

分类号\_\_\_\_\_

密级\_\_\_\_\_

U D C \_\_\_\_\_

编号 10741

兰州财经大学

LANZHOU UNIVERSITY OF FINANCE AND ECONOMICS

# 硕士学位论文

论文题目 混合高斯过程下的亚式期权定价  
以及统计模拟分析

研究生姓名: 丁毅

指导教师姓名、职称: 郭精军 教授

学科、专业名称: 统计学 数理统计学

研究方向: 金融统计分析

提交日期: 2022年5月30日

## 独创性声明

本人声明所呈交的论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意。

学位论文作者签名: 丁毅 签字日期: 2022.5.30

导师签名: 郭利军 签字日期: 2022.5.30

## 关于论文使用授权的说明

本人完全了解学校关于保留、使用学位论文的各项规定，同意（选择“同意” / “不同意”）以下事项：

1. 学校有权保留本论文的复印件和磁盘，允许论文被查阅和借阅，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文；
2. 学校有权将本人的学位论文提交至清华大学“中国学术期刊（光盘版）电子杂志社”用于出版和编入 CNKI《中国知识资源总库》或其他同类数据库，传播本学位论文的全部或部分内容。

学位论文作者签名: 丁毅 签字日期: 2022.5.30

导师签名: 郭利军 签字日期: 2022.5.30

# **Asian option pricing and statistical simulation analysis under mixed Gaussian process**

**Candidate: Yi Ding**

**Supervisor: Jingjun Guo**

## 摘要

期权是金融衍生品中极为重要的一种,自从它诞生之日起,学者们对于期权的研究从未停止。在所有的研究中,Black-Scholes(B-S)期权定价模型具有里程碑意义,获得了前所未有的成功。但是,B-S模型基于资产价格连续变动、交易过程无交易费用、资产价格服从对数正态分布等一系列假设之上,在一些情形下,它对标的资产价格变动过程的假设与金融市场的实际不符。因此,为了描述标的资产价格在变动过程中出现的一些特殊情形,应该采用另外的随机过程来描述。本文研究混合高斯过程下的亚式期权定价。

考虑到经典的B-S期权定价模型不能描述资产价格的长相依性和跳跃现象,运用混合高斯跳模型来描述标的资产价格的变动过程。首先,得到了几何平均亚式幂期权价格所满足的偏微分方程。其次,分别获得了几何平均亚式看涨和看跌幂期权的定价公式。最后,讨论了参数对期权价格的敏感性并进行了实例分析,结果表明,混合高斯跳模型在描述具有“跳”特征的标的资产价格时优于几何布朗运动。

由于B-S期权定价模型不能描述金融资产价格常值周期性、长相依性的特征,采用时变混合分数布朗运动描述金融资产价格的变动,并且对亚式期权定价时也考虑了标的资产的交易费用。首先,运用自融资 $\Delta$ 对冲策略得出了在离散情形下几何平均亚式期权价格所满足的偏微分方程,其次,得到了几何平均亚式看涨、看跌期权的定价公式,并分析了定价模型中的参数对期权价格的影响。最后,选取万科股票的日收盘价对所建立的定价模型进行了实例分析,验证了定价模型的有效性。

**关键词:** 次分数布朗运动; 跳扩散; 亚式幂期权; *Itô* 公式; 时变混合分数布朗运动

## Abstract

Option is a very important kind of financial derivatives. Since its birth, scholars have never stopped studying options. In all the studies, the Black Scholes (B-S) option pricing model is a milestone and has achieved unprecedented success. However, the B-S model is based on a series of assumptions. In some cases, these assumptions about the price change process of the underlying asset are inconsistent with the reality of the financial market. Therefore, in order to describe some special situations in the price change process of the underlying asset, another stochastic process should be used. This thesis studies the pricing of Asian options under mixed Gaussian process.

Considering that the classical Black Scholes (B-S) option pricing model can't describe the long-term dependence and jump phenomenon of asset prices, this thesis uses Gaussian mixture jump model to describe the change process of underlying asset prices. Firstly, the partial differential equations of geometric mean Asian power option prices are obtained. Secondly, the pricing formulas of geometric mean Asian call and put power options are obtained respectively, this thesis discusses the sensitivity of parameters to option price and makes an empirical analysis. The empirical results show that the Gaussian mixture jump model is better than geometric Brownian motion in describing the underlying asset price with "jump" characteristics.

The B-S Option pricing model can't describe the characteristics of constant value periodicity and long-term dependence of financial asset prices. The time-varying mixed fractional Brownian motion is used to describe the changes of financial asset prices, by using the self-financing  $\Delta$  hedging strategy, the partial differential equation of the geometric average Asian option price and the pricing formulas of the geometric average Asian call and put options are obtained, and the influence of the parameters in the pricing model on the option price is analyzed, this thesis selects the daily closing price of Vanke stock to make an empirical analysis of the pricing model, and verifies the effectiveness of the pricing model.

**Key words:** Sub-fractional Brownian motion; Jump diffusion; Asian option;  $It\hat{o}$  formula; Time varying mixed fractional Brownian motion

# 目 录

1 引言.....	1
1.1 研究背景.....	1
1.2 研究目的与意义.....	1
1.2.1 研究目的.....	1
1.2.2 研究意义.....	2
1.3 研究现状.....	2
1.4 文献述评.....	4
1.5 研究内容与结构.....	5
1.5.1 研究内容.....	5
1.5.2 结构安排.....	6
2 预备知识.....	7
2.1 相关定义.....	7
2.2 相关引理.....	8
3 混合高斯跳模型下亚式幂期权定价 .....	11
3.1 亚式幂期权定价模型.....	11
3.2 模型求解.....	15
3.3 敏感性分析.....	18
3.4 实例分析.....	21
3.4.1 数据选取.....	21
3.4.2 模拟分析.....	23
4 时变混合分数布朗运动下带交易费用的亚式期权定价 .....	24
4.1 亚式期权定价模型.....	24
4.2 模型求解.....	28
4.3 数值模拟.....	31
4.4 实例分析.....	33
4.4.1 数据选取.....	33

4.4.2 参数估计.....	35
4.4.3 模拟结果.....	36
5 总结与展望.....	38
5.1 研究总结.....	38
5.2 研究展望.....	38
参考文献.....	39
附录.....	43
在学期间完成的工作 .....	57
致谢.....	58

# 1 引言

## 1.1 研究背景

在过去的 40 多年中，衍生产品市场在金融领域的地位变得越来越重要，在各种类型的风险在经济体各实体间转移的过程中，衍生产品扮演着非常关键的角色。我们常常看到衍生产品被嵌入债券之中、被用于公司高管的报酬之中，等等<sup>[31]</sup>。因此，使用恰当的模型描述标的资产的价格，进而对衍生产品进行可靠的定价，一直是学术界研究的重点。

在所有的金融衍生产品中，期权是一种极为重要的衍生产品，其在金融机构的风险管理中扮演着重要的角色。不同于欧式期权和美式期权，亚式期权是当今金融衍生产品市场上交易最活跃的奇异期权之一，它最大的特点在于：其到期回报依赖于标的资产在一段特定时间内的平均价格。由于平均值的采用降低了回报的波动，这对于稳健的投资者具有很大吸引力<sup>[32]</sup>。

目前，对于亚式期权的定价主要集中在 B-S 模型的基础上。由于 B-S 模型建立在较多假设的基础上，但这些假设与金融市场的实际不符，因此，需要对 B-S 模型中刻画标的资产的随机过程进行改进，使其能够更好符合标的资产的变动规律，进而对亚式期权进行更合理的定价。

## 1.2 研究目的与意义

### 1.2.1 研究目的

针对经典 B-S 期权定价模型和分数布朗运动下期权定价模型的不足，采用混合高斯跳模型以及时变混合分数布朗运动模型来刻画金融资产的价格变化情况。在混合高斯跳模型下推导亚式幂期权价格所满足的偏微分方程以及价格公式。进一步，在时变混合分数布朗运动下推导亚式期权价格所满足的偏微分方程以及价格公式。最后，运用真实数据验证上述两个模型的有效性。

## 1.2.2 研究意义

随着金融市场的不断发展,衍生产品的市场规模越来越大,其市场规模早已远超股票市场。期权作为主要的金融衍生产品,可以用来对冲风险、投机和套利。因此,研究期权定价问题可以更好的对金融市场进行监管、为投资者提供参考以及丰富金融衍生产品的定价理论。

### (1) 理论意义

**丰富期权定价的理论知识。**采用混合高斯跳模型来刻画金融资产价格的变化可以克服经典 B-S 模型不能准确刻画金融资产价格呈现出的常相依性以及价格的跳跃现象,在此模型下得到亚式幂期权的定价公式。采用时变混合分数布朗运动来刻画资产价格变动的常值周期性、长相依性以及交易过程中产生的交易成本,推导亚式期权价格所满足的偏微分方程以及价格公式。这将丰富期权定价的理论知识,为以后的研究提供了新的思路。

### (2) 现实意义

**为风险管理人员提供依据。**对于期权的合理定价将使得风险管理人员能够更准确的进行敏感性分析,深刻把握各种风险因素对期权价格产生的影响,从而可以建立更好的投资组合,进而有效对冲风险。根据理论价格公式,给券商提供定价的依据,给投资者提供投资的依据,从而减少资本市场投机事故的发生,维护金融市场的稳定。

## 1.3 研究现状

经典的 B-S 期权定价模型假定股票价格的变动由几何布朗运动描述,通常假定标的资产价格连续变动、服从对数正态分布等<sup>[1]</sup>。但在实际中,标的资产价格并不满足这些假设<sup>[2]</sup>。

由于分数布朗运动可以描述资产价格长相依性的特征,所以一些学者将 B-S 期权定价模型中的布朗运动替换为分数布朗运动,进而得出了各类期权的定价公式。例如, Mao 和 Liang(2014)在分数布朗运动框架下研究了亚式幂期权的定价问题,基于等价鞅理论,在风险中性概率下得到了亚式幂期权的解析解<sup>[29]</sup>。

但由于分数型的 B-S 定价公式已被证明在一个完备且无摩擦的市场上会产

生套利<sup>[4]</sup>，为了解决套利的问题以及体现资产价格变动过程中长相依性的特征，Cheridito(2001)建议使用混合分数布朗运动来描述金融资产价格的变动<sup>[5]</sup>。Cheridito 已经证明，当 Hurst 指数  $H \in (3/4, 1)$  时，混合分数布朗运动等价于布朗运动，因而是无套利的。此后，混合分数布朗运动在金融衍生产品定价中被广泛使用<sup>[7,17]</sup>。

Wang(2016)得到了当标的资产价格服从混合分数布朗运动时汇率幂期权的定价公式<sup>[10]</sup>；Rao(2016)给出了混合分数布朗运动环境下几何亚式幂期权的定价公式<sup>[11]</sup>。考虑到标的资产价格的不连续变动，即出现“跳跃”的情形，且这些跳跃往往幅度大且频繁，因此一些学者在构建描述标的资产价格变化的模型时，加入了泊松过程或复合泊松过程来刻画标的资产价格“跳跃”的这种变化。例如，Peng(2012)利用分数跳扩散过程给出了亚式幂期权定价公式的解析解<sup>[12]</sup>，Shi(2014)运用一个随机波动率模型对亚式期权进行定价，并且考虑了标的资产的跳跃性，最终通过数值算法验证了模型的有效性<sup>[41]</sup>，Wang(2020)研究了多个资产情形下的期权定价问题，并且考虑了资产的跳跃风险<sup>[42]</sup>。

