^{2H-1})Ht^{2H-1}\sigma_2^2\right)z^2 \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - (r - q)z \frac{\partial F}{\partial z} - qF = 0, \quad (3.16)$$

其中, $1 \leq z < z_\tau, z_\tau = \frac{y}{S_\tau}$. 相应地, 边界条件变为

$$F(z_\tau) = z_\tau - 1, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{z=1} = 0, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{z=z_\tau} = 1.$$

易知式(3.16)的特征方程为

$$\left(\frac{1}{2}\sigma_1^2 + (2 - 2^{2H-1})Ht^{2H-1}\sigma_2^2\right)(\lambda^2 - \lambda) - (r - q)\lambda - q = 0. \quad (3.17)$$

为方便起见,不妨记

$$M = \frac{1}{2}\sigma_1^2 + (2 - 2^{2H-1})Ht^{2H-1}\sigma_2^2,$$

则式(3.17)可写为

$$M\lambda^2 - (r - q + M)\lambda - q = 0. \quad (3.18)$$

求解该特征方程,得

$$\lambda_1 = \frac{r - q + M}{2M} + \sqrt{\left(\frac{r - q + M}{2M}\right)^2 + \frac{q}{M}}, \quad \lambda_2 = \frac{r - q + M}{2M} - \sqrt{\left(\frac{r - q + M}{2M}\right)^2 + \frac{q}{M}}.$$

因此,式(3.16)的通解为

$$F(z) = p_1 z^{\lambda_1} + p_2 z^{\lambda_2}, \quad (3.19)$$

其中, p_1, p_2 为任意常数。

根据边界条件,得方程组

$$\begin{cases} p_1 z_\tau^{\lambda_1} + p_2 z_\tau^{\lambda_2} = z_\tau - 1, \\ p_1 \lambda_1 + p_2 \lambda_2 = 0, \\ p_1 \lambda_1 z_\tau^{\lambda_1 - 1} + p_2 \lambda_2 z_\tau^{\lambda_2 - 1} = 1. \end{cases}$$

记 $\theta = \sqrt{\left(\frac{r - q + M}{2M}\right)^2 + \frac{q}{M}}$, 解得

$$p_1 = \frac{(1 - \lambda_2)z_\tau + \lambda_2}{2\theta z_\tau^{\lambda_1}}, \quad p_2 = \frac{(1 - \lambda_1)z_\tau + \lambda_1}{-2\theta z_\tau^{\lambda_2}}. \quad (3.20)$$

$$z_\tau^{2\theta} = \frac{\lambda_1(1 - \lambda_2)z_\tau + \lambda_2}{\lambda_2(1 - \lambda_1)z_\tau + \lambda_1}.$$

因为求解式(3.20)等价于解方程

$$\lambda_2(1 - \lambda_1)z^{2\theta+1} + \lambda_1\lambda_2z^{2\theta} - \lambda_1(1 - \lambda_2)z - \lambda_1\lambda_2 = 0. \quad (3.21)$$

容易验证 $\lambda_1 > 1, \lambda_2 < 0, 2\theta = \lambda_1 - \lambda_2$, 并且 $z_\tau > 1$. 根据引理 3.2, 可知 z_τ 是方程(3.21)在 $(1, +\infty)$ 内的唯一解。证毕。

类似地,可得到永久美式回望看涨期权的价格和最优实施边界,下面以定理的形式给出。

定理 3.3 在混合次分数布朗运动环境下,永久美式回望看涨期权的价格 $U(x, w)$ 与最优实施边界 S_η 分别为

$$U(x, w) = c_1 x^{1-\lambda_1} w^{\lambda_1} + c_2 x^{1-\lambda_2} w^{\lambda_2}, \quad S_\eta = \frac{w}{z_\eta},$$

其中,

$$\lambda_{1,2} = \frac{r - q + M}{2M} \pm \theta, \quad M = \frac{1}{2}\sigma_1^2 + (2 - 2^{2H-1})Ht^{2H-1}\sigma_2^2, \quad \theta = \sqrt{\left(\frac{r-q+M}{2M}\right)^2 + \frac{q}{M}},$$

$$c_1 = \frac{(1 - \lambda_2)z_\eta + \lambda_2}{-2\theta z_\eta^{\lambda_1}}, \quad c_2 = \frac{(1 - \lambda_1)z_\eta + \lambda_1}{2\theta z_\eta^{\lambda_2}},$$

z_η 是方程 $\lambda_2(1 - \lambda_1)z^{2\theta+1} + \lambda_1\lambda_2z^{2\theta} - \lambda_1(1 - \lambda_2)z - \lambda_1\lambda_2 = 0$ 在 $(0, 1)$ 内的唯一解。

证明过程与定理 3.2 类似。

3.4 永久美式回望期权的数值模拟

以永久美式回望看跌期权为例, 根据定理 3.2, 运用 R 与 MATLAB 软件, 进行数值模拟。首先, 考察 x 与 y 等比例变化时, 对定价结果的影响。为此, 将部分参数设为

$$r = 0.5, \quad q = 0.05, \quad H = 0.75, \quad \sigma_1 = 0.2, \quad \sigma_2 = 0.3, \quad t = 1.5.$$

取标的资产价格 $x = 5$, 标的资产价格的最大值 $y = 6$, 将 x 与 y 等比例放大, 运用 R 作出 $V(x, y)$ 的散点图, 如图 3.1 所示。

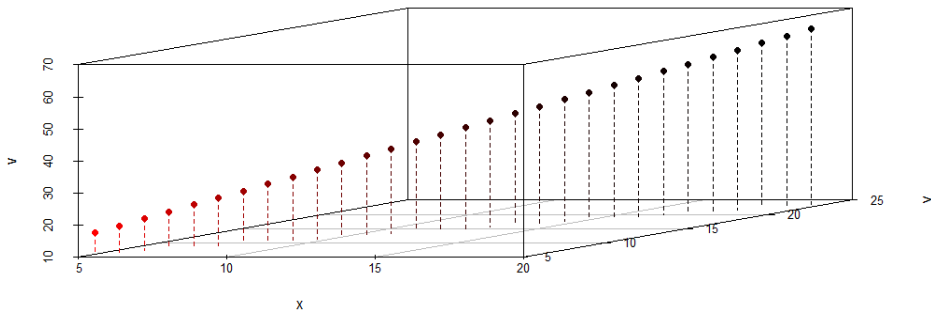


图 3.1 永久美式回望看跌期权价格的线性等比例放缩性质

由图 3.1 可以看出当 x 与 y 等比例变大时, 永久美式回望看跌期权价格 V 以相同的比例变大。这表明在混合次分数布朗运动环境下, 永久美式回望看跌期权的价格 V 具有线性等比例放缩性质^[26], 即对于任意的非负常数 a , 有

$$V(ax, ay) = aV(x, y),$$

这种变化趋势符合实际情况, 从而验证了该定价公式的正确性。

然后, 考察 Hurst 指数对永久美式回望看跌期权价格的影响。为此, 固定 $y = 6$,

取标的资产价格 $x \in [5.75, 6)$, Hurst 指数 $H \in [0.75, 1)$, 其余参数保持不变。运用 MATLAB 作图, 如图 3.2 所示。

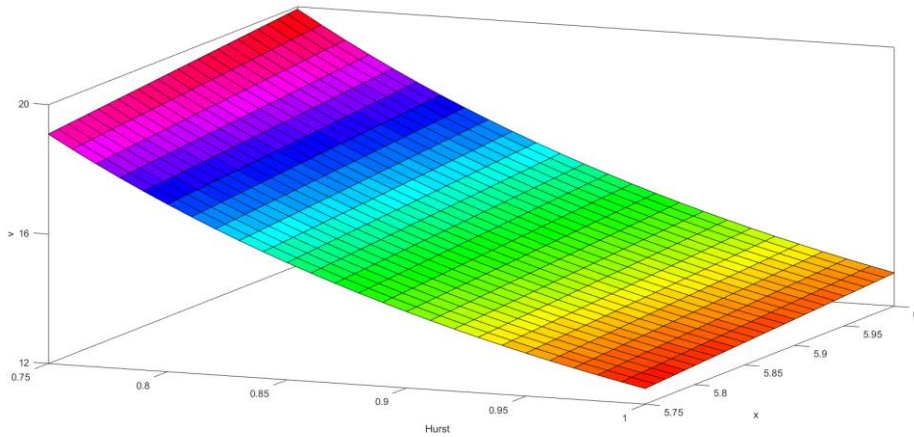


图 3.2 永久美式回望看跌期权价格随 Hurst 指数变化图

图 3.2 描述了当 Hurst 指数 $H \in [0.75, 1)$ 时, 永久美式回望看跌期权的价格 V 随着 Hurst 指数的变化情况。该图表明, 在混合次分数布朗运动环境下, 随着 Hurst 指数的增大, 永久美式回望看跌期权的价格 V 不断减小。这种变化趋势符合实际情况, 因为当 Hurst 指数增加时, 标的资产价格的路径会更光滑, 即价格波动变小, 此时, 期权带来的回报就会降低, 从而导致期权价格下降。

最后, 在波动率 σ_1 与 σ_2 取不同值的情况下, 考察标的资产价格增加时, 永久美式回望看跌期权的价格变化情况。为此, 固定 $y = 6$, 令 $x \in [5, 6)$, 分别取不同的波动率, 其余参数不变, 运用 MATLAB 作图, 如图 3.3 所示。另外, 表 3.1 给出了当 $x = 5$ 时, 不同波动率下期权价格的具体值。

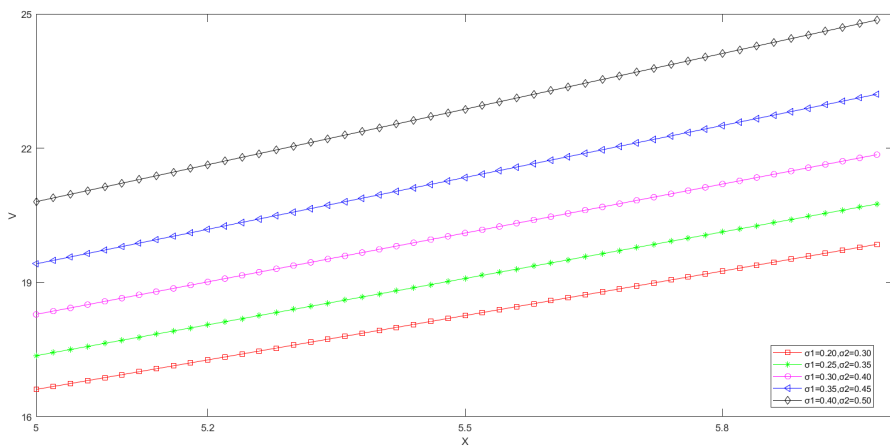


图 3.3 永久美式回望看跌期权价格随波动率的变化曲线

表 3.1 不同波动率下永久美式回望看跌期权的价格

波动率 σ	$\sigma_1 = 0.20$	$\sigma_1 = 0.25$	$\sigma_1 = 0.30$	$\sigma_1 = 0.35$	$\sigma_1 = 0.40$
	$\sigma_2 = 0.30$	$\sigma_2 = 0.35$	$\sigma_2 = 0.40$	$\sigma_2 = 0.45$	$\sigma_2 = 0.50$
期权价格 V	16.6103	17.3645	18.2875	19.4170	20.8054

由表 3.1 与图 3.3 可以看出，当标的资产价格增加时，永久美式回望看跌期权的价格 V 越来越大；同时，随着波动率的增大，该期权的价格 V 不断增大，与实际情况相同。

4 混合次分数跳扩散模型下欧式回望期权的定价

本节主要研究欧式回望期权的定价。采用混合次分数布朗运动和 Poisson 过程共同驱动标的资产的价格变化，同时考虑具有交易费用的情形，建立了欧式回望期权的定价模型。通过构造 Crank-Nicolson 格式给出了该模型的数值解，运用 MATLAB 软件进行数值模拟，结果表明：该数值方法具有一定的有效性，并且交易费用、波动率与无风险利率等对期权价格有显著影响。

4.1 带交易费的基本假设条件

假设金融市场中存在两种可自由连续交易的资产，无风险资产 B_t （如债券）和风险资产 S_t （如股票），并满足以下条件：

- (1) 标的资产可自由、连续交易，无卖空限制；
- (2) 买卖标的资产时，支付的交易费用为 $c|v_t| S_t$ ，其中 c 为每单位交易额应支付的交易费， v_t 表示 t 时刻标的资产的交易份额， $v_t > 0$ 表示买进， $v_t < 0$ 表示卖出；
- (3) 投资组合每隔 δt 时间调整一次，其中 δt 是固定并且足够小的时间间隔；
- (4) 标的资产连续支付红利，红利率为常数，记为 q ；
- (5) 无风险资产 B_t 的价格满足下面的微分方程

$$dB_t = rB_t dt, \quad (4.1)$$

其中， r 表示无风险利率并且为常数；

- (6) 风险资产 S_t 的价格满足如下的微分方程

$$dS_t = (\mu - q - \lambda\mu_J) S_t dt + \sigma_1 S_t dW_t + \sigma_2 S_t d\xi_t^H + J_t S_t dQ_t, \quad (4.2)$$

其中， μ 表示风险资产的期望回报率， σ_1 与 σ_2 为扩散系数，Hurst 指数 $H \in [0.75, 1)$ ；

Q_t 是参数为 λ 的泊松过程， $J_t = (e^{j_t} - 1)$ 表示资产价格的跳跃幅度， j_t 是一列独立同分布的随机变量，且 $(e^{j_t} - 1) \sim N(\mu_J, \sigma_J^2)$ ； M_t^H ， Q_t 和 J_t 相互独立。