由于次分数布朗运动是比布朗运动更为一般的高斯过程，其性质类似于分数布朗运动，但退化速度要快于分数布朗运动<sup>[13,16]</sup>。一些学者开始运用次分数布朗运动来刻画金融资产价格的变化过程，例如肖炜麟(2014)等研究了标的资产服从次分数布朗运动，并且带有交易费用的备兑权证定价<sup>[14]</sup>，郭精军(2017)等假定利率由次分数 Vasicek 模型描述，得到了欧式期权的定价公式<sup>[43]</sup>，程志勇(2018)等研究了混合次分数布朗运动下支付红利的欧式期权的定价，得到了相应的定价公式<sup>[15]</sup>，Xu(2018)等假定标的资产由次分数布朗运动描述，给出了一种看涨期权和其它三种复合期权的定价公式，其结果与标准布朗运动和分数布朗运动下得到的结果类似<sup>[44]</sup>，Wang(2021)等研究了当标的资产价格服从次分数布朗运动时，亚式期权以及亚式幂期权价格的解析解，并通过实证表明次分数布朗运动模型要优于布朗运动模型<sup>[39]</sup>。也有学者在对亚式期权定价时考虑了标的资产的分红，例如，Fang(2017)等研究了离散算术平均亚式看涨期权的定价问题，假定离散红利服从几何布朗运动，股息模型的波动性取决于 Markov-Modulated 过程，最后通过数值算例和仿真验证了该方法的有效性<sup>[38]</sup>。

为了描述金融资产价格变动过程中出现的常值周期性、长相依性的特征，

Magdziarz(2009)引入时变几何布朗运动描述资产价格的变动,并且证明了他所采用的定价模型是无套利的但不完备,并且获得了时变几何布朗运动下的欧式期权定价公式<sup>[20]</sup>。Gu 和 Liang(2012)等研究了时变几何分数布朗运动下带有交易成本的欧式期权定价问题,得到了欧式期权的定价公式<sup>[21]</sup>; Guo 和 Yuan(2014)得到了时变混合分数布朗运动下欧式期权的定价公式<sup>[22]</sup>; Shokrollahi(2016)等得到了时变混合分数布朗运动下带有交易成本的欧式期权以及货币期权的定价问题,得到了相应的定价公式<sup>[23]</sup>; Önalın(2017)提出了一个新的模型来分析随机资产价格过程的行为,假设股票价格过程由带有逆伽马从属项的时变广义混合分数布朗运动控制,该模型是通过在广义混合分数布朗运动过程中引入随机时间变化而建立的。在此基础上,对算数平均亚式期权定价进行了研究,实证研究表明,该模型优于传统的模型<sup>[37]</sup>。Shokrollahi(2018)得到了当股票价格由时变混合分数布朗运动描述时,几何平均亚式期权的定价公式,并且获得了在一些特殊情形下亚式期权价格的下界<sup>[24]</sup>, Ivanov(2020)等研究了当标的资产由结合了复合泊松过程的时变 Lévy 模型描述时,一些欧式期权的定价问题<sup>[45]</sup>, Shiraya(2021)等提出了一种新的控制变量方法,结合特征函数方法,在时变 Lévy 模型下对路径相关的期权进行定价,是第一个为时变 Lévy 模型开发的一种有效控制变量的方法<sup>[46]</sup>。

## 1.4 文献述评

经过对上述文献的分析对比,可以得到如下结论:一方面,在期权定价研究中,考虑标的资产价格变动过程中呈现的常值周期性、跳跃性以及标的资产交易过程中产生的交易成本等特征,一直是期权定价研究的热点。另一方面,目前对于期权定价的研究主要集中于对 B-S 模型假设中个别假设的放松,而没有对这些不同的假定进行整合。

因此,本论文要在已有研究的基础上,将亚式期权作为研究对象,将已有文献对模型从不同角度出发的假定进行整合,使其能更好地符合金融市场实际,从而得到更合理的亚式期权价格。

## 1.5 研究内容与结构

### 1.5.1 研究内容

本文拟采用混合高斯过程来刻画标的资产价格的变化情况,在此基础上对亚式幂期权和亚式期权进行定价,具体研究内容如下:

(1) 为了体现金融资产价格的长相依性以及跳跃现象,运用混合高斯跳模型来研究几何平均亚式幂期权的定价问题。首先得到混合高斯跳过程下的  $It\hat{o}$  公式以及几何平均亚式幂期权价格所满足的偏微分方程;然后求解偏微分方程,得到亚式幂期权价格的解析解;通过数值模拟,讨论定价公式中各参数对于期权价格的影响,最后,用金融市场实际数据来检验混合高斯跳模型的有效性。

(2) 为了体现资产价格变动的常值周期性、长相依性以及交易过程中产生的交易成本,使用时变混合分数布朗运动下考虑交易费用的模型来研究几何平均亚式期权的定价问题。首先要得到期权定价模型以及期权价格所满足的偏微分方程;然后求解偏微分方程,得到几何平均亚式看涨、看跌期权定价公式;通过数值实验,讨论参数对于期权价格的影响;最后,使用真实数据检验模型的有效性。

基于上述研究内容,论文研究路线图如图 1.1 所示:

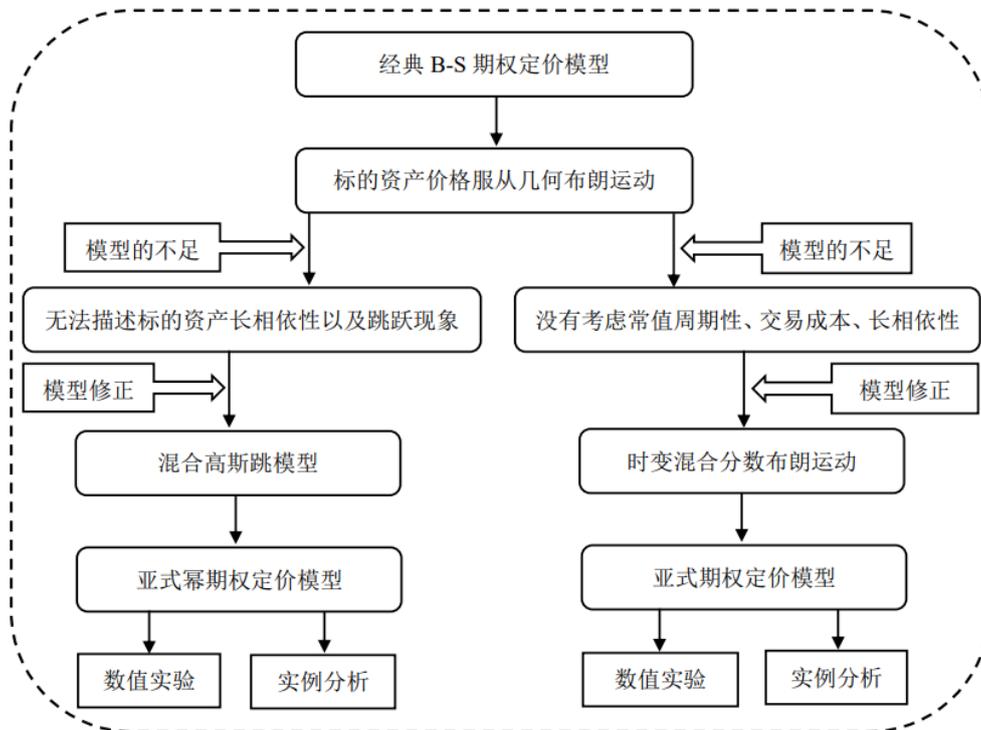


图 1.1 研究路线图

## 1.5.2 结构安排

基于论文研究路线图 1.1，论文结构安排如下：

第一部分是引言。引言部分主要介绍论文的研究背景、研究目的与研究意义、研究现状以及研究内容与结构。

第二部分是研究需要的预备知识。包括一些和定价模型相关定义、性质以及证明论文中的定理所必要的一些引理。

第三部分是混合高斯跳模型下亚式幂期权的定价。内容有模型构建、期权价格所满足的偏微分方程、模型求解、敏感性分析以及实例分析。

第四部分是时变混合分数布朗运动下亚式期权的定价。内容有模型构建、期权价格所满足的偏微分方程、模型求解、数值模拟以及实例分析。

第五部分是结论与展望。是对论文结论的总结和以后研究的方向。

## 2 预备知识

### 2.1 相关定义

下面介绍混合高斯模型及其性质、几何平均亚式幂期权的回报函数相关概念以及时变过程的相关概念与性质。

**定义 2.1**<sup>[16]</sup> 设  $(\Omega, F, P)$  是一个完备的概率空间，混合高斯过程  $M_t^H$  定义为

$$M_t^H = M_t^H(a, b) = a\xi_t + b\xi_t^H, \quad \forall t \geq 0.$$

其中,  $a, b$  是常数且  $(a, b) \neq (0, 0)$ ,  $H \in (0, 1)$  为 Hurst 指数,  $\xi_t$  为标准布朗运动,  $\xi_t^H$  为次分数布朗运动, 且  $\xi_t$  与  $\xi_t^H$  相互独立。

**性质 2.1**<sup>[16]</sup> 混合高斯模型  $M_t^H$ ,  $\forall t \geq 0$  具有如下性质<sup>[16]</sup>:

- (1)  $M_t^H$  是一个中心高斯过程;
- (2)  $M_0^H = a\xi_0 + b\xi_0^H = 0$ ;
- (3)  $\forall s \in \mathbb{R}_+, \forall t \in \mathbb{R}_+, M_t^H$  与  $M_s^H$  的协方差函数为

$$\text{Cov}(M_t^H(a, b), M_s^H(a, b)) = a^2(s \wedge t) + b^2 \left( t^{2H} + s^{2H} - \frac{1}{2} \left( (s+t)^{2H} + |t-s|^{2H} \right) \right).$$

其中  $s \wedge t = \frac{1}{2}(s+t-|s-t|)$ 。

**定义 2.2** 设  $(\Omega, F, P)$  是一个完备的概率空间，混合高斯跳模型  $X_t$  定义为

$$X_t = M_t^H + Q_t = a\xi_t + b\xi_t^H + Q_t.$$

其中  $M_t^H$  为混合高斯过程,  $Q_t = N_t - \lambda t$  是补偿泊松过程,  $N_t$  是强度为  $\lambda$  的泊松过程, 且  $\xi_t, \xi_t^H, N_t$  相互独立。

下面介绍亚式期权和亚式幂期权相关的概念。

**定义 2.2**<sup>[17]</sup> 固定行权价格  $K$ , 连续观测情形下几何平均亚式幂期权的回报函数为

$$\begin{cases} \max\{A_t^n - K^n, 0\} & \text{看涨亚式幂期权} \\ \max\{K^n - A_t^n, 0\} & \text{看跌亚式幂期权} \end{cases} \quad (\text{整数 } n \geq 1).$$

其中  $A_t$  表示标的资产价格  $S_t$  在  $[0, t]$  之间的几何平均值, 且

$$A_t = \exp \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t \ln S_\tau d\tau \right\},$$

记

$$G_t = A_t^n = \exp \left\{ \frac{n}{t} \int_0^t \ln S_\tau d\tau \right\}.$$

特别地, 当  $n=1$  时, 亚式幂期权转换为亚式期权。

下面给出时变混合分数布朗运动相关的概念。

**定义 2.3**<sup>[25-26]</sup> 若  $\{U_\alpha(\tau)\}_{\tau \geq 0}$  为  $\alpha$ -稳定 Lévy 过程且严格递增, 则称首达时间过程

$$T_\alpha(t) = \inf \{ \tau > 0 : U_\alpha(\tau) > t \}.$$

为逆  $\alpha$ -稳定从属过程。

过程  $\{U_\alpha(\tau)\}_{\tau \geq 0}$  具有如下性质<sup>[21][25-26]</sup>:

- 1)  $\{U_\alpha(\tau)\}_{\tau \geq 0}$  的 Laplace 变换为  $E(e^{-uU_\alpha(\tau)}) = e^{-\tau u^\alpha}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ 。
- 2)  $U_\alpha(t)$  是  $\frac{1}{\alpha}$  自相似的,  $T_\alpha(t)$  是  $\alpha$  自相似的, 即对于每一个  $c > 0$ , 有

$$U_\alpha(ct) \stackrel{d}{=} c^{\frac{1}{\alpha}} U_\alpha(t),$$

$$T_\alpha(ct) \stackrel{d}{=} c^\alpha T_\alpha(t).$$

其中  $\stackrel{d}{=}$  表示两边的分布相同。

**定义 2.4**<sup>[22-23]</sup> 考虑一个复合过程  $Z_\alpha(t) = B(T_\alpha(t))$ ,  $Z_{\alpha,H}(t) = B_H(T_\alpha(t))$ , 其中  $B(\cdot)$  表示标准布朗运动,  $B_H(\cdot)$  表示分数布朗运动, 则称

$$M_{\alpha,H}(t) = M_{T_\alpha(t)}^H = Z_\alpha(t) + Z_{\alpha,H}(t).$$

为时变混合分数布朗运动。

## 2.2 相关引理

下面给出复合过程  $Z_\alpha(t) = B(T_\alpha(t))$ ,  $Z_{\alpha,H}(t) = B_H(T_\alpha(t))$  相关的一些性质:

**引理 2.1**<sup>[21]</sup> 若  $0 < \beta$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2 < +\infty$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , 则下列关系成立

$$1) o(\chi^{\beta_1}) \cdot o(\chi^{\beta_2}) = o(\chi^{\beta_1 + \beta_2}),$$

- 2)  $(o(\chi^\beta))^n = o(\chi^{n\beta})$ ,
- 3)  $o(\chi^{\beta_1}) + o(\chi^{\beta_2}) = o(\chi^{\min\{\beta_1, \beta_2\}})$ .

**引理 2.2**<sup>[21-23,34]</sup> 若  $\varepsilon \in (0, \alpha H)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq s < t < +\infty$ , 则有下列等式

$$\Delta T_\alpha(t) = o(\Delta t^{\alpha-\varepsilon}),$$

$$\Delta Z_{\alpha, H}(t) = o(\Delta t^{\alpha H - \varepsilon}).$$

以及下列不等式

- 1)  $E(|T_\alpha(t) - T_\alpha(s)|^n) \leq \frac{n!}{\Gamma^n(\alpha+1)} (t-s)^{\alpha n}$ ,
- 2)  $E(|Z_{\alpha, H}(t) - Z_{\alpha, H}(s)|^n) \leq (n-1)!! \left[ \frac{n!}{\Gamma^n(\alpha+1)} \right]^H (t-s)^{H\alpha n}$ ,
- 3)  $E(|Z_\alpha(t) - Z_\alpha(s)|^n) \leq (n-1)!! \left[ \frac{n!}{\Gamma^n(\alpha+1)} \right]^{\frac{1}{2}} (t-s)^{\frac{1}{2}\alpha n}$ .

**引理 2.3**<sup>[21-23,34]</sup> 令  $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$  且  $n \in \mathbb{N}$ , 对于任意的  $0 < b \neq 1$  以及  $T > 0$ , 则

$b^{|Z_{\alpha, H}(t)|}$  的  $n$  阶矩存在, 并且  $b^{|Z_{\alpha, H}(t)|}$  的任意阶矩在  $t \in [0, T]$  上一致有界。

**引理 2.4**<sup>[21-23,34]</sup> 时变过程  $T_\alpha(t)$  的矩的一些重要结论如下

- 1)  $E(T_\alpha^m(t)) = \frac{t^{m\alpha} m!}{\Gamma(m\alpha+1)}$ ,
- 2)  $E(\Delta T_\alpha(t)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left[ (t+\Delta t)^\alpha - t^\alpha \right] = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \Delta t$ ,
- 3)  $E\left((\Delta B_H(T_\alpha(t)))^2\right) = \left[ \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right]^{2H} \Delta t^{2H}$ ,
- 4)  $E\left((\Delta B_H(T_\alpha(t)))\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right]^H \Delta t^H$ .

热方程是偏微分方程领域重要的基础方程, 热方程的解在求解期权价格所满足的偏微分方程时被广泛应用。

**引理 2.5**<sup>[40]</sup> 齐次热方程

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & a > 0, t > 0, x \in (-\infty, \infty), \\ u(0, x) = \varphi(x) \end{cases}$$

其中  $\varphi(x)$  是有界连续函数,  $u(t, x)$  具有较高光滑性, 并且对于自变量  $t, x$  任意阶可微。则其解为

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi,$$

其中

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left[-(x - \xi)^2 / 4a^2 t\right].$$

### 3 混合高斯跳模型下亚式期权定价

#### 3.1 亚式期权定价模型

考虑到经典的 B-S 期权定价模型不能描述资产价格的长相依性和跳跃现象, 本节运用混合高斯跳模型来描述标的资产价格的变动过程, 推导混合高斯跳过程  $It\hat{o}$  公式以及几何平均亚式期权看涨期权的价格满足的偏微分方程。

对亚式期权定价所采用的模型如下

$$dS_t = (\mu - q)S_t dt + \sigma S_t (dM_t^H + dQ_t). \quad (3.1)$$

其中  $\mu$ ,  $q$ ,  $\sigma$  均为常数, 分别表示股票的预期收益率、股票的红利率、股票价格的波动率,  $M_t^H = a\xi_t + b\xi_t^H$  是混合高斯过程。不失一般性, 取  $a = b = 1$  进行讨论。  $Q_t = N_t - \lambda t$  是补偿泊松过程,  $N_t$  是强度为  $\lambda$  的泊松过程, 且  $\xi_t$ ,  $\xi_t^H$ ,  $N_t$  相互独立。

在经典的 B-S 期权定价公式的推导过程中, 几何布朗运动下的  $It\hat{o}$  公式发挥了重要作用。下面推导混合高斯跳过程下的  $It\hat{o}$  公式。

**定理 3.1.1** 设  $X_t = \xi_t + \xi_t^H + Q_t$  为混合高斯跳过程,  $f(t, x)$  具有连续的一阶及二阶偏导数, 那么

$$\begin{aligned} f(t, X_t) = & f(0, 0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(\tau, X_\tau) dX_\tau \\ & + \int_0^t \left[ \frac{\partial f}{\partial \tau}(\tau, X_\tau) + \frac{1}{2} (1 + \lambda + 2H\tau^{2H-1}(2 - 2^{2H-1})) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\tau, X_\tau) \right] d\tau. \end{aligned} \quad (3.2)$$

**证** 任意给定  $\omega \in \Omega$ , 从而固定了过程  $X_t = \xi_t + \xi_t^H + Q_t$  的路径。

设  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = t$  是该路径在  $[0, t)$  内所有发生跳跃的时刻 ( $t_0$  除外)。记补偿泊松过程  $Q_t$  在  $t_i$  时刻发生第  $i$  次跳跃, 则当  $i=1$  时, 在  $[0, t)$  内只发生一次跳跃, 且跳跃发生的时刻为  $t_1$ , 即  $X_t$  在  $[0, t_1)$  与  $(t_1, t)$  内没有发生跳跃, 则在  $[0, t_1)$  与  $(t_1, t)$  内分别用分数型  $It\hat{o}$  公式可得:

$$f(t, X_t) = f(0, 0) + \int_0^{t_1} \left[ \frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{1}{2} (1 + 2H\tau^{2H-1}(2 - 2^{2H-1})) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \right] d\tau + \int_0^{t_1} \frac{\partial f}{\partial x} d\xi_\tau + \int_0^{t_1} \frac{\partial f}{\partial x} d\xi_\tau^H.$$

$$f(t, X_t) = f(t_1, X_{t_1}) + \int_{t_1}^t \left[ \frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{1}{2} (1 + 2H\tau^{2H-1}(2 - 2^{2H-1})) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \right] d\tau + \int_{t_1}^t \frac{\partial f}{\partial x} d\xi_\tau + \int_{t_1}^t \frac{\partial f}{\partial x} d\xi_\tau^H.$$

因  $X_t$  在时刻  $t_1$  发生  $X_{t_1^-}$  到  $X_{t_1}$  的跳跃, 则  $f(t, X_t)$  在  $t_1$  时刻的变化量为

$$f(t_1, X_{t_1}) - f(t_1, X_{t_1^-}), \text{ 故}$$

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, 0) + \int_0^t \left[ \frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{1}{2} (1 + 2H\tau^{2H-1}(2 - 2^{2H-1})) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \right] d\tau \\ &\quad + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x} d\xi_\tau + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x} d\xi_\tau^H + f(t_1, X_{t_1}) - f(t_1, X_{t_1^-}). \end{aligned}$$

现在考虑在  $[0, t)$  内所有的跳跃时刻  $t_i (i=1, 2, \dots, n)$ , 则有

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, 0) + \int_0^t \left[ \frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{1}{2} (1 + 2H\tau^{2H-1}(2 - 2^{2H-1})) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \right] d\tau \\ &\quad + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x} d\xi_\tau + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x} d\xi_\tau^H + \sum_{\tau \leq t} (f(\tau, X_\tau) - f(\tau, X_{\tau^-})). \end{aligned}$$

设  $g(s) \in C^2(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ , 由于  $(dN_t, dN_t) = \lambda dt$ , 运用文献[12]中的方法, 对  $g(N_t)$  应用广义  $It\hat{o}$  积分, 有

$$\sum_{\tau \leq t} g(N_\tau) - g(N_{\tau^-}) = \int_0^t g'(N_\tau) dN_\tau + \frac{\lambda}{2} \int_0^t g''(N_\tau) d\tau.$$

因  $X_t = \xi_t + \xi_t^H + N_t - \lambda t$ , 则

$$\sum_{\tau \leq t} [f(\tau, X_\tau) - f(\tau, X_{\tau^-})] = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x} dN_\tau + \frac{\lambda}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} d\tau. \quad (3.3)$$

将(3.3)式代入  $f(t, X_t)$  的表达式得

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, 0) + \int_0^t \left[ \frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{1}{2} (1 + 2H\tau^{2H-1}(2 - 2^{2H-1})) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \right] d\tau \\ &\quad + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x} d\xi_\tau + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x} d\xi_\tau^H + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x} dN_\tau + \frac{\lambda}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} d\tau \\ &= f(0, 0) + \int_0^t \left[ \frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{1}{2} (1 + 2H\tau^{2H-1}(2 - 2^{2H-1}) + \lambda) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right] d\tau + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x} dX_\tau. \end{aligned}$$

证毕。

根据混合高斯跳过程下的  $It\hat{o}$  公式, 可得如下推论。

**推论 3.1.1** 随机微分方程(3.1)的解是

$$S_t = S_0 \exp \left\{ (\mu - q)t - \frac{\sigma^2}{2} \left( (2 - 2^{2H-1})t^{2H} + \lambda t + t \right) + \sigma X_t \right\}. \quad (3.4)$$

基于定价模型(3.1), 下面推导看涨亚式幂期权价格所满足的偏微分方程以及看涨亚式幂期权价格的解析解。

**定理 3.1.2** 假设标的资产价格  $S_t$  满足混合高斯跳过程驱动的随机微分方程(3.1), 则行权价格为  $K$ , 到期日为  $K$  的几何平均亚式幂期权看涨期权在  $t(0 \leq t \leq T)$  时刻的价格  $V_c(t, S_t, G_t)$  满足如下的偏微分方程

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (r - q)S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \delta^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} + \frac{G_t (n \ln S_t - \ln G_t)}{t} \frac{\partial V}{\partial G_t} = rV_t. \quad (3.5)$$

其中  $0 < S_t < \infty$ ,  $0 < G_t < \infty$ ,  $\delta^2 = \sigma^2 [1 + \lambda + 2Ht^{2H-1}(2 - 2^{2H-1})]$ , 边界条件为

$$V_c(T, S_T, G_T) = \max \{ G_T - K^n, 0 \}.$$

**证** 设  $A_t$  为亚式幂期权的标的资产价格在  $[0, t]$  上的几何平均值, 且

$$A_t = \exp \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t \ln S_\tau d\tau \right\}.$$