4.2 带交易费的欧式回望期权定价模型

根据假设条件，利用 Δ -对冲原理，可以得到混合次分数跳扩散模型下，带交

易费的欧式回望期权定价模型，接下来以定理的形式给出。

引理 4.1 设 $V = V(t, S_t)$ 是二元可微函数，如果随机过程 S_t 满足式(4.2)，则有

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + (\mu - q - \lambda \mu_J) S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{1}{2} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 (2 - 2^{2H-1}) 2Ht^{2H-1}) S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \right) dt + \frac{1}{2} \lambda J_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} dt + \sigma_1 S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} dW_t + \sigma_2 S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} d\xi_t^H + J_t S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} dQ_t. \quad (4.3)$$

证明：由 Taylor 展开，得

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S_t} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} (dS_t)^2 + o(dt). \quad (4.4)$$

根据混合次分数布朗运动的性质(3)知

$$\begin{aligned} & \text{Cov}(M_u^H(\sigma_1, \sigma_2), M_v^H(\sigma_1, \sigma_2)) \\ &= \sigma_1^2 (u \wedge v) + \sigma_2^2 (u^{2H} + v^{2H} - \frac{1}{2} ((u+v)^{2H} + |u-v|^{2H})), \end{aligned}$$

则有

$$E(M_t^H(\sigma_1, \sigma_2))^2 = \sigma_1^2 t + \sigma_2^2 (2 - 2^{2H-1}) t^{2H}.$$

因此，可近似地认为

$$\begin{aligned} (dM_t^H(\sigma_1, \sigma_2))^2 &= \text{Var}(dM_t^H(\sigma_1, \sigma_2)) = E(dM_t^H(\sigma_1, \sigma_2))^2 \\ &= (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 (2 - 2^{2H-1}) 2Ht^{2H-1}) dt. \end{aligned}$$

类似地，根据泊松过程的性质，可知 $(dQ_t)^2 = \lambda dt$ ，从而

$$(dS_t)^2 = \sigma_1^2 S_t^2 dt + \sigma_2^2 (2 - 2^{2H-1}) 2Ht^{2H-1} S_t^2 dt + \lambda J_t^2 S_t^2 dt + o(dt). \quad (4.5)$$

将式(4.2)、(4.5)代入式(4.4)，并忽略高阶无穷小，就可以得到式(4.3)。证毕。

定理 4.1 考虑具有浮动行权价格的欧式回望看跌期权，其标的资产价格 S_t 满足式(4.2)。对于 $\forall 0 \leq t \leq T$ ，设 $M_t = \max_{0 < u < t} S_u$ ，则混合次分数跳扩散模型下，欧

式回望看跌期权的价格 $V = V(t, S_t, M_t)$ 满足的偏微分方程为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 (2 - 2^{2H-1}) 2Ht^{2H-1} + \lambda k_2) S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \\ & - c (\sigma_1 \sqrt{\frac{2}{\pi \delta t}} + \sigma_2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\delta t)^{H-1} + \lambda k_1) S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} + (r - q - \lambda k_1) S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} \\ & + \lambda E[V(t, S_t(1 + J_t), M_t) - V(t, S_t, M_t)] - rV = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

边界条件为

$$V(T, S_T, M_T) = M_T - S_T, \quad \left. \frac{\partial V}{\partial M_t} \right|_{S_t=M_t} = 0.$$

证明：构造投资组合 Π ，一份欧式回望看跌期权多头和 Δ 份标的资产空头，那么在 t 时刻该投资组合的价值为

$$\Pi_t = V - \Delta S_t, \quad (4.7)$$

根据引理 4.1, 有

$$\begin{aligned} dV = & \left[\frac{\partial V}{\partial t} + (\mu - q - \lambda\mu_J)S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2(2 - 2^{2H-1})2Ht^{2H-1})S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \right] dt \\ & + \frac{1}{2}\lambda J_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} dt + \sigma_1 S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} dW_t + \sigma_2 S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} d\xi_t^H + J_t S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} dQ_t + \frac{\partial V}{\partial M_t} dM_t. \end{aligned} \quad (4.8)$$

由于 $M_t = \max_{0 \leq u \leq t} S_u$ 是路径依赖变量, 故 M_t 关于 t 不可微。因此, 构造关于 t 可微的序列 $\{M_n(t)\}$ 对 M_t 进行逼近, 与定理 3.1 证明中的做法类似, 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_t \left(\frac{S_t}{M_n(t)} \right)^{n-1} - M_n(t)}{nt} = 0,$$

从而式(4.8)可改写为

$$\begin{aligned} dV = & \left[\frac{\partial V}{\partial t} + (\mu - q - \lambda\mu_J)S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2(2 - 2^{2H-1})2Ht^{2H-1})S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \right] dt \\ & + \frac{1}{2}\lambda J_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} dt + \sigma_1 S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} dW_t + \sigma_2 S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} d\xi_t^H + J_t S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} dQ_t. \end{aligned} \quad (4.9)$$

根据假设(2)、(3)、(4)可知, 该投资组合在时间段 $[t, t + \delta t]$ 内的价值变化为

$$\delta \Pi_t = \delta V - \Delta \delta S_t - c|v_t|S_t - q\Delta S_t \delta t. \quad (4.10)$$

为了对冲风险, 令 $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S_t}$, 并且需要不断地调整投资组合中标的资产的份额, 该份额的变化可表示为

$$\begin{aligned} v_t &= \frac{\partial V}{\partial S_{t+\delta t}} - \frac{\partial V}{\partial S_t} = \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \delta S_t + \frac{\partial^2 V}{\partial S_t \partial t} \delta t + o(\delta t) \\ &\approx (\sigma_1 S_t \delta W_t + \sigma_2 S_t \delta \xi_t^H + J_t S_t \delta Q_t) \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}, \end{aligned}$$

$$\text{又 } E(|\delta W_t|) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\delta t}, \quad E(|\delta \xi_t^H|) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\delta t)^H, \quad E(|\delta Q_t|) = \lambda \delta t.$$

因此, 在 $[t, t + \delta t]$ 时间段内, 交易费的期望为

$$\begin{aligned} E(c|v_t|S_t) &= E\left(c \left| \sigma_1 S_t \delta W_t + \sigma_2 S_t \delta \xi_t^H + J_t S_t \delta Q_t \right| \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \middle| S_t\right) \\ &= c S_t^2 \left| \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \right| \left(\sigma_1 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\delta t} + \sigma_2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\delta t)^H + \lambda k_1 \delta t \right) + o(\delta t), \end{aligned}$$

其中, $k_1 = E(J_t) = \mu_J$, $\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}$ 称为保值因子, 对于看跌期权的多头而言, 有 $\Gamma > 0$, 从而上式可写为

$$E(c|v_t|S_t) = c S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \left(\sigma_1 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\delta t} + \sigma_2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\delta t)^H + \lambda k_1 \delta t \right) + o(\delta t). \quad (4.11)$$

由于标的资产价格发生跳跃是随机事件, 因此投资组合的价值变化需要分以

下两种情况讨论：

i) 记事件 ω_1 表示“标的资产价格在 $[t, t + \delta t]$ 内发生跳跃”，当 ω_1 发生时，有

$$(\delta V - \Delta \delta S_t)|_{\omega_1} = V(t, S_t(1 + J_t), M_t) - V(t, S_t, M_t) - J_t S_t \frac{\partial V}{\partial S_t}. \quad (4.12)$$

ii) 记事件 ω_2 表示“标的资产的价格在 $[t, t + \delta t]$ 内未发生跳跃”，当 ω_2 发生时，根据(4.9)式有

$$(\delta V - \Delta \delta S_t)|_{\omega_2} = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2(2 - 2^{2H-1})2Ht^{2H-1} + \lambda J_t^2)S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \right) \delta t. \quad (4.13)$$

由泊松过程的性质可知， $P(\omega_1) = \lambda \delta t$ ， $P(\omega_2) = 1 - \lambda \delta t$ ，根据式(4.10)有

$$E(\delta \Pi_t) = \lambda \delta t [(\delta V - \Delta \delta S_t)|_{\omega_1}] + (1 - \lambda \delta t) [(\delta V - \Delta \delta S_t)|_{\omega_2}] - E(c|v_t|S_t) - q \frac{\partial V}{\partial S_t} S_t \delta t.$$

结合式(4.11)、(4.12)和式(4.13)，并在上式两端对 J_t 求期望，可得

$$\begin{aligned} E(\delta \Pi_t) &= \lambda E[V(t, S_t(1 + J_t), M_t) - V(t, S_t, M_t)] \delta t - \lambda k_1 S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} \delta t \\ &+ \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2(2 - 2^{2H-1})2Ht^{2H-1} + \lambda k_2)S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \right) \delta t \quad (4.14) \\ &- c S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} (\sigma_1 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\delta t} + \sigma_2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\delta t)^H + \lambda k_1 \delta t) - q S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} \delta t, \end{aligned}$$

其中， $k_2 = E(J_t^2) = \mu_J^2 + \sigma_J^2$.

另一方面，根据式(4.1)可得，

$$E(\delta \Pi_t) = r \Pi_t \delta t = r \left(V - S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} \right) \delta t. \quad (4.15)$$

联立式(4.14)与(4.15)，可得式(4.6)。

此外，根据欧式回望看跌期权在到期日的收益，可知该方程的一个边界条件为

$$V(T, S_T, M_T) = M_T - S_T,$$

又因为当标的资产价格达到最大值时，欧式回望看跌期权的价格对最大值的变化不再敏感，可得该方程的另一个边界条件

$$\left. \frac{\partial V}{\partial M_t} \right|_{S_t=M_t} = 0.$$

证毕。

类似地，可建立欧式回望看涨期权价格满足的偏微分方程，下面以推论的形式给出。

推论 4.1 考虑具有浮动行权价格的欧式回望看涨期权，其标的资产价格 S_t 满足式(4.2)。对于 $\forall 0 \leq t \leq T$ ，设 $m_t = \min_{0 < u < t} S_u$ ，则混合次分数跳扩散模型下，欧式回望看涨期权的价格 $U = U(t, S_t, m_t)$ 满足的偏微分方程为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2(2 - 2^{2H-1})2Ht^{2H-1} + \lambda k_2)S_t^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S_t^2} \\ & - c(\sigma_1 \sqrt{\frac{2}{\pi \delta t}} + \sigma_2 \sqrt{\frac{2}{\pi}}(\delta t)^{H-1} + \lambda k_1)S_t^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S_t^2} + (r - q - \lambda k_1)S_t \frac{\partial U}{\partial S_t} \\ & + \lambda E[U(t, S_t(1 + J_t), m_t) - U(t, S_t, m_t)] - rU = 0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

边界条件为

$$U(T, S_T, m_T) = S_T - m_T, \quad \left. \frac{\partial U}{\partial m_t} \right|_{S_t=m_t} = 0.$$

注 4.1 在定理 4.1 和推论 4.1 中，如果令 $H = 1/2$ ， $\lambda = c = q = 0$ ，则式(4.6)变为

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} + rS_t \frac{\partial V}{\partial S_t} - rV = 0. \quad (4.17)$$

即为经典的 B-S 模型下欧式回望看跌期权价格所满足的偏微分方程。类似地，式(4.16)变为

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_t^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S_t^2} + rS_t \frac{\partial U}{\partial S_t} - rU = 0. \quad (4.18)$$

即为经典的 B-S 模型下欧式回望看涨期权所满足的偏微分方程^[42]。

4.3 定价模型的数值解

由上节的内容可知，欧式回望期权价格所满足的偏微分方程中，系数是非线性的并且包含积分项，因此不易直接求出其闭式解。接下来，以欧式回望看跌期权为例，通过构造 Crank-Nicolson 格式，给出其数值解法。

首先，利用 Taylor 展开对式(4.6)中的积分项进行近似处理，由于

$$\begin{aligned} & \lambda E[V(t, S_t(1 + J_t), M_t) - V(t, S_t, M_t)] \\ & \approx \lambda E[V(t, S_t, M_t) + S_t J_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{1}{2}(S_t J_t)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} - V(t, S_t, M_t)] \\ & = \lambda k_1 S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \lambda k_2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}. \end{aligned}$$

故可将式(4.6)近似处理为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2(2 - 2^{2H-1})2Ht^{2H-1} + 2\lambda k_2)S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \\ & - c(\sigma_1 \sqrt{\frac{2}{\pi \delta t}} + \sigma_2 \sqrt{\frac{2}{\pi}}(\delta t)^{H-1} + \lambda k_1)S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} + (r - q)S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} - rV = 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

其次, 运用变量代换法, 对式(4.19)进行降维, 设

$$x = \ln \frac{M_t}{S_t}, \quad u(x, \tau) = \frac{V(t, S_t, M_t)}{S_t}, \quad \tau = T - t.$$

则式(4.19)可写为

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - (\tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2 + \lambda k) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2 + \lambda k + r - q) \frac{\partial u}{\partial x} + qu = 0. \quad (4.20)$$

其中,

$$\begin{aligned} k &= k_2 - ck_1, \quad \tilde{\sigma}_1 = \frac{1}{2}\sigma_1^2 - c\sigma_1 \sqrt{\frac{2}{\pi \delta t}}, \\ \tilde{\sigma}_2 &= \sigma_2^2(2 - 2^{2H-1})H(T - \tau)^{2H-1} - c\sigma_2 \sqrt{\frac{2}{\pi}}(\delta t)^{H-1}. \end{aligned}$$

相应地, 边界条件变为

$$u(x, 0) = e^x - 1. \quad (4.21)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0. \quad (4.22)$$

然后, 对式(4.20)构造 Crank-Nicolson 格式, 先用平行直线族 $x = im, \tau = jn$ 对区域 $\Omega = [0, x_{\max}] \times [0, T]$ 进行矩形网格分割, 所得到的网格点记为 (x_i, τ_j) , 其中,

$$x_i = im, \quad i = 0, 1, 2, \dots, M.$$

$$\tau_j = jn, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N.$$

$m = \frac{x_{\max}}{M}$ 称为空间步长, $n = \frac{T}{N}$ 称为时间步长。

接下来, 对空间偏导数和时间偏导数分别作如下的差分近似, 为方便起见, 记网格点处的函数值为 $u_i^j = u(x_i, \tau_j)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau}(x_i, \tau_j) &\approx \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{n}, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, \tau_j) &\approx \frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2m} + \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}}{2m} \right), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, \tau_j) &\approx \frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{m^2} + \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{m^2} \right). \end{aligned}$$

用以上差分近似代替式(4.20)中的偏导数, 可得到其标准的 Crank-Nicolson 格式

$$a_i^j u_{i+1}^{j+1} + b_i^j u_i^{j+1} + c_i^j u_{i-1}^{j+1} = \alpha_i^j u_{i+1}^j + \beta_i^j u_i^j + \gamma_i^j u_{i-1}^j, \quad (4.23)$$

其中,

$$\begin{aligned} a_i^j &= \frac{h}{m^2} + \frac{b}{2m}, \quad b_i^j = \frac{1}{n} - \frac{2h}{m^2}, \quad c_i^j = \frac{h}{m^2} - \frac{b}{2m}, \quad 1 \leq i \leq M-1, \\ \alpha_i^j &= \frac{h}{m^2} + \frac{b}{2m}, \quad \beta_i^j = q - \frac{1}{n} - \frac{2h}{m^2}, \quad \gamma_i^j = \frac{h}{m^2} - \frac{b}{2m}, \quad 0 \leq j \leq N-1, \\ h &= -\frac{1}{2}(\tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2 + \lambda k), \quad b = \frac{1}{2}(\tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2 + \lambda k + r - q). \end{aligned}$$

最后, 将式(4.23)表示为矩阵形式方便数值计算

$$\mathbf{A}^j \mathbf{u}^{j+1} = \mathbf{B}^j \mathbf{u}^j + \boldsymbol{\rho}^j, \quad (4.24)$$

其中,

$$\mathbf{u}^j = (u_1^j, u_2^j, \dots, u_{M-1}^j)^T, \quad \boldsymbol{\rho}^j = (\gamma_1^j u_0^j - c_1^j u_0^{j+1}, 0, \dots, 0, \alpha_{M-1}^j u_M^j - a_{M-1}^j u_M^{j+1})^T,$$

$$\mathbf{A}^j = \begin{bmatrix} b_1^j & a_1^j & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2^j & b_2^j & a_2^j & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_3^j & b_3^j & a_3^j & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & c_{M-2}^j & b_{M-2}^j & a_{M-2}^j \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{M-1}^j & b_{M-1}^j \end{bmatrix}_{(M-1) \times (M-1)},$$

$$\mathbf{B}^j = \begin{bmatrix} \beta_1^j & \alpha_1^j & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma_2^j & \beta_2^j & \alpha_2^j & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_3^j & \beta_3^j & \alpha_3^j & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma_{M-2}^j & \beta_{M-2}^j & \alpha_{M-2}^j \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \gamma_{M-1}^j & \beta_{M-1}^j \end{bmatrix}_{(M-1) \times (M-1)}.$$

求解式(4.24)还需要知道边界点 u_i^0 , u_0^j 和 u_M^j 的值, 其中, u_i^0 可根据边界条件(4.21)获得, 即

$$u_i^0 = e^{xi} - 1.$$

另外两个边界点由文献[27]可知,

$$u_0^j = \frac{4u_1^j - u_2^j}{3}, \quad u_M^j = e^{-r\tau_j}.$$

将这些边界点代入式(4.24), 运用追赶法就可对其进行求解。

4.4 欧式回望期权的数值模拟

以欧式回望看跌期权为例, 运用 MATLAB 软件, 进行数值模拟。首先, 考察该数值方法的有效性。在不同的步长划分下, 将该数值方法获得的期权价格与经典的 B-S 模型下的定价结果进行对比。为此, 根据注 4.1, 将部分参数设为

$$H = 1/2, T = 0.25, r = 0.1, \sigma_1 = 0.4, S_t = 50, \lambda = c = q = 0.$$

根据文献[42]中的定价公式, 容易算出经典的 B-S 模型下欧式回望看跌期权的价格为

$$V_{BS} = 7.7902.$$

运用数值方法求出的期权价格见表 4.1

表 4.1 不同步长划分下回望看跌期权的价格

步长	期权价格	相对误差
$M = N = 500$	6.6000	15.28%
$M = N = 800$	7.3050	6.23%
$M = N = 1000$	7.5450	3.15%
$M = N = 1200$	7.7050	1.09%
$M = N = 1500$	7.8650	0.09%

由表 4.1 可知, 随着步长的增大, 通过该数值方法获得的期权价格逐渐收敛到 B-S 模型下的价格, 二者之间的误差逐渐减小。当 $M = N \geq 1200$ 时, 二者的相对误差在 1.1% 以内, 这说明该数值方法具有一定的有效性。

然后, 考察交易费比例 c 对欧式回望看跌期权价格 V 的影响。为此, 将部分参数设为

$$H = 0.75, T = 0.5, r = 0.1, q = 0.05, \sigma_1 = 0.4, \sigma_2 = 0.5, S_t = 30,$$

$$\lambda = 2.3, \mu_J = 0.00065, \sigma_J = 0.001, M = N = 1000.$$

运用数值方法求出不同交易费比例下的期权价格, 并作出期权价格随交易费比例的变化图, 如图 4.1 所示。

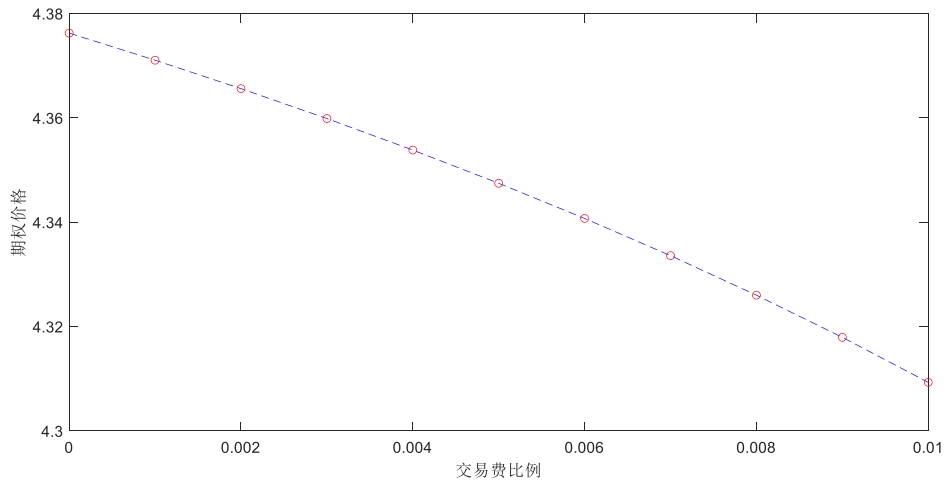


图 4.1 欧式回望看跌期权价格随交易费比例的变化图

由图 4.1 可以看出，随着交易费比例 c 的增大，欧式回望看跌期权价格 V 不断减小，这符合实际情况。因为当交易费比例 c 增加时，会导致每单位标的资产的交易成本变大，这对于期权的多头而言，将会直接导致对冲风险所需的费用增加，所以期权的价格会随之减小。

最后，考察无风险利率 r 和波动率 σ_1 对欧式回望看跌期权价格的影响。为此，取交易费比例 $c = 0.003$ ，其余参数保持不变，作出 r ， σ_1 与 V 的三维曲面图，如图 4.2 所示。

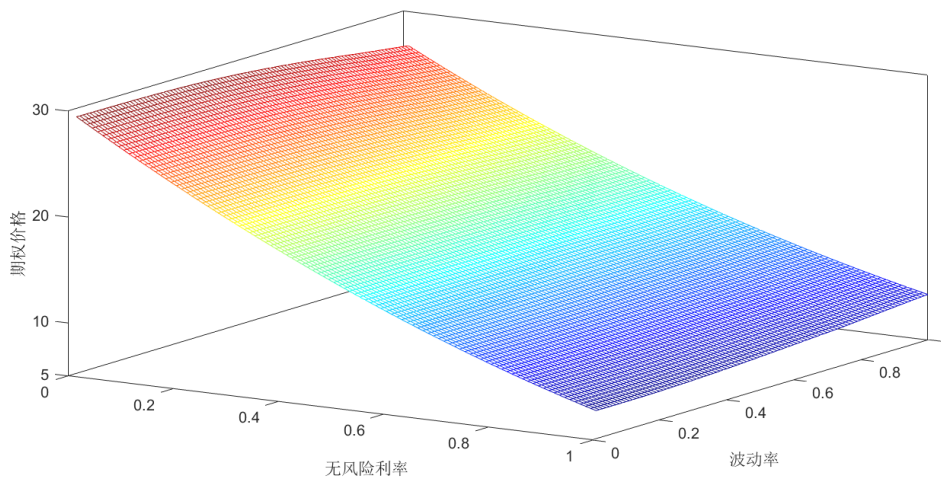


图 4.2 欧式回望看跌期权价格随波动率与无风险利率的变化图

由图 4.2 可以看出，随着无风险利率的增大，欧式回望看跌期权的价格 V 不断减小，这符合实际情况。因为随着无风险利率的增加，标的资产的预期收益率

会随之增加，并且折现因子会变小，从而未来同样预期盈利的现值就越低，这两种效应都会降低回望看跌期权的价格。另一方面，当波动率增加时，欧式回望看跌期权的价格 V 随之变大，这也符合实际情况。主要是因为波动率的增加就意味着投资者获得更高收益的可能性会变大，从而导致回望看跌期权价格的增加。

5 统计模拟分析

本节选取真实的股票数据进行统计模拟分析。首先，对股票价格的历史数据进行简单的描述性统计分析。然后，对模型中的未知参数进行估计。其次，利用 Monte Carlo 模拟法，分别基于几何布朗运动、分数布朗运动、混合分数布朗运动以及混合次分数跳扩散模型获得股票价格的模拟值。最后，对各模型的拟合效果进行对比分析，从而验证混合次分数跳扩散模型的有效性。

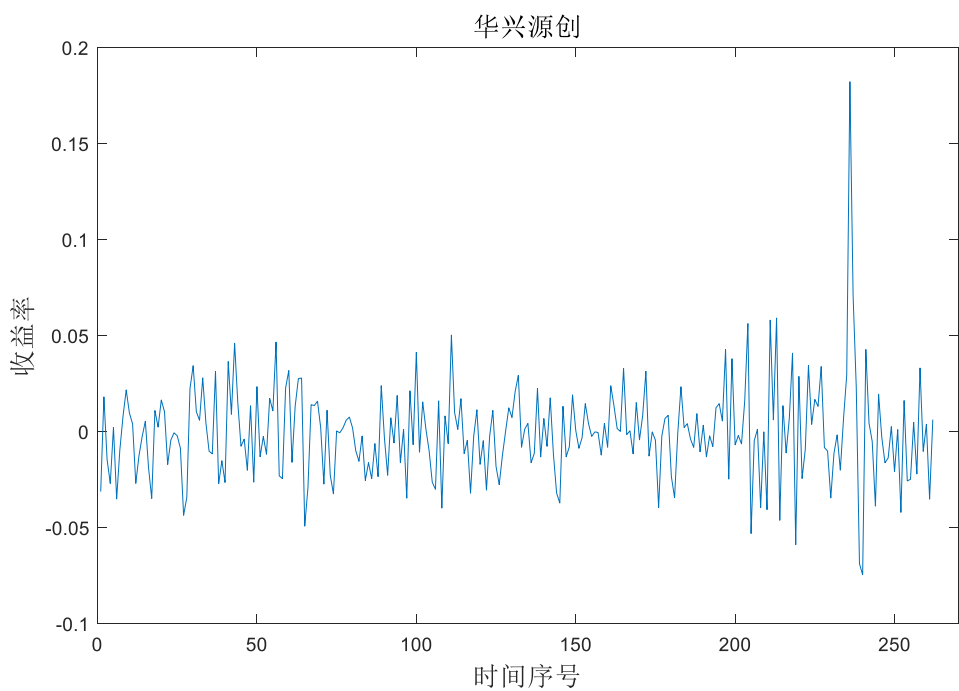
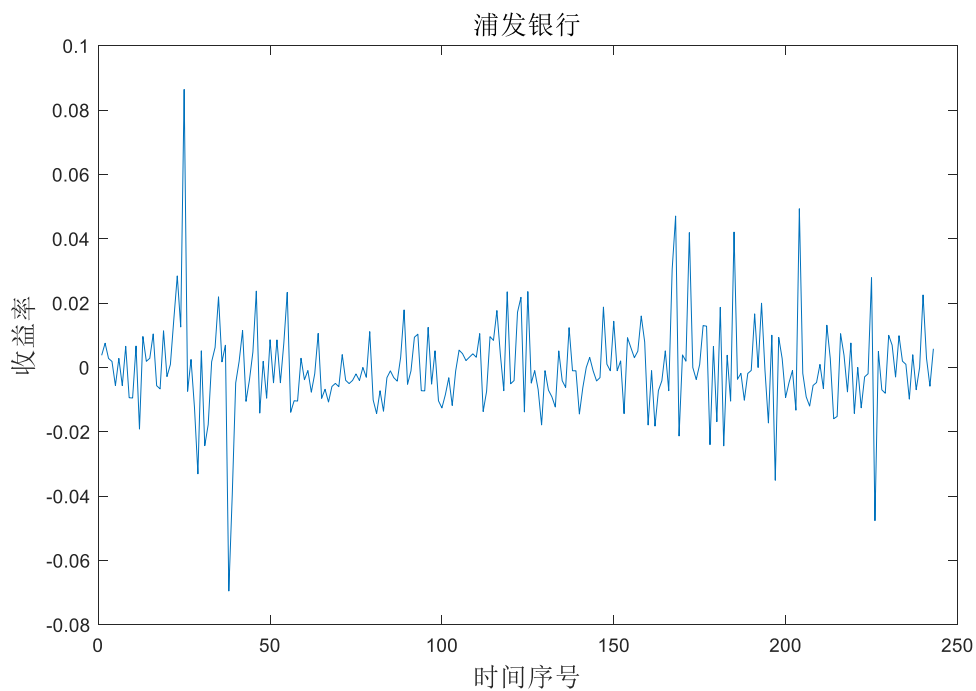
5.1 数据选取