令

$$G_t = A_t^n = \exp \left\{ \frac{n}{t} \int_0^t \ln S_\tau d\tau \right\},$$

则

$$dG_t = \frac{G_t (n \ln S_t - \ln G_t)}{t} dt.$$

构建一个投资组合, 该投资组合由下面微分方程描述

$$\begin{cases} dP_t = rP_t dt, P_0 = 1, 0 \leq t \leq T \\ dS_t = (\mu - q)S_t dt + \sigma S_t dX_t. \end{cases} \quad (3.6)$$

其中,  $r$  为无风险利率,  $P_t$  为  $t$  时刻债券价格,  $S_t$  为时刻  $t$  股票价格。

对于一个自融资投资策略  $\theta = (\theta_t^0, \theta_t^1)$ , 则其资产价值为  $V_t = \theta_t^0 P_t + \theta_t^1 S_t$ , 又因股票需要连续支付股息<sup>[36,18]</sup>  $q$ , 故

$$dV_t = \theta_t^0 dP_t + \theta_t^1 dS_t + \theta_t^1 q S_t dt, \quad (3.7)$$

由(3.6)、(3.7)式可以得到下面的推导

$$\begin{aligned}
dV_t &= \theta_t^0 dP_t + \theta_t^1 dS_t + \theta_t^1 q S_t dt \\
&= (V_t - \theta_t^1 S_t) r dt + \theta_t^1 (\mu - q) S_t dt + \theta_t^1 \sigma S_t dX_t + \theta_t^1 q S_t dt \\
&= (V_t - \theta_t^1 S_t) r dt + \theta_t^1 \mu S_t dt + \theta_t^1 \sigma S_t dX_t.
\end{aligned}$$

根据混合高斯跳过程的  $It\hat{o}$  公式(3.2)以及随机微分方程(3.1)的解(3.4), 可以得到下述推导:

$$\begin{aligned}
dV_t &= dV_t(t, S_t, G_t) \\
&= \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S_t} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} dS_t dS_t + \frac{\partial V}{\partial G_t} dG_t \\
&= \left[ \frac{\partial V}{\partial t} + (\mu - q) S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{G_t (n \ln S_t - \ln G_t)}{t} \frac{\partial V}{\partial G_t} \right] dt \\
&\quad + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \left[ 1 + \lambda + 2Ht^{2H-1} (2 - 2^{2H-1}) \right] \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} dt + \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} dX_t.
\end{aligned}$$

根据风险中性定价原理: 一份期权价值与投资组合  $\theta = (\theta_t^0, \theta_t^1)$  的价值相等<sup>[33]</sup>, 所以, 取适当的参数, 则可以对冲包含风险的项  $dX_t$ 。

取  $\theta_t^1 = \frac{\partial V}{\partial S_t}$ , 于是

$$\begin{aligned}
\left( V_t - \frac{\partial V}{\partial S_t} S_t \right) r dt + \mu S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} dt &= \left[ \frac{\partial V}{\partial t} + (\mu - q) S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{G_t (n \ln S_t - \ln G_t)}{t} \frac{\partial V}{\partial G_t} \right] dt \\
&\quad + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \left[ 1 + \lambda + 2Ht^{2H-1} (2 - 2^{2H-1}) \right] \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} dt.
\end{aligned}$$

整理上式可得

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (r - q) S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \left[ 1 + \lambda + 2Ht^{2H-1} (2 - 2^{2H-1}) \right] \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} + \frac{G_t (n \ln S_t - \ln G_t)}{t} \frac{\partial V}{\partial G_t} = rV_t.$$

令

$$\delta^2 = \sigma^2 \left[ 1 + \lambda + 2Ht^{2H-1} (2 - 2^{2H-1}) \right],$$

从而

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (r - q) S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \delta^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} + \frac{G_t (n \ln S_t - \ln G_t)}{t} \frac{\partial V}{\partial G_t} = rV_t.$$

证毕。

### 3.2 模型求解

**定理 3.2.1** 假设标的资产价格  $S_t$  满足混合高斯跳过程驱动的随机微分方程 (3.1)，则行权价格为  $K$ ，到期日为  $T$  的几何平均亚式幂期权看涨期权在  $t(0 \leq t \leq T)$  时刻的价格  $V_c(t, S_t, G_t)$  为：

$$V_c(t, S_t, G_t) = \exp^{-\beta(t)} \left[ e^{\tau + \eta_t} N(d_1) - K^n N(d_2) \right]. \quad (3.8)$$

其中

$$\beta(t) = r(T - t),$$

$$\tau = \frac{n^2 \sigma^2 (1 + \lambda)(T - t)^3}{6T^2} + \frac{n^2 \sigma^2 (2 - 2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})}{2} - \frac{2Hn^2 \sigma^2 (2 - 2^{2H-1})(T^{2H+1} - t^{2H+1})}{T(2H+1)} + \frac{Hn^2 \sigma^2 (2 - 2^{2H-1})(T^{2H+2} - t^{2H+2})}{2T^2(H+1)}.$$

$$\eta_t = \frac{t \ln G_t + (T - t)n \ln S_t}{T} + \frac{n \left[ r - q - \frac{1}{2} \sigma^2 (1 + \lambda) \right] (T - t)^2}{2T} - \frac{n \sigma^2 (2 - 2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})}{2} + \frac{n \sigma^2 H (2 - 2^{2H-1})(T^{2H+1} - t^{2H+1})}{T(2H+1)}.$$

$$d_1 = \frac{\eta_t + 2\tau - n \ln K}{\sqrt{2\tau}},$$

$$d_2 = \frac{\eta_t - n \ln K}{\sqrt{2\tau}},$$

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

**证** 由定理 3.1.2 可知，几何平均亚式幂期权看涨期权在  $t(0 \leq t \leq T)$  时刻的价格  $V_c(t, S_t, G_t)$  满足偏微分方程(3.5)。令

$$\varphi_t = \frac{t \ln G_t + (T - t)n \ln S_t}{T},$$

$$V_c(t, S_t, G_t) = U(t, \varphi_t).$$

则

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial \varphi_t} \frac{\ln G_t - n \ln S_t}{T},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial G_t} &= \frac{\partial U}{\partial \varphi_t} \frac{t}{TG_t}, \\ \frac{\partial V}{\partial S_t} &= \frac{\partial U}{\partial \varphi_t} \frac{n(T-t)}{TS_t}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} &= \left[ \frac{n(T-t)}{TS_t} \right]^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_t^2} - \frac{n(T-t)}{TS_t^2} \frac{\partial U}{\partial \varphi_t}.\end{aligned}$$

将上述偏微分代入(3.5)式，化简整理得

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + \left( r - q - \frac{1}{2} \delta^2 \right) \frac{n(T-t)}{T} \frac{\partial U}{\partial \varphi_t} + \frac{1}{2} \delta^2 \left[ \frac{n(T-t)}{T} \right]^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_t^2} = rU_t \\ U(T, \varphi_T) = \max \{ e^{qT} - K^n, 0 \}. \end{cases} \quad (3.9)$$

令

$$\begin{aligned}\tau &= \gamma(t), \\ \eta_\tau &= \varphi_t + \alpha(t), \\ X(\tau, \eta_\tau) &= U(t, \varphi_t) e^{\beta(t)}.\end{aligned}$$

其中  $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$  为待定函数，则

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t} &= e^{-\beta(t)} \left[ \frac{\partial X}{\partial \tau} \gamma'(t) - \beta'(t) X + \frac{\partial X}{\partial \eta_\tau} \alpha'(t) \right], \\ \frac{\partial U}{\partial \varphi_t} &= e^{-\beta(t)} \frac{\partial X}{\partial \eta_\tau}, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_t^2} &= \frac{\partial}{\partial \varphi_t} \left( e^{-\beta(t)} \frac{\partial X}{\partial \eta_\tau} \right) = e^{-\beta(t)} \frac{\partial^2 X}{\partial \eta_\tau^2}.\end{aligned}$$

再将上述偏微分代入(3.9)式，有

$$\gamma'(t) \frac{\partial X}{\partial \tau} + \left[ \alpha'(t) + \left( r - q - \frac{1}{2} \delta^2 \right) \frac{n(T-t)}{T} \right] \frac{\partial X}{\partial \eta_\tau}, \quad (3.10)$$

再令

$$\begin{aligned}\gamma'(t) + \frac{1}{2} \delta^2 \left( \frac{n(T-t)}{T} \right)^2 &= 0, \\ \alpha'(t) + \left( r - q - \frac{1}{2} \delta^2 \right) \frac{n(T-t)}{T} &= 0, \\ r + \beta'(t) &= 0.\end{aligned}$$

由终止条件  $\alpha(T) = \beta(T) = \gamma(T) = 0$ ，解得

$$\beta(t) = r(T-t),$$

$$\alpha(t) = \frac{n \left[ r - q - \frac{1}{2} \sigma^2 (1 + \lambda) \right] (T-t)^2}{2T} - \frac{n \sigma^2 (2 - 2^{2H-1}) (T^{2H} - t^{2H})}{2} \\ + \frac{n \sigma^2 H (2 - 2^{2H-1})}{T(2H+1)} (T^{2H+1} - t^{2H+1}).$$

$$\gamma(t) = \frac{n^2 \sigma^2 (1 + \lambda) (T-t)^3}{6T^2} + \frac{n^2 \sigma^2 (2 - 2^{2H-1}) (T^{2H} - t^{2H})}{2} - \frac{2Hn^2 \sigma^2 (2 - 2^{2H-1}) (T^{2H+1} - t^{2H+1})}{T(2H+1)} \\ + \frac{Hn^2 \sigma^2 (2 - 2^{2H-1}) (T^{2H+2} - t^{2H+2})}{2T^2 (H+1)}.$$

则(3.10)式可化为

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 X}{\partial \eta_\tau^2} \\ X(0, \eta_0) = \max \{ e^{\eta_0} - K^n, 0 \}. \end{cases} \quad (3.11)$$

求解(3.11)得到

$$X(\tau, \eta_\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{n \ln K}^{+\infty} (e^y - K^n) e^{-\frac{(y-\eta_\tau)^2}{4\tau}} dy \\ = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{n \ln K}^{+\infty} e^{y-\frac{(y-\eta_\tau)^2}{4\tau}} dy - \frac{K^n}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{n \ln K}^{+\infty} e^{-\frac{(y-\eta_\tau)^2}{4\tau}} dy \\ = I_1 + I_2.$$

由上式可知，只要求出  $I_1$  和  $I_2$ ，即可得到  $X(\tau, \eta_\tau)$ 。下面分别计算  $I_1$  和  $I_2$ 。

首先，计算  $I_1$  如下：

$$I_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{n \ln K}^{+\infty} e^{y-\frac{(y-\eta_\tau)^2}{4\tau}} dy \\ = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} e^{\tau+\eta_\tau} \int_{n \ln K}^{+\infty} e^{-\frac{(y-\eta_\tau-2\tau)^2}{4\tau}} dy \quad \left( \text{令 } \frac{y-\eta_\tau-2\tau}{\sqrt{2\tau}} = t \right) \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\tau+\eta_\tau} \int_{\frac{\eta_\tau+2\tau-n \ln K}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ = e^{\tau+\eta_\tau} N \left( \frac{\eta_\tau + 2\tau - n \ln K}{\sqrt{2\tau}} \right).$$

同理，计算  $I_2$  如下：

$$\begin{aligned}
I_2 &= -\frac{K^n}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{n\ln K}^{+\infty} e^{-\frac{(y-\eta_\tau)^2}{4\tau}} dy \left( \text{令 } \frac{y-\eta_\tau}{\sqrt{2\tau}} = t \right) \\
&= -\frac{K^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\eta_\tau - n\ln K}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\
&= -K^n N\left(\frac{\eta_\tau - n\ln K}{\sqrt{2\tau}}\right).
\end{aligned}$$