本文分别选取浦发银行（股票代码：600000）2020年5月28日至2021年5月28日期间日收盘价、华兴源创（股票代码：688001）2020年8月3日至2021年8月27日期间日收盘价、中科电气（股票代码：300035）2020年8月31日至2021年8月27日期间日收盘价数据进行统计模拟分析，数据来源于“大智慧365”平台。

以上这三支股票在选取的时间区间内，价格都出现了较大幅度的波动，即发生了“跳跃”现象，并且通过下文的参数估计可知，这三支股价序列数据的 Hurst 指数都大于 0.75，说明在这一时间段内，价格的变化存在长相依性。因此，可以考虑用混合次分数跳扩散模型刻画其价格的变动。

5.2 数据的统计特征以及正态性检验

首先，计算出所选取股票的对数收益率，并作出 QQ 图，判断其分布是否服从正态分布，具体结果见图 5.1 与图 5.2。



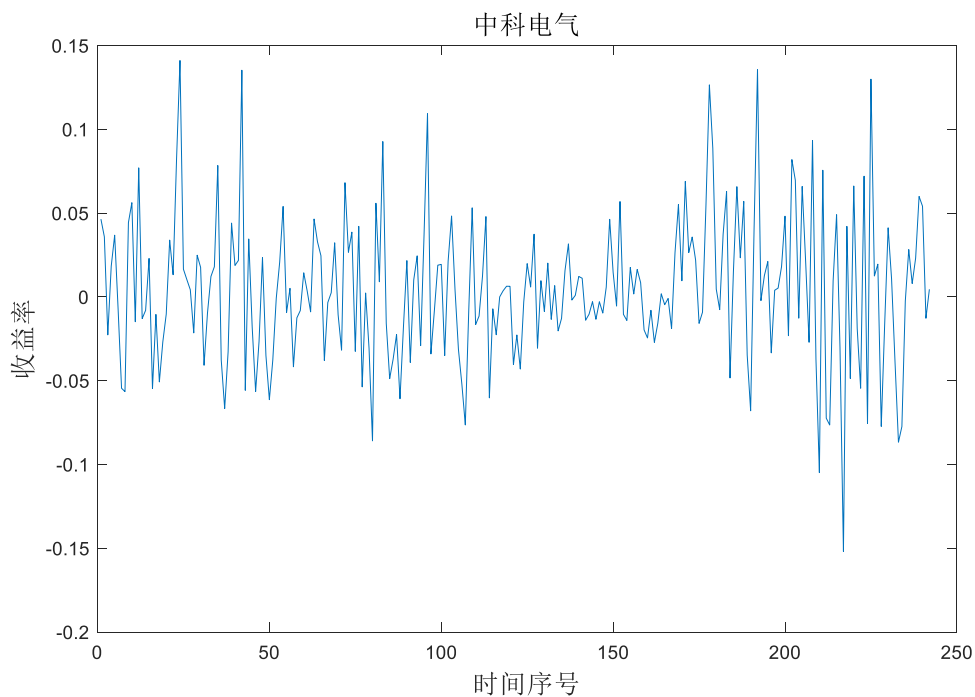
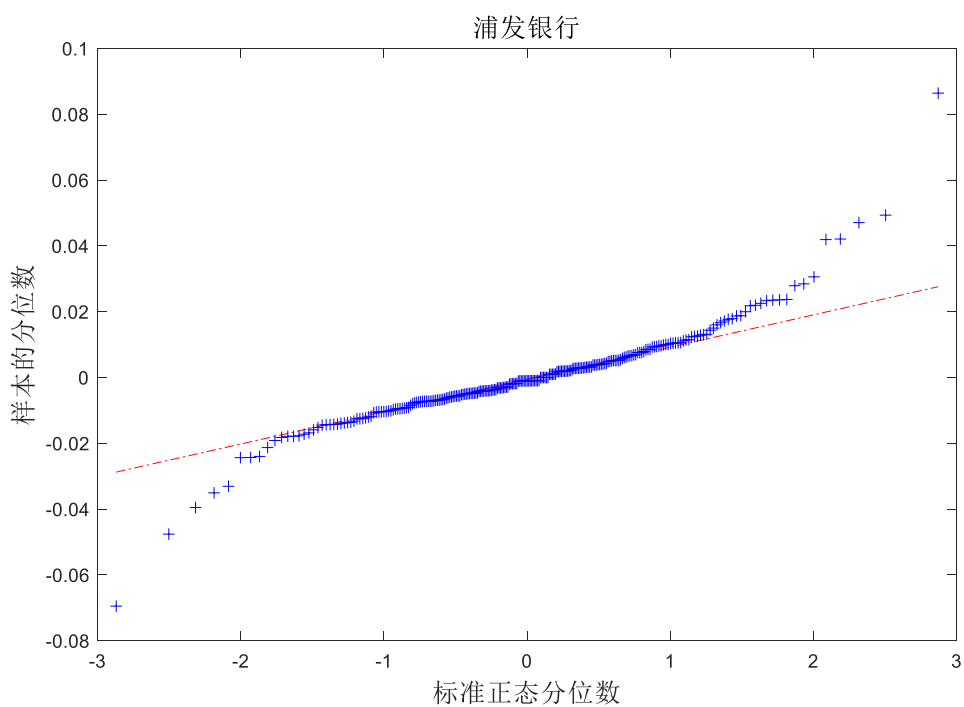


图 5.1 所选股票的对数收益率图



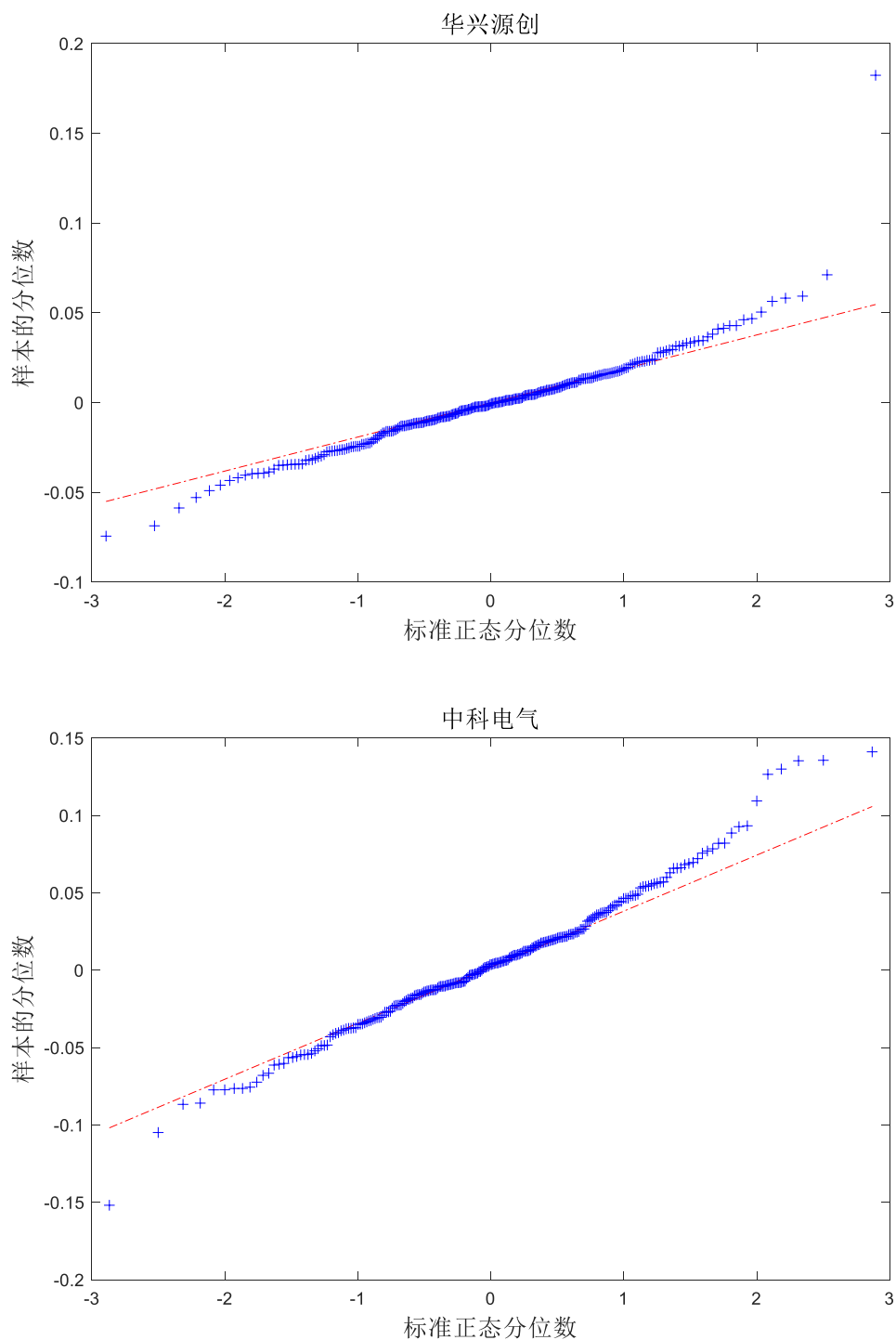


图 5.2 所选股票的对数收益率 QQ 图

由图 5.1 可知，本文所选取的这三支股票，其对数收益率大多都在 0 附近波动，只有个别时间点处的收益率取值较大，这就意味着此时股价发生了较大的波动，即跳跃。另外，这三支股票的对数收益率也具有一定的波动聚集性，即大的

波动后往往也跟随着大的波动，这符合金融资产价格的变化特征。从图 5.2 可以看出，这三支股票的对数收益率分位数的散点偏离了 45 度参考线，其中两端的点偏离程度最大，这说明其不服从标准正态分布。下面，对所选股票的对数收益率进行描述性统计分析，见表 5.1。

表 5.1 所选股票对数收益率的描述性统计

股票名称	均值	标准差	偏度	峰度	K-S 正态性检验
浦发银行	-0.00007	0.01452	0.71703	10.9037	1
华兴源创	-0.00056	0.02510	1.49910	13.3742	1
中科电气	0.00428	0.04378	0.27007	4.0775	1

由表 5.1 可知，一方面，偏度均大于 0，这说明其分布具有正偏离，即存在部分取值较大的数据，使右边的尾部较长。另一方面，峰度均大于 3，这说明其分布的形状比较尖，比正态分布更陡峭。同时，Kolmogorov-Smirnow 检验的结果均为 1，这验证了所选股票的对数收益率均不服从正态分布。

综上所述，文中所选取的这三支股票的对数收益率均不服从正态分布，其分布呈现“尖峰厚尾”状，这与 B-S 模型的假设不符。因此，引入具有分形特征的随机过程刻画标的资产的价格变化，对其现有的模型进行改进。

5.3 参数估计

本节对定价模型中的未知参数进行估计。首先，对标的资产的期望回报率 μ 与波动率 σ 进行估计：

将股票价格序列记为

$$\{S_0, S_1, \dots, S_n\}.$$

则股票的对数收益率序列可表示为

$$R_i = \ln \left(\frac{S_i}{S_{i-1}} \right), i = 1, 2, \dots, n.$$

采用矩估计对未知参数 μ 和 σ 进行估计，得到其估计量分别为

$$\hat{\mu} = \frac{\bar{R}}{\Delta t}, \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{(n-1)\Delta t} \sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})^2}.$$

其中, $\bar{R} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i$ 是收益率序列的样本均值。

对于 Hurst 指数 H , 采用移动窗口法对其进行估计。该方法是指取固定长度的时间窗口数据, 对时间窗口起点进行平移, 利用 R/S 方法计算出每个时间窗口数据的 Hurst 指数, 从而估计出整个时间段内价格序列的 Hurst 指数。对于本文所选取的股票数据, 其 Hurst 指数的最终计算结果如图 5.3 所示。