综上所述, (3.11)式的解为

$$\begin{aligned}
X(\tau, \eta_\tau) &= e^{\tau+\eta_\tau} N\left(\frac{\eta_\tau + 2\tau - n\ln K}{\sqrt{2\tau}}\right) - K^n N\left(\frac{\eta_\tau - n\ln K}{\sqrt{2\tau}}\right) \\
&= e^{\tau+\eta_\tau} N(d_1) - K^n N(d_2).
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
d_1 &= \frac{\eta_\tau + 2\tau - n\ln K}{\sqrt{2\tau}}, \\
d_2 &= \frac{\eta_\tau - n\ln K}{\sqrt{2\tau}}.
\end{aligned}$$

所以, 由  $U(t, \varphi_t)$  和  $X(\tau, \eta_\tau)$  之间的关系得

$$\begin{aligned}
V_c(t, S_t, G_t) &= U(t, \varphi_t) = e^{-\beta(t)} X(\tau, \eta_\tau) \\
&= e^{-\beta(t)} \left[ e^{\tau+\eta_\tau} N(d_1) - K^n N(d_2) \right].
\end{aligned}$$

证毕。

同理, 对于亚式幂期权看跌期权有如下推论:

**推论 3.2.1** 假设标的资产价格  $S_t$  满足混合高斯跳过程驱动的随机微分方程 (3.1), 则行权价格为  $K$ , 到期日为  $T$  的几何平均亚式幂期权看跌期权在  $t(0 \leq t \leq T)$  时刻的价格  $V_p(t, S_t, G_t)$  为:

$$V_p(t, S_t, G_t) = e^{-\beta(t)} \left[ K^n N(-d_2) - e^{\tau+\eta_\tau} N(-d_1) \right]. \quad (3.12)$$

其中  $\beta(t)$ ,  $\tau$ ,  $\eta_\tau$ ,  $d_1$ ,  $d_2$  与定理 3.2.1 中相同。

### 3.3 敏感性分析

根据定理 3.2.1 和推论 3.2.1 中的几何平均亚式幂期权看涨以及看跌公式进行数值模拟, 讨论定价公式中各参数对于期权价格的影响。对于一份基于由(3.1)式刻画标的资产价格的几何平均亚式幂期权, 考虑当期权定价公式中一些参数给

定的条件下，某一参数的变化对于期权价格的影响，即，敏感性分析。

第一，研究跳跃强度  $\lambda$  的大小对于期权价格的影响程度。假设标的资产(股票)当前价格  $S = 100$ 、无风险利率  $r = 0.06$ 、红利率  $q = 0.02$ 、股价波动率  $\sigma = 0.2$ 、 $n = 1$ 、Hurst 指数  $H = 0.75$ 、到期日  $T = 1$ ，当前时刻  $t = 0$ 。图 3.1 分别给出了在泊松过程的不同跳跃强度下，行权价格与看涨以及看跌期权价格之间的关系。从图 3.1 可以看出，对于给定的行权价格，跳跃强度越大，看涨期权和看跌期权的价格越高。由于跳跃强度越大意味着标的资产波动越大，即风险越高，而在金融市场中，高风险与高收益往往等价，因此与标的资产相联系的期权价格也越高。因此，图 3.1 显示的结果与金融市场的理论相符。

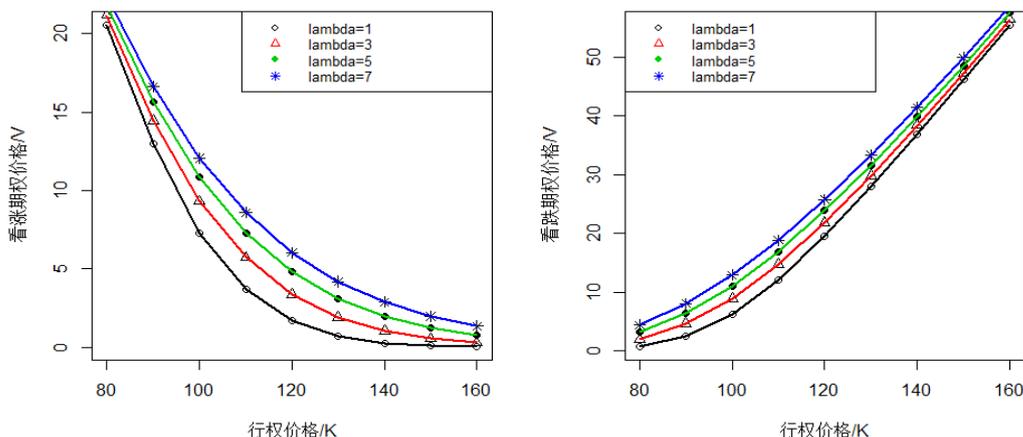


图 3.1 行权价格  $K$ 、跳跃强度  $\lambda$  和亚式期权价格  $V$  的关系

第二，研究 Hurst 指数  $H$  对于期权价格的影响。假设  $S = 100$ 、 $K = 100$ 、 $r = 0.06$ 、 $q = 0.02$ 、 $\lambda = 2$ 、 $n = 1$ 、 $T = 1$ ， $t = 0$ 。图 3.2 分别给出了在不同的 Hurst 指数  $H$  下，波动率与期权价格之间的关系。从图 3.2 可以看出，对于给定的波动率， $H$  越大，看涨、看跌期权的价格越小；对于不同的  $H$ ，随着波动率的增大，看涨、看跌期权价格均上升，但是上升的趋势略有不同。另外，在 Hurst 指数  $H$  给定的情况下，波动率与看涨期权价格具有非线性关系，而与看跌期权价格具有近似线性关系。

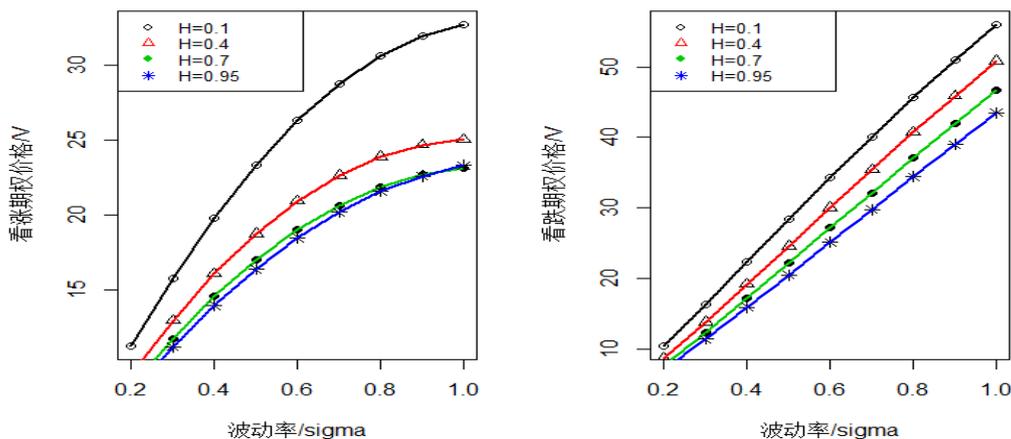


图 3.2 波动率  $\sigma$ 、Hurst 指数  $H$  和亚式期权价格  $V$  的关系

第三，研究 Hurst 指数  $H$  与跳跃强度  $\lambda$  对期权价格的影响。假设  $S = 100$ 、 $K = 100$ 、 $r = 0.06$ 、 $\sigma = 0.2$ 、 $q = 0.02$ 、 $n = 1$ 、 $T = 1$ 、 $t = 0$ 。图 3.3 分别给出了对于不同跳跃强度的大小，随着 Hurst 指数  $H$  的增加，看涨、看跌期权价格的变化情况。从中可以看出，跳跃强度对于期权价格具有极为显著的影响。对于给定的  $H$ ，跳跃强度越大，看涨、看跌期权价格越高；随着  $H$  的增大，对于不同的跳跃强度，看涨、看跌期权价格均下降，且跳跃强度越大，期权价格下降越缓慢。

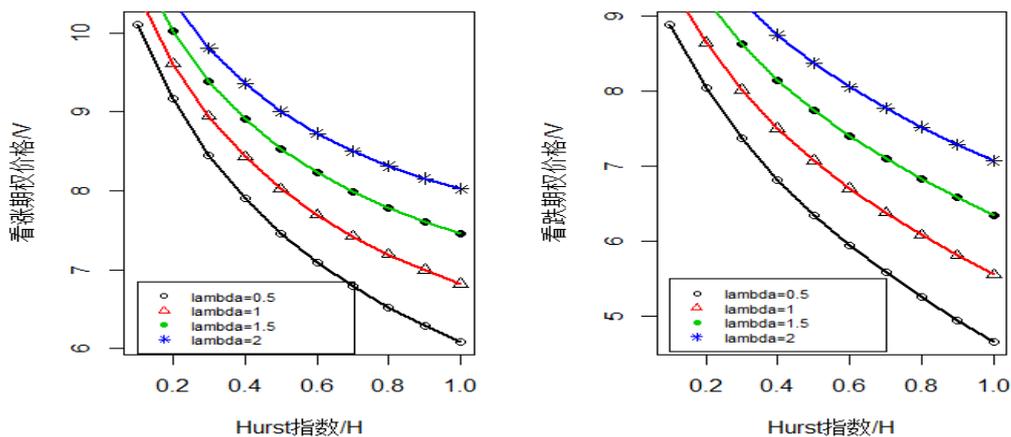


图 3.3 Hurst 指数  $H$ 、跳跃强度  $\lambda$  和亚式期权价格  $V$  的关系

第四，研究  $n$  的变化对于期权价格的影响(以看跌期权为例)。假设  $S = 10$ 、 $K = 10$ 、 $r = 0.06$ 、 $\sigma = 0.02$ 、 $q = 0.02$ 、 $T = 1$ 、 $t = 0$ 。图 3.4 分别给出了跳跃强度与  $n$ 、Hurst 指数  $H$  与  $n$  对看跌期权价格的影响。从图中可以看出，当  $n$  超过某

一阈值时,  $n$  的增大会对期权价格产生显著影响, 这充分体现了幂期权的杠杆效应。

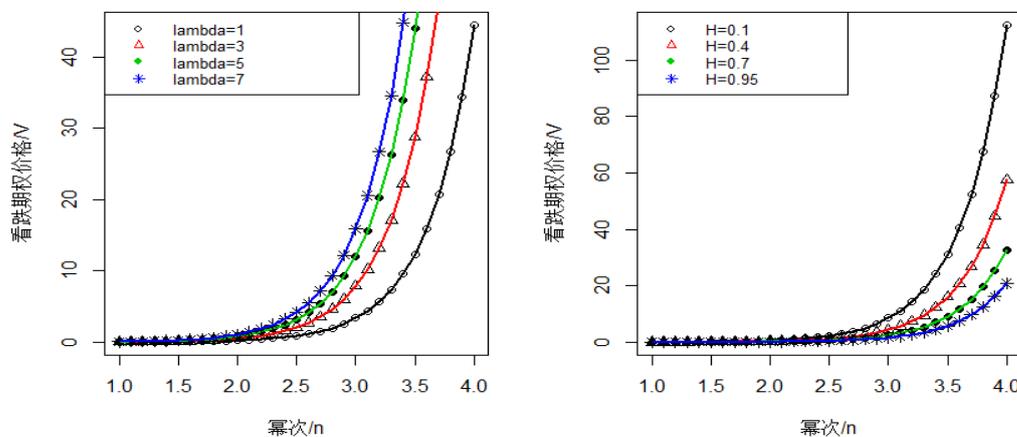


图 3.4 幂次  $n$ 、跳跃强度  $\lambda$ 、Hurst 指数  $H$  和亚式幂看跌期权价格  $V$  的关系

## 3.4 实例分析

### 3.4.1 数据选取

为了验证所采用模型的有效性, 选取京东股票在 2014 年 6 月 3 日至 2015 年 12 月 31 的日收盘价(数据来源于“Wind”), 股价变动如图 3.5 所示。