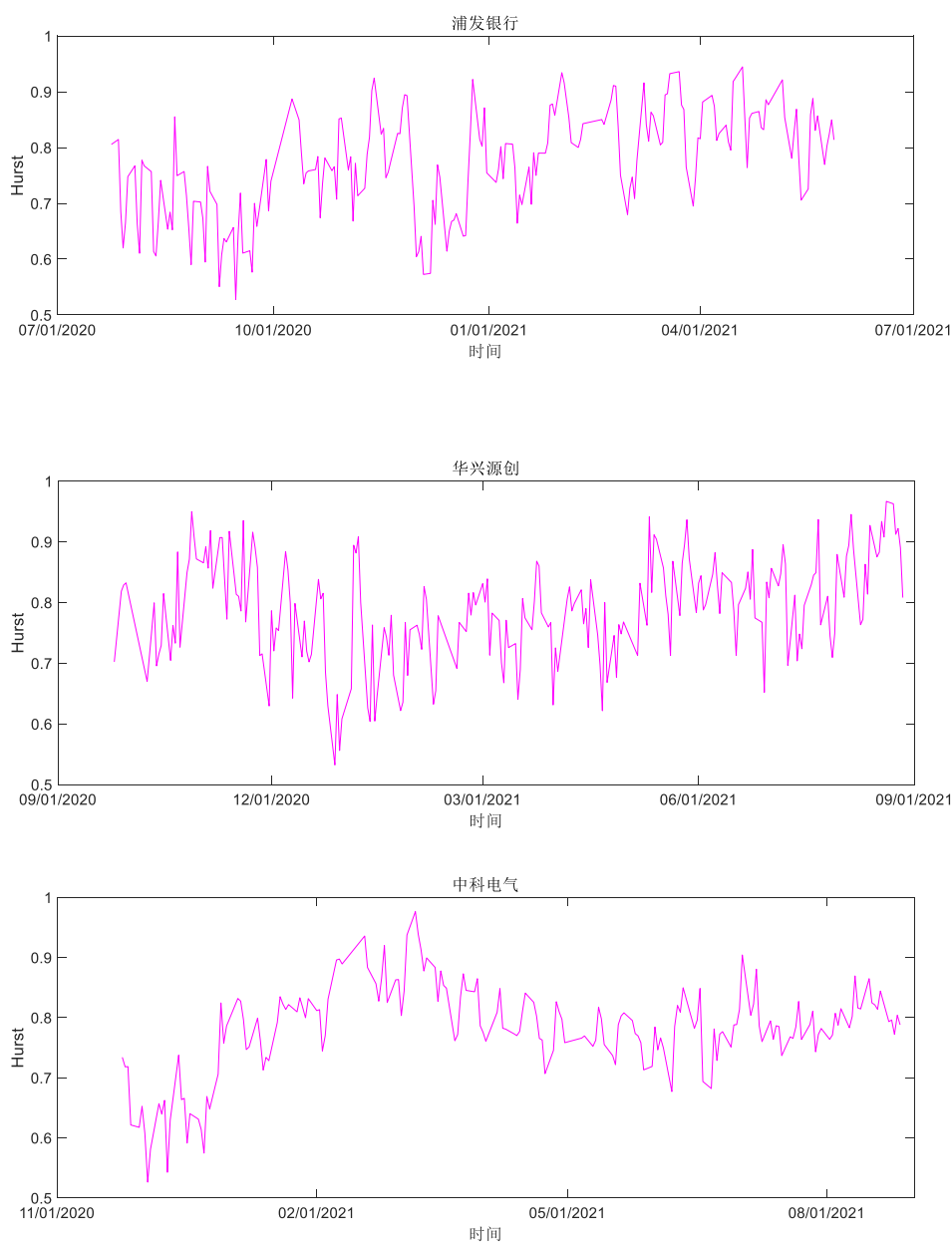


图 5.3 Hurst 指数的计算结果

从图 5.3 可以看出,不同时间窗口下 Hurst 指数均大于 0.5,这说明本文所选取的浦发银行、华兴源创、中科电气的股价序列均具有长相依性。将不同时间窗口下 Hurst 指数的算数平均值作为 H 的估计值,具体的估计结果见表 5.2,这三组股票数据的 Hurst 指数估计值均满足 $H \in [0.75, 1)$ 。因此,采用混合次分数跳扩散模型描述这三支股价序列数据具备合理性。

表 5.2 参数估计结果

股票名称	矩估计法		移动窗口法
	期望回报率 μ	波动率 σ	Hurst 指数 H
浦发银行	-0.0173	0.2268	0.7712
华兴源创	-0.1465	0.4071	0.7883
恒瑞医药	1.0391	0.6824	0.7816

5.4 模拟结果

经典的 B-S 模型中假设标的资产的价格变化服从几何布朗运动,但这并不能刻画出价格变化的分形特征以及跳跃现象。因此,本文采用混合次分数跳扩散模型,驱动标的资产的价格变化,得到该模型下股价的模拟值,并与几何布朗运动、分数布朗运动、混合分数布朗运动下的模拟值以及股票价格的真实值进行对比,具体结果见图 5.4-5.6。

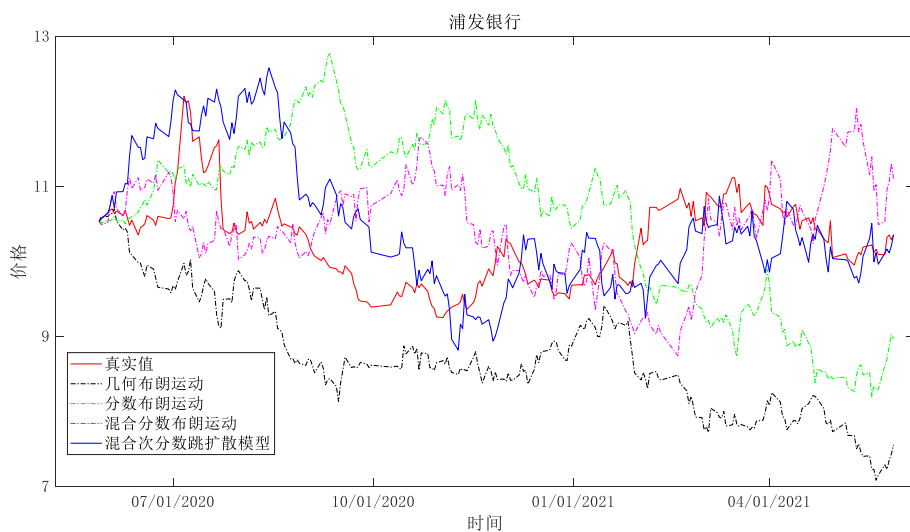


图 5.4 浦发银行的股价模拟路径

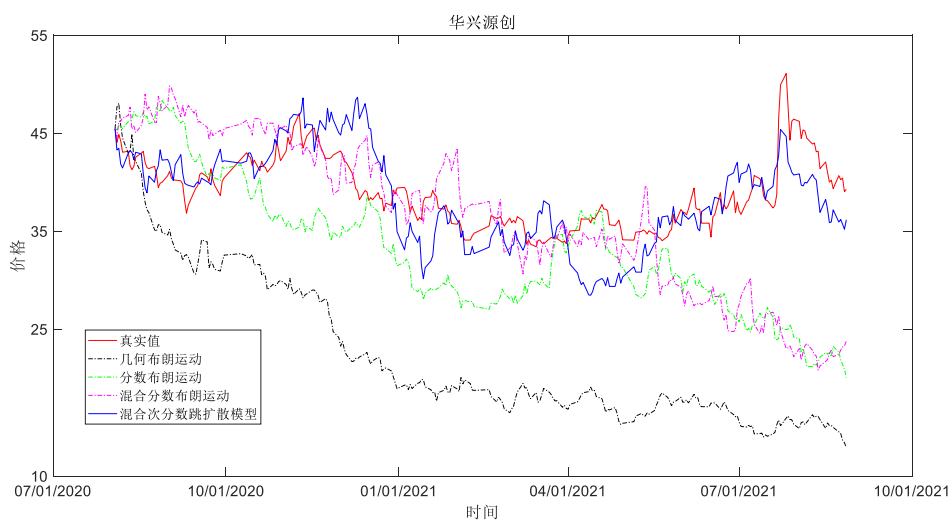


图 5.5 华兴源创的股价模拟路径

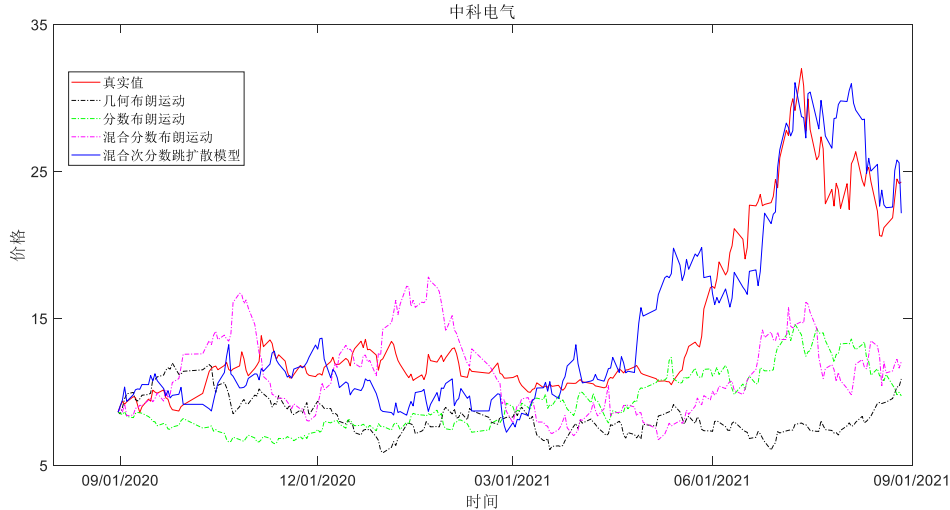


图 5.6 中科电气的股价模拟路径

图 5.4-5.6 分别给出了本文所选取的三支股票日收盘价的走势，以及几何布朗运动、分数布朗运动、混合分数布朗运动和混合次分数跳扩散模型下股票价格的模拟路径。由模拟路径可知，具有分数特征的布朗运动的模拟效果均好于几何布朗运动，并且基于混合次分数跳扩散模型得到的模拟价格最接近股票的真实值，整体上更符合股票价格的真实走势。特别地，当股价发生较大波动时（譬如浦发银行 2020 年 7 月 1 日附近、华兴源创 2021 年 8 月 1 日附近、中科电气 2021 年 7 月 1 日附近）混合次分数跳扩散模型能够更好地刻画出股价的跳跃现象，可以修正其他几种模型在这方面的不足。

5.5 拟合效果分析

本节分别对不同模型的拟合效果进行误差分析。图 5.4-5.6 用图形的方式给出了不同模型下股价的模拟值与真实值之间的拟合情况，从图中可以直观地看出混合次分数跳扩散模型比几何布朗运动、分数布朗运动、混合分数布朗运动的模拟效果更优。下面，采用平均绝对误差(MAE)，平均绝对百分比误差(MAPE)，以及均方根误差(RMSE)对不同模型的拟合效果进行误差分析。这三个指标的定义如下：

$$\text{MAE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\hat{S}_i - S_i|, \text{MAPE} = \frac{100\%}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\hat{S}_i - S_i}{S_i} \right|,$$

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{S}_i - S_i)^2}.$$

其中, S_i 表示金融资产的真实价格, \hat{S}_i 表示模拟价格, n 表示数据量。模拟价格与真实价格的描述性统计见表 5.3、表 5.5、表 5.7, 误差分析的具体结果见表 5.4、表 5.6、表 5.8。

表 5.3 浦发银行股价模拟值的描述性统计

	真实价格	几何布朗运动	分数布朗运动	混合分数布朗运动	混合次分数跳扩散模型
均值	10.2987	8.7137	10.6291	10.4536	10.5024
中位数	10.3000	8.6008	10.9423	10.4918	10.3091
最大值	12.2000	10.7012	12.7685	12.0363	12.5782
最小值	9.2500	7.0821	8.1941	8.7388	8.8173

表 5.4 浦发银行股价模拟值的误差分析

	MAE	MAPE	RMSE
几何布朗运动	1.557	14.96%	1.7828
分数布朗运动	1.3573	13.44%	1.5137
混合分数布朗运动	0.6722	6.62%	0.8901
混合次分数跳扩散模型	0.5796	5.62%	0.7421

表 5.5 华兴源创股价模拟值的描述性统计

	真实价格	几何布朗运动	分数布朗运动	混合分数布朗运动	混合次分数跳扩散模型
均值	39.0374	22.3620	33.0210	36.4261	38.6042
中位数	38.6000	18.6748	31.8251	36.8984	39.3354
最大值	51.0900	48.0589	48.3148	49.813	48.6658
最小值	33.4100	12.8946	20.0533	20.8066	28.4547

表 5.6 华兴源创股价模拟值的误差分析

	MAE	MAPE	RMSE
几何布朗运动	16.7945	43.41%	18.0740
分数布朗运动	7.3677	18.47%	9.2768
混合分数布朗运动	5.9757	14.89%	8.5304
混合次分数跳扩散模型	2.6957	6.95%	3.4511

表 5.7 中科电气股价模拟值的描述性统计

	真实价格	几何布朗运动	分数布朗运动	混合分数布朗运动	混合次分数跳扩散模型
均值	14.5377	8.2944	9.3345	11.2243	14.6282
中位数	11.8000	8.0336	8.6093	10.7098	11.3011
最大值	32.0000	11.9668	14.6070	17.8270	31.0469
最小值	8.6000	5.8537	6.4796	6.7440	7.2566

表 5.8 中科电气股价模拟值的误差分析

	MAE	MAPE	RMSE
几何布朗运动	6.4628	37.32%	8.8278
分数布朗运动	5.2350	31.47%	6.7699
混合分数布朗运动	4.7108	27.53%	6.4542
混合次分数跳扩散模型	2.1023	15.18%	2.7949

从表 5.3-5.8 可以看出，混合次分数跳扩散模型下股票价格模拟值的均值、中位数等都更加接近真实值，尤其是最大值和最小值的模拟值明显优于其余三种模型。譬如所选取的中科电气数据的最大值为 32，其余三种模型的最大值均未超过 20，而混合次分数跳扩散模型的最大值为 31，非常接近真实值。另外，混合次分数跳扩散模型的三个误差分析指标的值均小于其余三种模型的值，这说明混合次分数跳扩散模型的整体拟合效果是最佳的。因此，混合次分数跳扩散模型能够更好地刻画出金融资产价格的分形特征以及不连续波动，可以修正其余三种模型在这方面的不足，在此基础上，对回望期权定价是合理、有效的。

6 研究总结与展望

6.1 研究总结

经典的 B-S 模型为期权定价理论奠定了坚实的基础，其定价公式被誉为现代金融理论的又一次革命。然而，该模型对金融市场的假设过于严苛，与现实情况存在较大程度的偏差，譬如，B-S 模型没有考虑交易费用，并且假设标的资产价格的变化服从几何布朗运动。因此，本文主要针对以上这两点不足，基于混合次分数布朗运动研究了永久美式回望期权的定价，并引入 Poisson 过程建立混合次分数跳扩散模型，同时考虑交易费用，研究了欧式回望期权的定价。主要结果如下：

(1) 基于混合次分数布朗运动，建立了带红利的永久美式回望期权的定价模型，获得了该期权价格所满足的偏微分方程及其边界条件，并通过求解该偏微分方程，得到了混合次分数布朗运动下，永久美式回望期权价格的闭式解与最优实施边界。通过数值模拟，说明了该定价公式具有回望期权价格的线性等比例放缩性质，并且 Hurst 指数与波动率等对期权价格有显著影响。

(2) 基于混合次分数跳扩散模型，建立了具有交易费用的欧式回望期权的定价模型。通过构造 Crank-Nicolson 格式，得到了该模型的数值解，并通过数值模拟，验证了该数值解的有效性。

(3) 选取真实的股票数据进行统计模拟分析，结果表明：混合次分数跳扩散模型能够更好地刻画出金融资产价格的分形特征以及不连续波动，可以修正几何布朗运动、分数布朗运动、混合分数布朗运动等在这方面的不足。这说明采用混合次分数跳扩散模型来刻画期权标的资产的价格变化，并在此基础上对回望期权进行定价是合理有效的。

6.2 研究展望

首先，本文建立的定价模型都假设无风险利率、波动率为常数，这与金融市场中的实际情况存在一定差异，可以考虑将无风险利率和波动率也用随机过程来描述，在此情况下回望期权的定价研究值得进一步讨论。

其次，本文只探讨了永久美式回望期权和欧式回望期权的定价问题，而奇异期权的种类繁多，在今后的研究中可以将本文提出的模型推广到其他类型的奇异期权的定价研究中，譬如障碍期权、亚式期权等。

最后，在本文研究成果的基础上，可以考虑多种定价方式，进一步考虑离散化的定价模型，譬如二叉树定价模型。并引入多种合理参数，以本文的定价模型为参照，从模型收敛性、收敛速度以及算法速度进行比较，分析不同定价模型的优缺点和创新性。同时，将模型拓展到多叉树，并结合机器学习中的算法，探讨更优的回望期权离散定价方法。

参考文献

- [1] Amster P, Averbuj C, Mariani M, et al. A Black-Scholes option pricing model with transaction costs[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2005, 303(2): 688-695.
- [2] Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities [J]. *Journal of Political Economy*, 1973, 81(3):637-654.
- [3] Bojdecki T, Gorostiza L G, Talarczyk A. Sub-fractional Brownian motion and its relation to occupation times[J]. *Statistics & Probability Letters*, 2004, 69(4):405-419
- [4] Broadie M, Kou S G. Connecting discrete and continuous Path-dependent options[J]. *Finance and Stochastics*, 1999, 3(1): 55-82.
- [5] Buchen P, Konstandatos O. A new method of pricing lookback options[J]. *Mathematical Finance*, 2005, 15(2): 245-259.
- [6] Charles E, Mounir Z. On the sub-mixed fractional Brownian motion[J]. *Applied Mathematics: A Journal of Chinese Universities*, 2015, 30(1): 27-43.
- [7] Chen Q, Zhang Q, Liu C. The pricing and numerical analysis of lookback options for mixed fractional Brownian motion [J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2019, 128: 123-128.
- [8] Clift S S, Forsyth P A. Numerical solution of two asset jump diffusion models for option valuation[J]. *Applied Numerical Mathematics*, 2008, 58(6): 743-782.
- [9] Dai M . A closed form solution to perpetual American floating strike lookback option[J]. *Journal of Computational Finance*, 2000, 4(2):63-68.
- [10] Duffie D, Pan J, Singleton K. Transform analysis and option pricing for affine jump-diffusion[J]. *Econometrica*, 2000, 68(6): 1343-1376.
- [11] Goldman M B , Sosin H B , Gatto M A . Path dependent options: "buy at the low, sell at the high"[J]. *The Journal of Finance*, 1979, 34(5): 1111-1127.
- [12] Grandits P, Schachinger W. Leland's approach to option pricing: The evolution of a discontinuity[J]. *Mathematical Finance*, 2001,11(3): 347-355.
- [13] Gu H, Liang J R, Zhang Y X. Time-changed geometric fractional brownian

- motion and option pricing with transaction costs[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2012,391(15): 3971–3977.
- [14]Gukhal C R. Analytical valuation of American options on jump-diffusion processes[J]. *Mathematical Finance*, 2001, 11(1): 97-115.
- [15]Hu Y, Øksendal B. Fractional white noise calculus and applications to finance [J]. *Infinite dimensional analysis, quantum probability and related topics*, 2003, 6(1): 1-32.
- [16]Kim K I, Qian X S. Convergence of the binomial tree method for Asian options in jump-diffusion models[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2007, 330(1): 10-23.
- [17]Leland H E. Option pricing and replication with transactions costs[J]. *The Journal of Finance*, 1985, 40(5): 1283-1301.
- [18]Mariani M C, Sengupta I, Bezdek P. Numerical solutions for option pricing models including transaction costs and stochastic volatility[J]. *Acta Applicandae Mathematicae*, 2012,118(1): 203-220.
- [19] Mastinsek M. Discrete-time delta hedging and the Black-Scholes model with Transaction costs[J]. *Mathematical Methods of Operations Research*, 2006, 64(2): 227-236.
- [20]Merton R C. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous[J]. *Journal of Financial Economics*, 1976, 3(1): 125-144.
- [21]Necula C. Option pricing in a fractional Brownian motion environment [J]. *Advances in Economic and Financial Research - DOFIN Working Paper Series*, 2008, 2(3): 259-273.
- [22]Peters E E. Fractal structure in the capital markets[J]. *Financial Analysts Journal*, 1989, 45(4): 32-37.
- [23]Roul P, Goura V. A compact finite difference scheme for fractional Black-Scholes option pricing model[J]. *Applied Numerical Mathematics*, 2021, 166: 40-60.
- [24]Scott L O. Pricing stock options in a jump-diffusion model with stochastic volatility and interest rates: application of Fourier inversion methods[J]. *Mathematical Finance*, 1997, 7(4): 413-426.

- [25] Shokrollahi F. Mixed fractional Merton model to evaluate European options with transaction costs [J]. *Journal of Mathematical Finance*, 2018, 8: 623-639.
- [26] Shreve S E. *Stochastic Calculus for Finance II continuous-time*[M]. Berlin: Springer, 2010.
- [27] Sun J J, Zhou S, Zhang Y, et al. Lookback option pricing with fixed proportional transaction costs under fractional Brownian motion[J]. *International Scholarly Research Notices*, 2014, 14: 1-7.
- [28] Terry H F, Ton F. Currency lookback options and observation frequency: A binomial approach [J]. *Journal of International Money and Finance*, 1997, 16(2): 173-187.
- [29] Wang X T. Scaling and long-range dependence in option pricing I: Pricing European option with transaction costs under the fractional Black–Scholes model[J]. *Physica A*, 2010, 389(3): 438-444.
- [30] Wang X T. Scaling and long-range dependence in option pricing V: Multiscaling hedging and implied volatility smiles under the fractional Black–Scholes model with transaction costs[J]. *Physica A Statistical Mechanics & Its Applications*, 2011, 390(9): 1623-1634.
- [31] Xu C L, Qian X S, Jiang L S. Numerical analysis on binomial tree methods for a jump-diffusion model[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2003, 156(1): 23-45.
- [32] Yang Z Q. Default probability of American lookback option in a mixed jump-diffusion model[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2019, 540: 1-12.
- [33] Zhang K, Wang S, Yang X Q, et al. A power penalty approach to numerical solutions of two-asset American options[J]. *Numerical Mathematics Theory Methods and Applications*, 2009, 2(2): 202-223.
- [34] Zhang L, Sun Y, Du Z, et al. Uncertain strike lookback options pricing with floating interest rate[J]. *Review of Derivatives Research*, 2021, 24(1): 79-94.
- [35] Zhang W G, Li Z, Liu Y J, et al. Pricing European option under fuzzy mixed fractional Brownian motion model with jumps[J]. *Computational Economics*,

- 2021, 58: 1-33.
- [36]陈海珍, 周圣武, 孙祥艳. 混合分数布朗运动下的回望期权定价[J]. 华东师范大学学报(自然科学版), 2018, 4: 47-58.
- [37]甘小艇, 徐登国. Merton 跳扩散期权模型的有限体积格式[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2019, 41(11): 47-53.
- [38]郭精军, 程志勇. 混合高斯模型下带红利的永久美式期权定价[J]. 应用数学 2018, 31(2): 250-256.
- [39]郭宇权. 金融衍生产品的数学模型[M]. 北京: 科学出版社, 2012.
- [40]黄东南, 周圣武. 基于跳扩散过程的回望期权定价的数值算法[J]. 大学数学, 2019, 35(1): 14-19.
- [41]黄伟, 刘海龙. 基于回望期权考虑备用保证金的期货定价模型[J]. 上海交通大学学报, 2009, 43(4): 550-554.
- [42]姜礼尚. 期权定价的数学模型和方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.
- [43]刘韶跃, 杨向群. 分数布朗运动环境中欧式未定权益的定价[J]. 应用概率统计, 2004, 20(4): 429-434.
- [44]栾娜娜. 次分数布朗运动局部时的研究[J]. 数学学报, 2020, 63 (1): 89-96.
- [45]彭波, 郭精军. 在跳环境和混合高斯过程下的资产定价及模拟[J]. 山东大学学报(理学版), 2020, 55(5): 105-113.
- [46]桑利恒, 杜雪樵. 分数布朗运动下的回望期权定价[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版), 2010, 33(5): 797-800.
- [47]孙琳. 分数布朗运动下带交易费用的期权定价[J]. 系统工程, 2009, 27(9): 36-40.
- [48]孙祥艳. 随机利率下带交易费的回望期权定价[D]. 徐州: 中国矿业大学, 2018.
- [49]魏正元, 高红霞. 多跳扩散模型与脆弱欧式期权定价[J]. 应用概率统计, 2011, 27(3): 232-240.
- [50]吴桑, 许超, 董迎辉. 具有随机利率的跳扩散模型下的脆弱期权的定价[J]. 应用数学学报, 2019, 42(4): 518-534.
- [51]肖炜麟, 张卫国, 徐维东. 双分式布朗运动下股本权证的定价[J]. 系统工程

- 学报, 2013, 28(3): 348-354.
- [52]肖炜麟, 张卫国, 徐维军. 次分数布朗运动下带交易费用的备兑权证定价[J]. 中国管理科学, 2014,22(5): 1-7.
- [53]杨朝强.混合分数布朗运动下一类欧式回望期权定价[J].山东大学学报(理学版), 2012, 47(9): 105-109.
- [54]姚怡, 李帅芳, 许威. 跳扩散模型下亚式期权定价的柳树法研究[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2018,46(12): 1761-1769.
- [55]袁国军, 杜雪樵. 有交易成本的回望期权定价研究[J]. 运筹与管理,2006, 15(3): 141-143.
- [56]袁国军, 肖庆宪. CEV 过程下有交易费的回望期权定价研究[J]. 系统工程学报, 2011, 26(5): 642-648.
- [57]张利花. 路径依赖型期权定价模型和方法研究[D]. 广州: 华南理工大学, 2013.
- [58]赵旭. 基于分形 B-S 定价模型的认购权证价格行为实证分析[J]. 数理统计与管理, 2008, 27(6): 1039-1046.
- [59]郑志勇, 王洪武. 金融数量分析——基于 MATLAB 编程[M].北京: 北京航空航天大学出版社, 2018.