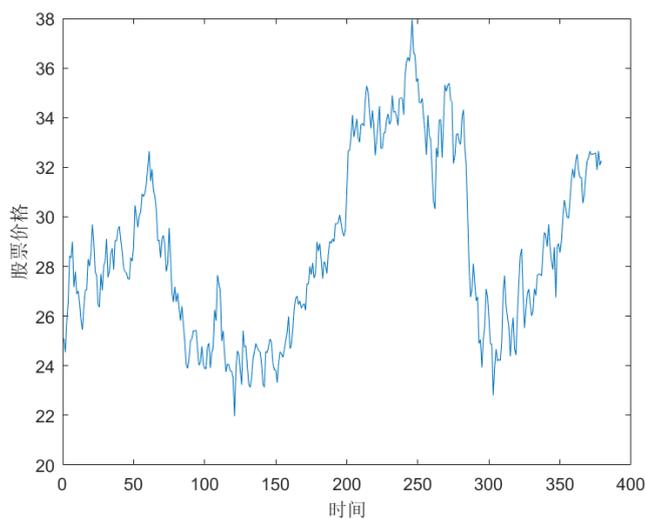


图 3.5 京东股价变动

从图 3.5 可以看出, 京东股价在变动过程中出现了类似于一条竖直线线的下跌,

并且这种下跌幅度大，即具有“跳”的特征。因此，对于股价变动过程中出现的这种情形，可以尝试本文采用的混合高斯跳模型进行描述。

京东公司对数价格直方图如图 3.6 所示。

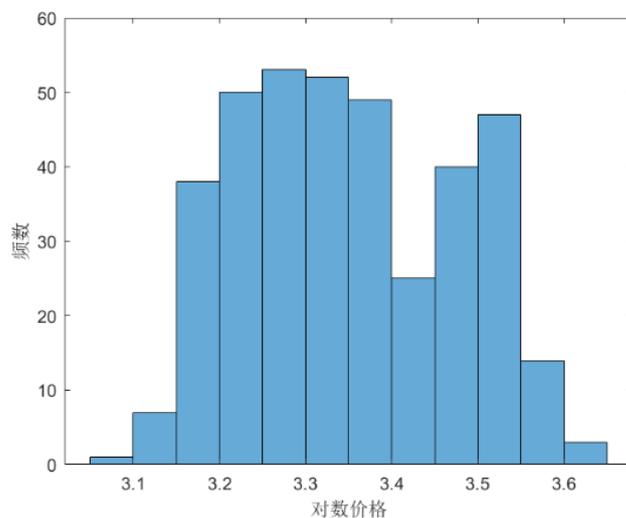


图 3.6 对数价格直方图

从图 3.6 可以明显看出，京东公司股价不具有正态分布特征。对数价格的 Q-Q 图如图 3.7 所示。

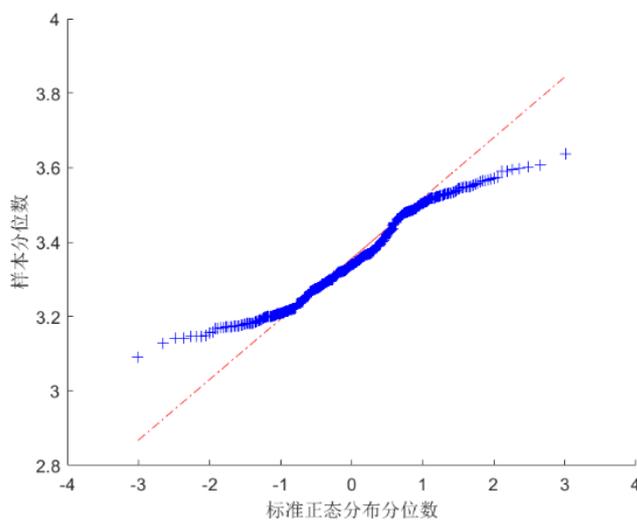


图 3.7 对数价格 Q-Q 图

进一步，对对数价格的分布是否是正态分布进行 Kolmogorov-Smirnov 检验：

$H_0$ ：服从正态分布；

$H_1$ ：不服从正态分布；

通过 MATLAB 软件计算得到,  $p$  值为 0.0157, 因此, 拒绝原假设, 即京东股票对数价格不服从正态分布, 这与 B-S 模型的假设相悖。

### 3.4.2 模拟分析

取京东公司 2014 年 6 月 3 日的收盘价 25.1 元作为初始值  $S_t$ , 对于固定的时间步长  $\Delta t$ , 迭代得到股票价格的离散序列  $\{S_{t+i\Delta t}, i=1,2,\dots,n\}$ , 即得到股票价格的一条模拟路径, 并与真实股价以及经典的 B-S 定价模型所得到的模拟股票价格进行对比, 模拟结果如图 3.8 所示。

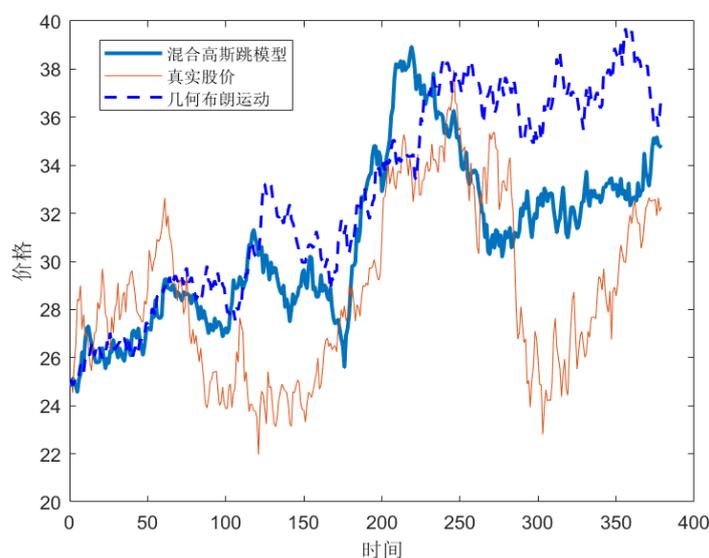


图 3.8 模型有效性分析

不同模型下的描述性统计分析如下:

表 3.1 模型有效性分析

	均值	最大值	最小值	中位数	标准差	极差
收盘价	28.7476	37.9500	21.9700	28.2000	3.6052	15.9800
模拟价	30.8746	38.9324	24.5655	30.8493	3.3802	14.3670
BSM	32.8118	39.6948	24.8482	33.0074	4.2087	14.8466

由图 3.8 以及表 3.1 可知, 采用混合高斯跳模型模拟的股票价格的标准差为 3.3802, 小于 B-S 模型的标准差 4.2087, 并且模拟价的均值与真实收盘价更接近, 因而本文建立的模型用来刻画具有“跳”特征的资产价格的变动是有效的。

## 4 时变混合分数布朗运动下带交易费用的亚式期权定价

### 4.1 亚式期权定价模型

由于 B-S 期权定价模型不能描述金融资产价格常值周期性、长相依性的特征，并且 B-S 期权定价模型没有考虑交易费用。因此，为了与金融市场上的实际情形相符，本节采用考虑了标的资产交易费用的时变混合分数布朗运动模型来描述金融资产价格的变动。

为了得到在离散情形下带有交易成本的几何平均亚式看涨期权的定价公式，需要对金融市场做如下几点基本的假设：

- 1) 标的股票价格  $S_t$  在时刻  $t$  服从下式

$$S_t = S_0 \exp\{\mu T_\alpha(t) + \sigma M_{\alpha,H}(t)\}, \quad S_0 > 0. \quad (4.1)$$

其中  $S_0$ ,  $\mu$  是常数,  $M_{\alpha,H}(t) = Z_\alpha(t) + Z_{\alpha,H}(t)$  为时变混合分数布朗运动。  $\alpha$ ,

$H$  满足  $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ,  $H \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ ,  $2\alpha - \alpha H > 1$ 。

- 2) 在离散的时间点  $\Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots, T$  才能买卖股票。
- 3) 买卖股票时需支付一定的交易成本，即在股价为  $S_t$  时有  $U$  单位的股票买进 ( $U > 0$ ) 或卖出 ( $U < 0$ )，则要产生  $\frac{k}{2}|U|S_t$  的交易费用，其中  $k > 0$  为常数表示交易费率<sup>[34]</sup>。
- 4) 股票无红利支付，所有证券完全可分，允许卖空。
- 5) 期权的价值可通过一个含有  $U(t)$  单位的股票和一单位价值为  $F_t$  的无风险债券的投资组合复制。债券市场由下列微分方程描述

$$dF_t = rF_t dt. \quad (4.2)$$

其中， $r$  为无风险利率。期权的价值必须等于可复制投资组合的价值以减少套利机会。

基于上述假设，建立基于标的资产平均价格为  $J_t = e^{\frac{1}{t} \int_0^t \ln S_\tau d\tau}$  的几何平均亚式看涨期权价格的数学模型。令  $C = C(t, S_t, J_t)$  为几何平均亚式看涨期权在时刻  $t$ 、

股票价格为  $S_t$  时的价格, 且  $C = C(t, S_t, J_t)$  具有连续的偏导数。

**定理 4.1** 假设标的股票价格  $S_t$  服从(4.1)式, 则行权价格为  $K$ 、到期日为  $T$  的几何平均亚式看涨期权在  $t(0 \leq t \leq T)$  时刻的价格  $C = C(t, S_t, J_t)$  满足如下的偏微分方程

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS_t \frac{\partial C}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \delta(t)^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} + \frac{J_t (\ln S_t - \ln J_t)}{t} \frac{\partial C}{\partial J_t} = rC. \quad (4.3)$$

其中

$$\delta(t)^2 = \sigma^2 \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \sigma^2 \left[ \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right]^{2H} \Delta t^{2H-1} + k \sqrt{\frac{2}{\pi} \left( \sigma^2 \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \Delta t^{-1} + \sigma^2 \left( \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right)^{2H} \Delta t^{2H-2} \right)}.$$

$\Gamma(\cdot)$  表示 Gamma 函数, 边界条件为  $C(T, S_T, J_T) = \max\{0, J_T - K\}$ 。

证 股价  $S_t$  在  $[t, t + \Delta t)$  上的变化量为

$$\begin{aligned} \Delta S_t &= S_{t+\Delta t} - S_t = S_t \left( e^{\mu \Delta T_\alpha(t) + \sigma \Delta M_{\alpha, H}(t)} - 1 \right) \\ &= S_t \left( \mu \Delta T_\alpha(t) + \sigma \Delta M_{\alpha, H}(t) + \frac{1}{2} (\mu \Delta T_\alpha(t) + \sigma \Delta M_{\alpha, H}(t))^2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{6} S_t e^{\theta \mu \Delta T_\alpha(t) + \theta \sigma \Delta M_{\alpha, H}(t)} \cdot (\mu \Delta T_\alpha(t) + \sigma \Delta M_{\alpha, H}(t))^3. \end{aligned} \quad (4.4)$$

其中,  $\theta = \theta(t, \Delta t) \in (0, 1)$  是依赖于  $S_t$  的随机变量。由  $M_{\alpha, H}(t)$  的定义得

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} S_t e^{\theta \mu \Delta T_\alpha(t) + \theta \sigma \Delta M_{\alpha, H}(t)} &\leq \frac{1}{6} S_t e^{\mu \Delta T_\alpha(T)} \cdot e^{\sigma |\Delta Z_\alpha(t)|} \cdot e^{\sigma |\Delta Z_{\alpha, H}(t)|} \\ &\leq \frac{1}{6} S_t e^{\mu \Delta T_\alpha(T)} \cdot e^{\sigma |Z_\alpha(t)|} \cdot e^{\sigma |Z_\alpha(t+\Delta t)|} \\ &\quad \times e^{\sigma |Z_{\alpha, H}(t)|} \cdot e^{\sigma |Z_{\alpha, H}(t+\Delta t)|}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

因此, 对于  $n \in \mathbb{N}$

$$E\left(e^{n\mu T_\alpha(T)}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(n\mu)^j}{j!} E(T_\alpha(T))^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(n\mu T^\alpha)^j}{\Gamma(j\alpha + 1)} = E_\alpha(n\mu T^\alpha) < +\infty, \quad (4.6)$$