致谢

研究生三年时光，可谓是白驹过隙，才看过公寓楼前的桃花红了两遍，就已经到了说再见的时候。

这三年时光是我从青涩走向成熟的重要阶段。在这段时间里，我遇到了很多人，得到了他们给予我的许多帮助。首先，我要感谢我的恩师郭精军教授，跟随郭老师以来，他不仅传授我们知识，更注重学习方法的培养，正所谓，授人以鱼不如授人以渔，在此学习过程中我收获颇多。老师三年来风雨无阻地带领我们开展讨论班，他严谨的治学态度，求实的科研精神也影响了我，我将铭记于心。其次，我要感谢同门的师兄师姐师弟师妹们，他们在生活和学习上都给予了我很大的照顾与帮助；还有统计学院的老师们，感谢他们的淳淳教诲和耐心的指导，让我学习了许多专业知识，开拓了眼界，同时思维也受到了启迪。最后，我要特别感谢我的父母，感谢他们一直以来的支持与爱护，是他们给予我力量，让我面对困难时乐观而坚强，激励着我不断前进，完成我的求学之路。

此时此刻，我正坐在兰州财经大学段家滩校区图书馆四楼的窗边，看着挂在天空中的一丝夕阳，过往三年的研究生时光如潮水般涌上了我的心头：想起了第一次在讨论班讲文献时的忐忑不安，还有论文推导过程被卡住时的心烦意乱，也回想起了小论文被接收时的欣喜若狂。正所谓，沉思往事立残阳，当时只道是寻常。过往不经意间的小事，在此刻即将分离之际，愈显得难忘和珍贵。但是天下没有不散的宴席，终究是要离开母校，于是我只能将这三年数不清的回忆，藏在段家滩 496 号的每一个角落。

安翔

2022 年 3 月 9 日

硕士期间的学术成果

- [1] 安翔, 郭精军. 混合次分数布朗运动下永久美式回望期权的定价[J]. 应用数学, 2021, 34(4): 820-828.
- [2] 安翔, 郭精军. 混合次分数跳扩散模型下回望期权的定价及模拟[J]. 山东大学学报(理学版), 2022, 57(4): 100-110.
- [3] 郑乐乐, 马小雯, 安翔, 等. 基于 DPSIR-GM(1,1)模型的甘肃省流域生态安全评价与预测[J]. 生态科学, 2022, 41(4): 60-69.
- [4] 参加国家自然科学基金地区科学基金项目《混合高斯 Heston 资产价格模型构建及其在投资组合中的应用》,建立了基于混合次分数布朗运动的期权定价模型,解决了原有模型不能刻画金融资产分形特征的问题.
- [5] 参加甘肃省哲学社会科学项目《基于隐马尔科夫模型的生态文明程度指数测评指标体系设计与测度》,构建了适合甘肃省省情的生态文明程度的指数指标体系,并利用优化的指标体系和隐马尔科夫模型对甘肃省生态文明程度进行测度,丰富了统计学指标体系内容.

附录

附录一：验证线性等比例放缩性质

```
r=0.5
q=0.05
sigma1=0.2
sigma2=0.3
h=0.75
t=1.5

M<-function(h,t,sigma1,sigma2){
  (0.5*sigma1^2)+h*(2-2^(2*h-1)*sigma2^2*(t^(2*h-1)))
}
M1<-M(0.75,1.5,0.2,0.3)
lamda=(r-q+M1)/2*M1
theta=(lamda^2+q/M1)^0.5
lamda1=lamda+theta
lamda2=lamda-theta

f<-function(x,a,b,c,d){
  return(a*x^(b+1)+c*x^b-d*x-c)
}

root<-uniroot(f,c(1,200),
              a=lamda2*(1-lamda1),
              b=lamda1-lamda2,
              c=lamda1*lamda2,
              d=lamda1*(1-lamda2),
              tol = 0.0001)
```

```
z_tao<-root$root

v<-function(x,y){
  (p1*(x^(1-lamda1))*y^lamda1)+(p2*(x^(1-lamda2))*y^lamda2)
}

a<-c(5)
i<-2
while (i<=30) {
  a[i]=a[i-1]+0.5
  i=i+1
}

b<-6
i<-2

while (i<=30) {
  b[i]=b[i-1]+0.6
  i=i+1
}

v<-v(a,b)

#install.packages("scatterplot3d")

library(scatterplot3d)

scatterplot3d(a,b,v,
              xlab = 'x',
              ylab = 'y',
```

```
zlab = 'v',  
pch=16,  
#点的颜色将随着 y 坐标的不同而不同  
highlight.3d = T,  
#添加连接点与水平面的垂直线  
lty.hplot = 2,  
#垂直线设为虚线  
type="h",  
lwd=2)  
scatterplot3d(a,b,v);
```

附录二：误差分析函数

```
%平均绝对误差 (MAE)  
n=length(Prices);  
mae1 = sum( abs(Prices - PRICE) ) ./ n ;  
mae2 = sum( abs(Prices - JUMP) ) ./ n ;  
  
mae3 = sum( abs(Prices - Fbm) ) ./ n ;  
mae4 = sum( abs(Prices - Mfbm) ) ./ n ;  
  
%平均绝对百分比误差 MAPE  
  
mape1 = sum( abs( (Prices - PRICE)./Prices) ) ./ n ;  
mape2 = sum( abs( (Prices - JUMP)./Prices) ) ./ n ;  
  
mape3 = sum( abs( (Prices - Fbm)./Prices) ) ./ n ;  
mape4 = sum( abs( (Prices - Mfbm)./Prices) ) ./ n ;  
  
%均方根误差 (RMSE)
```

$$\text{rmse1} = \sqrt{\text{sum}(\text{Prices} - \text{PRICE})^2 / n};$$

$$\text{rmse2} = \sqrt{\text{sum}(\text{Prices} - \text{JUMP})^2 / n};$$

$$\text{rmse3} = \sqrt{\text{sum}(\text{Prices} - \text{Fbm})^2 / n};$$

$$\text{rmse4} = \sqrt{\text{sum}(\text{Prices} - \text{Mfbm})^2 / n};$$

附录三：所选取的股票数据

浦发银行(2020/5/28-2021/5/28)

日期	收盘价	日期	收盘价	日期	收盘价	日期	收盘价	日期	收盘价
2020/5/28	10.53	2020/8/13	10.51	2020/11/4	9.34	2021/1/19	10.16	2021/4/12	10.73
2020/5/29	10.57	2020/8/14	10.59	2020/11/5	9.36	2021/1/20	9.98	2021/4/13	10.76
2020/6/1	10.65	2020/8/17	10.84	2020/11/6	9.39	2021/1/21	9.97	2021/4/14	10.59
2020/6/2	10.68	2020/8/18	10.69	2020/11/9	9.43	2021/1/22	9.79	2021/4/15	10.43
2020/6/3	10.7	2020/8/19	10.58	2020/11/10	9.46	2021/1/25	9.72	2021/4/16	10.54
2020/6/4	10.64	2020/8/20	10.47	2020/11/11	9.56	2021/1/26	9.68	2021/4/19	10.58
2020/6/5	10.67	2020/8/21	10.5	2020/11/12	9.43	2021/1/27	9.73	2021/4/20	10.5
2020/6/8	10.61	2020/8/24	10.46	2020/11/13	9.36	2021/1/28	9.66	2021/4/21	10.58
2020/6/9	10.68	2020/8/25	10.45	2020/11/16	9.45	2021/1/29	9.96	2021/4/22	10.43
2020/6/10	10.58	2020/8/26	10.37	2020/11/17	9.53	2021/2/1	10.44	2021/4/23	10.43
2020/6/11	10.48	2020/8/27	10.35	2020/11/18	9.7	2021/2/2	10.22	2021/4/26	10.3
2020/6/12	10.55	2020/8/28	10.46	2020/11/19	9.74	2021/2/3	10.26	2021/4/27	10.27
2020/6/15	10.35	2020/8/31	10.36	2020/11/20	9.67	2021/2/4	10.28	2021/4/28	10.25
2020/6/16	10.45	2020/9/1	10.29	2020/11/23	9.9	2021/2/5	10.72	2021/4/29	10.54
2020/6/17	10.47	2020/9/2	10.18	2020/11/24	9.85	2021/2/8	10.72	2021/4/30	10.05
2020/6/18	10.5	2020/9/3	10.12	2020/11/25	9.81	2021/2/9	10.68	2021/5/6	10.1
2020/6/19	10.61	2020/9/4	10.07	2020/11/26	9.98	2021/2/10	10.69	2021/5/7	10.03
2020/6/22	10.55	2020/9/7	10.01	2020/11/27	10.2	2021/2/18	10.83	2021/5/10	9.95
2020/6/23	10.48	2020/9/8	10.05	2020/11/30	10.06	2021/2/19	10.97	2021/5/11	10.05
2020/6/24	10.6	2020/9/9	10.01	2020/12/1	10.3	2021/2/22	10.71	2021/5/12	10.12
2020/6/29	10.57	2020/9/10	9.96	2020/12/2	10.25	2021/2/23	10.78	2021/5/13	10.09
2020/6/30	10.58	2020/9/11	9.92	2020/12/3	10.24	2021/2/24	10.6	2021/5/14	10.19
2020/7/1	10.74	2020/9/14	9.9	2020/12/4	10.17	2021/2/25	10.8	2021/5/17	10.21
2020/7/2	11.05	2020/9/15	9.86	2020/12/7	9.99	2021/2/26	10.54	2021/5/18	10.22
2020/7/3	11.19	2020/9/16	9.86	2020/12/8	9.98	2021/3/1	10.58	2021/5/19	10.12
2020/7/6	12.2	2020/9/17	9.83	2020/12/9	9.91	2021/3/2	10.47	2021/5/20	10.16
2020/7/7	12.11	2020/9/18	9.94	2020/12/10	9.82	2021/3/3	10.92	2021/5/21	10.09
2020/7/8	12.14	2020/9/21	9.84	2020/12/11	9.7	2021/3/4	10.88	2021/5/24	10.09
2020/7/9	11.99	2020/9/22	9.7	2020/12/14	9.75	2021/3/5	10.86	2021/5/25	10.32
2020/7/10	11.6	2020/9/23	9.63	2020/12/15	9.71	2021/3/8	10.75	2021/5/26	10.35
2020/7/13	11.66	2020/9/24	9.5	2020/12/16	9.65	2021/3/9	10.73	2021/5/27	10.29

(续上表)

日期	收盘价	日期	收盘价	日期	收盘价	日期	收盘价	日期	收盘价
2020/7/14	11.38	2020/9/25	9.47	2020/12/17	9.77	2021/3/10	10.72	2021/5/28	10.35
2020/7/15	11.18	2020/9/28	9.46	2020/12/18	9.76	2021/3/11	10.9		
2020/7/16	11.2	2020/9/29	9.43	2020/12/21	9.75	2021/3/12	10.9		
2020/7/17	11.27	2020/9/30	9.39	2020/12/22	9.61	2021/3/15	11.12		
2020/7/20	11.52	2020/10/9	9.42	2020/12/23	9.55	2021/3/16	11.11		
2020/7/21	11.54	2020/10/12	9.59	2020/12/24	9.55	2021/3/17	10.92		
2020/7/22	11.62	2020/10/13	9.54	2020/12/25	9.58	2021/3/18	11.03		
2020/7/23	10.84	2020/10/14	9.53	2020/12/28	9.57	2021/3/19	10.65		
2020/7/24	10.42	2020/10/15	9.62	2020/12/29	9.53	2021/3/22	10.75		
2020/7/27	10.37	2020/10/16	9.72	2020/12/30	9.5	2021/3/23	10.78		
2020/7/28	10.39	2020/10/19	9.65	2020/12/31	9.68	2021/3/24	10.68		
2020/7/29	10.51	2020/10/20	9.58	2021/1/4	9.69	2021/3/25	10.63		
2020/7/30	10.4	2020/10/21	9.7	2021/1/5	9.68	2021/3/26	10.62		
2020/7/31	10.36	2020/10/22	9.65	2021/1/6	9.82	2021/3/29	10.48		
2020/8/3	10.41	2020/10/23	9.7	2021/1/7	9.81	2021/3/30	11.01		
2020/8/4	10.66	2020/10/26	9.6	2021/1/8	9.83	2021/3/31	10.99		
2020/8/5	10.51	2020/10/27	9.48	2021/1/11	9.69	2021/4/1	10.89		
2020/8/6	10.53	2020/10/28	9.4	2021/1/12	9.78	2021/4/2	10.76		
2020/8/7	10.43	2020/10/29	9.37	2021/1/13	9.84	2021/4/6	10.7		
2020/8/10	10.52	2020/10/30	9.26	2021/1/14	9.87	2021/4/7	10.65		
2020/8/11	10.47	2020/11/2	9.25	2021/1/15	9.92	2021/4/8	10.66		
2020/8/12	10.56	2020/11/3	9.3	2021/1/18	10.08	2021/4/9	10.59		

华兴源创(2020/8/3-2021/8/27)