其中  $E_\alpha(\cdot)$  为 Mittag-leffler 函数<sup>[27]</sup>。

根据引理 2.1, 2.2, 2.3 以及(4.6)式得

$$\Delta t^{2\varepsilon} \cdot \frac{1}{6} S_t e^{\theta \mu \Delta T_\alpha(t) + \theta \sigma \Delta M_{\alpha, H}(t)} = \Delta t^{2\varepsilon} \cdot \frac{1}{6} S_t e^{\theta \mu \Delta T_\alpha(t) + \theta \sigma (\Delta Z_\alpha(t) + \Delta Z_{\alpha, H}(t))} = o(\Delta t^\varepsilon), \quad (4.7)$$

由(4.4)-(4.7)式得

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{6} S_t e^{\theta \mu \Delta T_\alpha(t) + \theta \sigma \Delta M_{\alpha, H}(t)} \cdot \left( \mu \Delta T_\alpha(t) + \sigma \Delta M_{\alpha, H}(t) \right)^3 \\
&= \frac{1}{6} S_t e^{\theta \mu \Delta T_\alpha(t) + \theta \sigma (\Delta Z_\alpha(t) + \Delta Z_{\alpha, H}(t))} \cdot \left( \mu \Delta T_\alpha(t) + \sigma (\Delta Z_\alpha(t) + \Delta Z_{\alpha, H}(t)) \right)^3 \\
&= \Delta t^{-2\varepsilon} \cdot o(\Delta t^\varepsilon) \cdot \left( o(\Delta t^{\alpha-\varepsilon}) + o(\Delta t^{\alpha/2-\varepsilon}) + o(\Delta t^{\alpha H-\varepsilon}) \right)^3 \\
&= o\left( \Delta t^{\frac{3\alpha}{2}-4\varepsilon} \right) = o(\Delta t).
\end{aligned} \tag{4.8}$$

那么

$$\begin{aligned}
\Delta S_t &= \mu S_t \Delta T_\alpha(t) + \sigma S_t (\Delta Z_\alpha(t) + \Delta Z_{\alpha, H}(t)) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t \left( (\Delta Z_\alpha(t))^2 + (\Delta Z_{\alpha, H}(t))^2 \right) + o(\Delta t).
\end{aligned} \tag{4.9}$$

对期权价格  $C = C(t, S_t, J_t)$  的变化量作 Taylor 展开, 得

$$\begin{aligned}
\Delta C(t, S_t, J_t) &= \frac{\partial C}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} \Delta t^2 + \frac{\partial C}{\partial J_t} \Delta J_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial J_t^2} \Delta J_t^2 + \frac{\partial C}{\partial S_t} \Delta S_t \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \Delta S_t^2 + o\left( \Delta t^{\frac{\alpha}{2} + \alpha H - \varepsilon} \right) \\
&= \frac{\partial C}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial C}{\partial J_t} \Delta J_t + \frac{\partial C}{\partial S_t} \Delta S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \Delta S_t^2 + o(\Delta t) \\
&= \frac{\partial C}{\partial S_t} \left( \mu S_t \Delta T_\alpha(t) + \sigma S_t (\Delta Z_\alpha(t) + \Delta Z_{\alpha, H}(t)) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t \left( (\Delta Z_\alpha(t))^2 + (\Delta Z_{\alpha, H}(t))^2 \right) \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \left( \sigma^2 S_t^2 (\Delta Z_\alpha(t)^2 + \Delta Z_{\alpha, H}(t)^2) \right) + \frac{\partial C}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial C}{\partial J_t} \Delta J_t + o(\Delta t).
\end{aligned} \tag{4.10}$$

由(4.6)式、文献[21], 可以验证  $\frac{\partial^3 C}{\partial S_t^3}$ ,  $\frac{\partial^2 C}{\partial C \partial t}$ ,  $\frac{\partial^2 C}{\partial S_t \partial J_t}$  是  $o\left( \Delta t^{\frac{1}{2}(1-H\alpha)-\varepsilon} \right)$ , 因此

$$\Delta \left( \frac{\partial C}{\partial S_t} \right) = \frac{\partial^2 C}{\partial S_t \partial t} \Delta t + \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \Delta S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 C}{\partial S_t^3} \Delta S_t^2 + \frac{\partial^2 C}{\partial S_t \partial J_t} \Delta J_t + o(\Delta t), \tag{4.11}$$

$$\left| \Delta \left( \frac{\partial C}{\partial S_t} \right) \right|_{S_{t+\Delta t}} = S_t^2 \left| \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \right| \left| \sigma (\Delta Z_\alpha(t) + \Delta Z_{\alpha, H}(t)) \right| + o(\Delta t). \tag{4.12}$$

由假设 3) 以及假设 5), 投资组合  $\Pi_t$  在  $[t, t + \Delta t]$  上的价值改变量为

$$\begin{aligned}
\Delta \Pi_t &= U_t \Delta S_t + \Delta F_t - \frac{k}{2} |\Delta U_t|_{S_{t+\Delta t}} \\
&= U_t \Delta S_t + r F_t \Delta t - \frac{k}{2} |\Delta U_t|_{S_{t+\Delta t}} + o(\Delta t).
\end{aligned} \tag{4.13}$$

$U_t$  在  $[t, t + \Delta t)$  上是固定的常数。

由假设 2) 以及假设 5),  $C(t, S_t, J_t)$  在时间点  $\Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots, T$  上等于投资组合的价值<sup>[34]</sup>, 即

$$C(t, S_t, J_t) = U_t S_t + F_t, \quad (4.14)$$

取  $U_t = \frac{\partial C}{\partial S_t}$ , 由(4.12)-(4.14)式得

$$\begin{aligned} \Delta \Pi &= \frac{\partial C}{\partial S_t} \left[ \mu S_t \Delta T_\alpha(t) + \sigma S_t (\Delta Z_\alpha(t) + \Delta Z_{\alpha, H}(t)) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t \left( (\Delta Z_\alpha(t))^2 + (\Delta Z_{\alpha, H}(t))^2 \right) \right] \\ &\quad + r F_t \Delta t - \frac{k}{2} \Delta \left| \frac{\partial C}{\partial S_t} \right| S_{t+\Delta t} + o(\Delta t) \\ &= \frac{\partial C}{\partial S_t} \left[ \mu S_t \Delta T_\alpha(t) + \sigma S_t (\Delta Z_\alpha(t) + \Delta Z_{\alpha, H}(t)) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t \left( (\Delta Z_\alpha(t))^2 + (\Delta Z_{\alpha, H}(t))^2 \right) \right] \\ &\quad + r F_t \Delta t - \frac{k}{2} S_t^2 \left| \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \right| \left| \sigma (\Delta Z_\alpha(t) + \Delta Z_{\alpha, H}(t)) \right| + o(\Delta t). \end{aligned} \quad (4.15)$$

根据(4.10)式、(4.15)式得

$$\begin{aligned} \Delta \Pi - \Delta C &= \left( rC - rS_t \frac{\partial C}{\partial S_t} - \frac{\partial C}{\partial t} - \frac{\partial C}{\partial J_t} \cdot \frac{dJ_t}{dt} \right) \Delta t \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \left( \sigma^2 S_t^2 (\Delta Z_\alpha(t)^2 + \Delta Z_{\alpha, H}(t)^2) \right) \\ &\quad - \frac{k}{2} S_t^2 \left| \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \right| \left| \sigma (\Delta Z_\alpha(t) + \Delta Z_{\alpha, H}(t)) \right| + o(\Delta t). \end{aligned} \quad (4.16)$$

由(4.16)式以及假设 5) 得

$$\begin{aligned} E(\Delta \Pi - \Delta C) &= \left( rC - rS_t \frac{\partial C}{\partial S_t} - \frac{\partial C}{\partial t} - \frac{\partial C}{\partial J_t} \cdot \frac{dJ_t}{dt} \right) \Delta t \\ &\quad - \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \left( \sigma^2 S_t^2 E(\Delta Z_\alpha(t)^2 + \Delta Z_{\alpha, H}(t)^2) \right) \Delta t^{-1} \right] \Delta t \\ &\quad - \left[ \frac{k}{2} \Delta t^{-1} S_t^2 \left| \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \right| E \left| \sigma (\Delta Z_\alpha(t) + \Delta Z_{\alpha, H}(t)) \right| \right] \Delta t + o(\Delta t) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

根据引理 2.4 可得

$$\begin{aligned}
rC &= rS_t \frac{\partial C}{\partial S_t} + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial J_t} \cdot \frac{dJ_t}{dt} \\
&+ \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \left[ \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right]^{2H} \Delta t^{2H-1} \\
&+ \frac{k}{2} S_t^2 \left| \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \right| \sqrt{\frac{2}{\pi} \left( \sigma^2 \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \Delta t^{-1} + \sigma^2 \left( \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right)^{2H} \Delta t^{2H-2} \right)}.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

对于没有交易成本的普通欧式看涨期权，总有  $\frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} > 0$ 。对于几何平均亚式看涨期权，也做同样的假定。令

$$\delta(t)^2 = \sigma^2 \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \sigma^2 \left[ \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right]^{2H} \Delta t^{2H-1} + k \sqrt{\frac{2}{\pi} \left( \sigma^2 \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \Delta t^{-1} + \sigma^2 \left( \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right)^{2H} \Delta t^{2H-2} \right)},$$

从而

$$rC = rS_t \frac{\partial C}{\partial S_t} + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial J_t} \cdot \frac{dJ_t}{dt} + \frac{1}{2} \delta(t)^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2}, \tag{4.19}$$

又因  $\frac{dJ_t}{dt} = \frac{J_t (\ln S_t - \ln J_t)}{t}$ ，代入(4.19)式可得

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS_t \frac{\partial C}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \delta(t)^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} + \frac{J_t (\ln S_t - \ln J_t)}{t} \frac{\partial C}{\partial J_t} = rC.$$

证毕。

## 4.2 模型求解

**定理 4.2.1** 假设标的资产价格  $S_t$  由(4.1)式刻画，则行权价格为  $K$ 、到期日为  $T$  的几何平均亚式看涨期权在  $t(0 \leq t \leq T)$  时刻的价格  $C(t, S_t, J_t)$  为：

$$C(t, S_t, J_t) = \left( J_t^t S_t^{T-t} \right)^{\frac{1}{T}} e^{\left( \theta + \frac{\omega^2}{2} - r \right) (T-t)} N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2). \tag{4.20}$$

其中

$$d_1 = \frac{\frac{1}{T} \ln \frac{J_t^t S_t^{T-t}}{K^T} + (\theta + \omega^2)(T-t)}{\omega \sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = d_1 - \omega \sqrt{T-t},$$

$$\theta = \frac{1}{T-t} \int_t^T \left( r - \frac{\delta(t)^2}{2} \frac{T-\tau}{T} \right) d\tau,$$

$$\omega^2 = \frac{1}{T-t} \int_t^T \delta(t)^2 \left( \frac{T-\tau}{T} \right)^2 d\tau.$$

证 类似于参考文献[28]中的方法, 令

$$\varphi_t = \frac{t \ln J_t + (T-t) \ln S_t}{T}, \quad (4.21)$$

$$C(t, S_t, J_t) = U(t, \varphi_t). \quad (4.22)$$

则

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial \varphi_t} \frac{\ln J_t - \ln S_t}{T},$$

$$\frac{\partial C}{\partial J_t} = \frac{\partial U}{\partial \varphi_t} \frac{t}{T J_t},$$

$$\frac{\partial C}{\partial S_t} = \frac{\partial U}{\partial \varphi_t} \frac{(T-t)}{T S_t},$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} = \left[ \frac{T-t}{T S_t} \right]^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_t^2} - \frac{(T-t)}{T S_t^2} \frac{\partial U}{\partial \varphi_t}.$$

将上述变换代入偏微分方程(4.3)式, 转化为求解在区域  $\{\varphi_t \in \mathbf{R}, 0 \leq t \leq T\}$  上的