日期	收盘价	日期	收盘价	日期	收盘价	日期	收盘价	日期	收盘价
2020/8/3	45.44	2020/10/23	41.02	2021/1/7	36.95	2021/3/30	34	2021/6/18	36.68
2020/8/4	44.05	2020/10/26	41.74	2021/1/8	37.55	2021/3/31	33.73	2021/6/21	38.92
2020/8/5	44.86	2020/10/27	42.2	2021/1/11	36.09	2021/4/1	34.55	2021/6/22	37.17
2020/8/6	44.22	2020/10/28	44.22	2021/1/12	36.39	2021/4/2	35.02	2021/6/23	37.68
2020/8/7	43.05	2020/10/29	43.22	2021/1/13	36.17	2021/4/6	35.08	2021/6/24	37.27
2020/8/10	43.15	2020/10/30	42.18	2021/1/14	38.04	2021/4/7	35.09	2021/6/25	37.54
2020/8/11	41.67	2020/11/2	43.16	2021/1/15	38.43	2021/4/8	36.27	2021/6/28	39.11
2020/8/12	41.28	2020/11/3	44.56	2021/1/18	38.48	2021/4/9	36.22	2021/6/29	36.88
2020/8/13	41.62	2020/11/4	43.86	2021/1/19	39.15	2021/4/12	36.24	2021/6/30	37.96
2020/8/14	42.54	2020/11/5	44.45	2021/1/20	38.71	2021/4/13	35.83	2021/7/1	37.05
2020/8/17	42.96	2020/11/6	45.7	2021/1/21	38.54	2021/4/14	36.38	2021/7/2	36.71
2020/8/18	43.14	2020/11/9	47	2021/1/22	37.33	2021/4/15	36.23	2021/7/5	38
2020/8/19	42	2020/11/10	44.75	2021/1/25	37.25	2021/4/16	36.54	2021/7/6	38.15
2020/8/20	41.48	2020/11/11	43.47	2021/1/26	37.68	2021/4/19	37.71	2021/7/7	38.8

(续上表)

日期	收盘价	日期	收盘价	日期	收盘价	日期	收盘价	日期	收盘价
2020/8/21	41.38	2020/11/12	44.09	2021/1/27	37.05	2021/4/20	37.24	2021/7/8	39.32
2020/8/24	41.61	2020/11/13	44.7	2021/1/28	36.88	2021/4/21	37.24	2021/7/9	40.68
2020/8/25	40.84	2020/11/16	45.42	2021/1/29	35.78	2021/4/22	37.08	2021/7/12	40.35
2020/8/26	39.45	2020/11/17	45.52	2021/2/1	35.7	2021/4/23	35.65	2021/7/13	39.95
2020/8/27	39.89	2020/11/18	44.3	2021/2/2	36.1	2021/4/26	35.57	2021/7/14	38.6
2020/8/28	39.99	2020/11/19	44.8	2021/2/3	35.46	2021/4/27	35.82	2021/7/15	38.17
2020/8/31	40.66	2020/11/20	43.8	2021/2/4	34.5	2021/4/28	36.13	2021/7/16	38.11
2020/9/1	41.09	2020/11/23	42.41	2021/2/5	34.08	2021/4/29	35.3	2021/7/19	37.36
2020/9/2	40.4	2020/11/24	42.43	2021/2/8	34.09	2021/4/30	34.11	2021/7/20	37.62
2020/9/3	40.23	2020/11/25	42.41	2021/2/9	34.52	2021/5/6	34.08	2021/7/21	38.75
2020/9/4	40.21	2020/11/26	42.5	2021/2/10	34.78	2021/5/7	34.89	2021/7/22	46.5
2020/9/7	40.13	2020/11/27	42.76	2021/2/18	35.52	2021/5/10	34.97	2021/7/23	49.93
2020/9/8	39.79	2020/11/30	43.09	2021/2/19	36.58	2021/5/11	35.12	2021/7/26	51.09
2020/9/9	38.1	2020/12/1	43.18	2021/2/22	36.29	2021/5/12	34.99	2021/7/27	47.7
2020/9/10	36.82	2020/12/2	42.76	2021/2/23	36.34	2021/5/13	34.71	2021/7/28	44.28
2020/9/11	37.66	2020/12/3	42.11	2021/2/24	36.5	2021/5/14	35.04	2021/7/29	46.22
2020/9/14	38.98	2020/12/4	42.02	2021/2/25	35.92	2021/5/17	34.68	2021/7/30	46.43
2020/9/15	39.39	2020/12/7	40.97	2021/2/26	35.52	2021/5/18	34.8	2021/8/2	46.2
2020/9/16	39.63	2020/12/8	40.32	2021/3/1	36.33	2021/5/19	34.35	2021/8/3	44.45
2020/9/17	40.76	2020/12/9	39.35	2021/3/2	35.86	2021/5/20	34.28	2021/8/4	45.33
2020/9/18	40.95	2020/12/10	39.11	2021/3/3	36.11	2021/5/21	34.02	2021/8/5	45.2
2020/9/21	40.54	2020/12/11	38.21	2021/3/4	35.84	2021/5/24	34.45	2021/8/6	44.48
2020/9/22	40.08	2020/12/14	39.14	2021/3/5	36.48	2021/5/25	34.96	2021/8/9	43.88
2020/9/23	41.36	2020/12/15	39.01	2021/3/8	36.06	2021/5/26	35.16	2021/8/10	44
2020/9/24	40.26	2020/12/16	38.14	2021/3/9	34.93	2021/5/27	36.7	2021/8/11	43.1
2020/9/25	39.66	2020/12/17	38.42	2021/3/10	33.66	2021/5/28	35.81	2021/8/12	43.15
2020/9/28	38.63	2020/12/18	38.2	2021/3/11	34.11	2021/5/31	37.2	2021/8/13	41.38
2020/9/29	40.07	2020/12/21	38.93	2021/3/12	33.67	2021/6/1	36.95	2021/8/16	42.06
2020/9/30	40.44	2020/12/22	38.31	2021/3/15	33.41	2021/6/2	36.88	2021/8/17	41
2020/10/9	42.35	2020/12/23	38.36	2021/3/16	34.06	2021/6/3	36.65	2021/8/18	40
2020/10/12	43	2020/12/24	37.06	2021/3/17	34.09	2021/6/4	37.24	2021/8/19	40.2
2020/10/13	42.68	2020/12/25	37.86	2021/3/18	33.8	2021/6/7	39.4	2021/8/20	39.33
2020/10/14	42.52	2020/12/28	37.61	2021/3/19	33.7	2021/6/8	37.37	2021/8/23	40.66
2020/10/15	41.68	2020/12/29	39.2	2021/3/22	34.2	2021/6/9	37.2	2021/8/24	40.25
2020/10/16	42.25	2020/12/30	38.79	2021/3/23	34.35	2021/6/10	37.25	2021/8/25	40.41
2020/10/19	41.16	2020/12/31	39.4	2021/3/24	34.27	2021/6/11	35.81	2021/8/26	39.02
2020/10/20	42.14	2021/1/4	39.46	2021/3/25	34.27	2021/6/15	35.81	2021/8/27	39.27
2020/10/21	41.6	2021/1/5	39.08	2021/3/26	34.26	2021/6/16	34.39		
2020/10/22	41.5	2021/1/6	38.07	2021/3/29	33.85	2021/6/17	36.45		

中科电气 (2020/8/31-2021/8/27)

日期	收盘价	日期	收盘价	日期	收盘价	日期	收盘价	日期	收盘价
2020/8/31	8.63	2020/11/20	11.18	2021/2/4	11.96	2021/4/28	11.57	2021/7/16	27.85
2020/9/1	9.04	2020/11/23	11.8	2021/2/5	11.08	2021/4/29	11.29	2021/7/19	25.8
2020/9/2	9.37	2020/11/24	11.69	2021/2/8	10.99	2021/4/30	11.2	2021/7/20	26.05
2020/9/3	9.16	2020/11/25	11.75	2021/2/9	11.59	2021/5/6	10.9	2021/7/21	27.36
2020/9/4	9.33	2020/11/26	11.27	2021/2/10	11.4	2021/5/7	10.73	2021/7/22	26.54
2020/9/7	9.68	2020/11/27	11.13	2021/2/18	11.27	2021/5/10	10.75	2021/7/23	22.8
2020/9/8	9.61	2020/11/30	11.04	2021/2/19	11.41	2021/5/11	10.7	2021/7/26	23.78
2020/9/9	9.1	2020/12/1	11.2	2021/2/22	11.97	2021/5/12	10.69	2021/7/27	22.65
2020/9/10	8.6	2020/12/2	11.24	2021/2/23	11.27	2021/5/13	10.49	2021/7/28	24.2
2020/9/11	8.99	2020/12/3	11.14	2021/2/24	11.19	2021/5/14	10.77	2021/7/29	23.75
2020/9/14	9.51	2020/12/4	11.67	2021/2/25	10.94	2021/5/17	11.38	2021/7/30	22.49
2020/9/15	9.37	2020/12/7	12.06	2021/2/26	10.94	2021/5/18	11.49	2021/8/2	24.17
2020/9/16	10.12	2020/12/8	12.36	2021/3/1	10.98	2021/5/19	12.31	2021/8/3	22.41
2020/9/17	9.99	2020/12/9	11.9	2021/3/2	11.05	2021/5/20	12.64	2021/8/4	25.52
2020/9/18	9.91	2020/12/10	11.86	2021/3/3	11.12	2021/5/21	13.1	2021/8/5	25.84
2020/9/21	10.14	2020/12/11	11.89	2021/3/4	10.68	2021/5/24	13.39	2021/8/6	26.35
2020/9/22	9.6	2020/12/14	12.28	2021/3/5	10.44	2021/5/25	13.18	2021/8/9	24.39
2020/9/23	9.5	2020/12/15	12.15	2021/3/8	10	2021/5/26	13.06	2021/8/10	24
2020/9/24	9.03	2020/12/16	11.77	2021/3/9	9.97	2021/5/27	13.79	2021/8/11	25.01
2020/9/25	8.79	2020/12/17	12.6	2021/3/10	10.17	2021/5/28	15.65	2021/8/12	25.28
2020/9/28	8.7	2020/12/18	12.94	2021/3/11	10.23	2021/5/31	17.1	2021/8/13	24.32
2020/9/29	9	2020/12/21	13.45	2021/3/12	10.62	2021/6/1	17.18	2021/8/16	22.3
2020/9/30	9.12	2020/12/22	13.02	2021/3/15	10.3	2021/6/2	17.05	2021/8/17	20.64
2020/10/9	9.9	2020/12/23	13.58	2021/3/16	10.4	2021/6/3	17.7	2021/8/18	20.59
2020/10/12	11.4	2020/12/24	12.87	2021/3/17	10.31	2021/6/4	18.85	2021/8/19	21.18
2020/10/13	11.59	2020/12/25	12.9	2021/3/18	10.52	2021/6/7	17.96	2021/8/20	21.35
2020/10/14	11.71	2020/12/28	12.51	2021/3/19	10.38	2021/6/8	18.24	2021/8/23	21.85
2020/10/15	11.76	2020/12/29	11.48	2021/3/22	10.45	2021/6/9	19.48	2021/8/24	23.2
2020/10/16	11.51	2020/12/30	12.14	2021/3/23	10.24	2021/6/10	19.94	2021/8/25	24.49
2020/10/19	11.8	2020/12/31	12.25	2021/3/24	10.11	2021/6/11	21.11	2021/8/26	24.18
2020/10/20	12.01	2021/1/4	13.44	2021/3/25	10.27	2021/6/15	20.39	2021/8/27	24.29
2020/10/21	11.53	2021/1/5	13.23	2021/3/26	10.6	2021/6/16	19.05		
2020/10/22	11.42	2021/1/6	12.6	2021/3/29	10.58	2021/6/17	19.83		
2020/10/23	11.56	2021/1/7	12.14	2021/3/30	10.59	2021/6/18	22.71		
2020/10/26	11.77	2021/1/8	11.87	2021/3/31	10.72	2021/6/21	22.66		
2020/10/27	12.73	2021/1/11	11.17	2021/4/1	10.84	2021/6/22	22.95		
2020/10/28	12.26	2021/1/12	10.97	2021/4/2	10.69	2021/6/23	23.44		
2020/10/29	11.47	2021/1/13	11.21	2021/4/6	10.58	2021/6/24	22.67		
2020/10/30	11.1	2021/1/14	10.78	2021/4/7	10.55	2021/6/25	22.76		
2020/11/2	11.6	2021/1/15	10.89	2021/4/8	10.41	2021/6/28	22.88		
2020/11/3	11.82	2021/1/18	11.16	2021/4/9	10.38	2021/6/29	23.3		

(续上表)

日期	收盘价	日期	收盘价	日期	收盘价	日期	收盘价	日期	收盘价
2020/11/4	12.08	2021/1/19	10.84	2021/4/12	10.28	2021/6/30	24.45		
2020/11/5	13.83	2021/1/20	11.25	2021/4/13	10.34	2021/7/1	23.89		
2020/11/6	13.08	2021/1/21	12.55	2021/4/14	10.83	2021/7/2	25.93		
2020/11/9	13.54	2021/1/22	12.13	2021/4/15	10.99	2021/7/5	27.8		
2020/11/10	13.3	2021/1/25	12.03	2021/4/16	10.93	2021/7/6	27.45		
2020/11/11	12.57	2021/1/26	12.26	2021/4/19	11.57	2021/7/7	29.32		
2020/11/12	12.24	2021/1/27	12.5	2021/4/20	11.45	2021/7/8	29.95		
2020/11/13	12.53	2021/1/28	12.07	2021/4/21	11.29	2021/7/9	29.15		
2020/11/16	12.1	2021/1/29	12.33	2021/4/22	11.49	2021/7/12	32		
2020/11/17	11.38	2021/2/1	12.94	2021/4/23	11.51	2021/7/13	30.83		
2020/11/18	10.96	2021/2/2	13	2021/4/26	11.7	2021/7/14	27.76		
2020/11/19	10.95	2021/2/3	12.6	2021/4/27	11.8	2021/7/15	29.94		