Cauchy 问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + \left( r - \frac{1}{2} \delta(t)^2 \right) \frac{(T-t)}{T} \frac{\partial U}{\partial \varphi_t} + \frac{1}{2} \delta(t)^2 \left[ \frac{T-t}{T} \right]^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_t^2} = rU \\ U(T, \varphi_T) = \max \{ e^{\varphi_T} - K, 0 \}. \end{cases} \quad (4.23)$$

令

$$\begin{cases} \tau = \gamma(t) \\ \eta_\tau = \varphi_t + \alpha(t) \\ X(\tau, \eta_\tau) = U(t, \varphi_t) e^{\beta(t)}. \end{cases} \quad (4.24)$$

其中  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$ ,  $\gamma(t)$  为待定函数, 则

$$\frac{\partial U}{\partial t} = e^{-\beta(t)} \left[ \frac{\partial X}{\partial \tau} \gamma'(t) - \beta'(t) X + \frac{\partial X}{\partial \eta_\tau} \alpha'(t) \right], \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi_t} = e^{-\beta(t)} \frac{\partial X}{\partial \eta_\tau}, \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_t^2} = \frac{\partial}{\partial \varphi_t} \left( e^{-\beta(t)} \frac{\partial X}{\partial \eta_\tau} \right) = e^{-\beta(t)} \frac{\partial^2 X}{\partial \eta_\tau^2}. \quad (4.27)$$

将(4.25)-(4.27)式代入(4.23)式得

$$\gamma'(t) \frac{\partial X}{\partial \tau} + \left[ \alpha'(t) + \left( r - \frac{1}{2} \delta(t)^2 \right) \frac{T-t}{T} \right] \frac{\partial X}{\partial \eta_\tau} + \frac{1}{2} \delta(t)^2 \left( \frac{T-t}{T} \right)^2 \frac{\partial^2 X}{\partial \eta_\tau^2} - (r + \beta'(t)) X = 0.$$

再令

$$\begin{aligned} \gamma'(t) + \frac{\delta(t)^2}{\sigma^2} \left( \frac{T-t}{T} \right)^2 &= 0, \\ \alpha'(t) + \left( r - \frac{1}{2} \delta(t)^2 \right) \frac{T-t}{T} &= 0, \\ r + \beta'(t) &= 0. \end{aligned}$$

结合终止条件  $\alpha(T) = \beta(T) = \gamma(T) = 0$ , 解得

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \int_t^T \left( r - \frac{\delta(\tau)^2}{2} \right) \left( \frac{T-\tau}{T} \right) d\tau, \\ \beta(t) &= r(T-t), \\ \gamma(t) &= \int_t^T \frac{\delta(\tau)^2}{\sigma^2} \left( \frac{T-\tau}{T} \right)^2 d\tau. \end{aligned}$$

经过上述变换(4.24)-(4.27)式, (4.23)式化简整理如下:

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 X}{\partial \eta_\tau^2} \\ X(0, \eta_0) = \max \{ e^{\eta_0} - K, 0 \}. \end{cases}$$

可求出其解<sup>[28,40]</sup>:

$$X(\tau, \eta_\tau) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^y - K)^+ e^{-\frac{(y-\eta_\tau)^2}{2\sigma^2\tau}} dy.$$

由变换(4.21)式、(4.22)式以及(4.24)式, 回到原变量以及函数  $C(t, S_t, J_t)$ , 可得

$$\begin{aligned} X(\tau, \eta_\tau) &= e^{\eta_\tau + \frac{\sigma^2\tau}{2}} N\left( \frac{\eta_\tau + \sigma^2\tau - \ln K}{\sigma\sqrt{\tau}} \right) - KN \left( \frac{\eta_\tau - \ln K}{\sigma\sqrt{\tau}} \right) \\ &= \left( J_t^1 S_t^{T-t} \right)^{\frac{1}{T}} e^{\left( \theta + \frac{\omega^2}{2} \right) (T-t)} N(d_1) - KN(d_2). \\ C(t, S_t, J_t) &= \left( J_t^1 S_t^{T-t} \right)^{\frac{1}{T}} e^{\left( \theta + \frac{\omega^2}{2} - r \right) (T-t)} N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2). \end{aligned}$$

其中

$$d_1 = \frac{\frac{1}{T} \ln \frac{J_t^t S_t^{T-t}}{K^T} + (\theta + \omega^2)(T-t)}{\omega \sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = d_1 - \omega \sqrt{T-t},$$

$$\theta = \frac{1}{T-t} \int_t^T \left( r - \frac{\delta(t)^2}{2} \frac{T-\tau}{T} \right) d\tau,$$

$$\omega^2 = \frac{1}{T-t} \int_t^T \delta(t)^2 \left( \frac{T-\tau}{T} \right)^2 d\tau.$$

证毕。

类似地，对于几何平均亚式看跌期权可得以下推论。

**推论 4.2.2** 假设标的资产价格  $S_t$  由(4.1)式刻画，则行权价格为  $K$ 、到期日为  $T$  的几何平均亚式看跌期权在  $t(0 \leq t \leq T)$  时刻的价格  $P(t, S_t, J_t)$  为：

$$P(t, S_t, J_t) = Ke^{-r(T-t)} N(-d_2) - \left( J_t^t S_t^{T-t} \right)^{\frac{1}{T}} e^{\left( \theta + \frac{\omega^2}{2} - r \right) (T-t)} N(-d_1). \quad (4.28)$$

其中  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $\theta$ ,  $\omega$  与定理 4.2.1 相同。

**证** 由边界条件  $P(T, S_T, J_T) = \max\{0, K - J_T\}$ ，运用定理 4.2.1 中的方法求解方程(4.28)可得看跌期权价格  $P(T, S_T, J_T)$ 。

### 4.3 数值模拟

对于亚式期权的定价，近年来取得了研究成果。例如：分数布朗运动下的定价模型<sup>[29]</sup>、混合分数布朗运动下的定价模型<sup>[30]</sup>等。结合本文在时变混合分数布朗运动下考虑了交易成本的亚式期权定价模型，下面仅对不同定价模型下得到的亚式看涨期权价格作一比较。

取无风险利率  $r=0.05$ 、红利率  $q=0$ 、波动率  $\sigma=0.25$ 、Hurst 指数  $H=0.75$ 、到期日  $T=1$ 、股票当前价格  $S=100$ 。在本文的定价模型中，取  $\alpha=0.8$ 、交易费率  $k=0.01$ 、交易时间点之间的长度  $\Delta t=0.1$ 。用  $K$  表示行权价格、 $C_{GBM}$  表示几何布朗运动下几何平均亚式看涨期权的价格、 $C_{FBM}$  表示分数布朗运动下几何平均亚式看涨期权的价格、 $C_{MFBM}$  表示混合分数布朗运

动下几何平均亚式看涨期权的价格、 $C_{TC-MFBM}$  表示时变混合布朗运动下带交易成本的几何平均亚式看涨期权的价格。比较结果如表 4.1 所示。

表 4.1 不同定价模型下亚式期权价格之间的比较

$K$	$C_{GBM}$	$C_{FBM}$	$C_{MFBM}$	$C_{TC-MFBM}$
90	12.818953	12.689548	13.990609	13.192214
91	12.081619	11.928910	13.335705	12.412176
92	11.366589	11.190936	12.699837	11.636384
93	10.674784	10.476815	12.083259	10.864681
94	10.007019	9.787618	11.486168	10.096917
95	9.363990	9.124284	10.908701	9.332946
96	8.746270	8.487611	10.350937	8.572629
97	8.154301	7.878242	9.812900	7.815831
98	7.588394	7.296662	9.294556	7.062422
99	7.048728	6.743191	8.795820	6.312278
100	6.535349	6.217986	8.316557	5.565279

不同模型下的描述性统计分析如表 4.2 所示：

表 4.2 各模型的基本情况统计

	$C_{GBM}$	$C_{FBM}$	$C_{MFBM}$	$C_{TC-MFBM}$
均值	9.489636	9.256528	11.00682	9.351251
最大值	12.81895	12.68955	13.99061	13.19221
最小值	6.535349	6.217986	8.316557	5.565279
中位数	9.36399	9.124284	10.9087	9.332946
标准差	2.089258	2.152659	1.884268	2.529078

定价参数  $\alpha$ 、Hurst 指数  $H$  与看涨期权价格  $C$  之间的关系如图 4.1 所示。其中，无风险利率  $r=0.05$ 、红利率  $q=0$ 、波动率  $\sigma=0.25$ 、Hurst 指数  $H=0.75$ 、到期日  $T=1$ 、股票当前价格  $S=100$ 、行权价格  $K=100$ 、交易费率  $k=0.01$ 、交易时间点之间的长度  $\Delta t=0.1$ 。

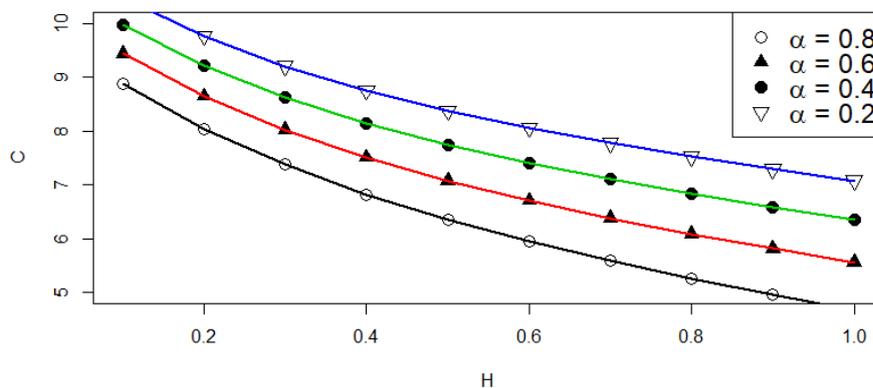


图 4.1  $\alpha$ 、 $H$  与看涨期权价格  $C$  的关系

由表 4.1 可知，与其它亚式期权定价模型给出的价格相比，时变混合分数布朗运动下带有交易成本的定价模型得到的期权价格随着行权价格的升高，其价格具有更快的衰减速度，这与交易成本的累积效应相对应，更低的价格是对交易成本累积的惩罚，与金融市场流动性理论相一致。

图 4.1 显示了对于不同的参数  $\alpha$ ，随着 Hurst 指数  $H$  的增大，期权价格均降低， $\alpha$  越大，所对应的期权价格越小。

## 4.4 实例分析

### 4.4.1 数据选取

本文采用深交所 A 股上市公司万科 2014 年 10 月 8 日至 2016 年 9 月 30 日的收盘价(数据来源于“yahoo”)来验证定价模型(4.1)的有效性，股价变动如图 4.2 所示。

从图 4.2 中可以明显的看到万科股票在一段时间内由于停牌(即,终止交易),其股价没有任何变化,即显示出了类似于“常值周期性”的特征,因此可以考虑用本文采用的模型来描述这种变动。



图 4.2 万科股票收盘价走势

万科股票收益率如图 4.3 所示。

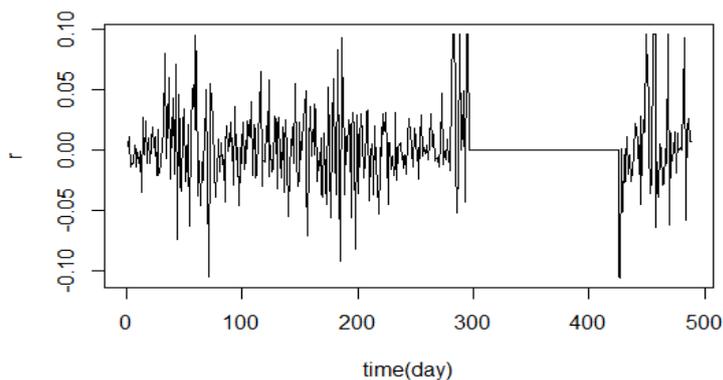


图 4.3 万科股票收益率

收益率的直方图如图 4.4 所示。

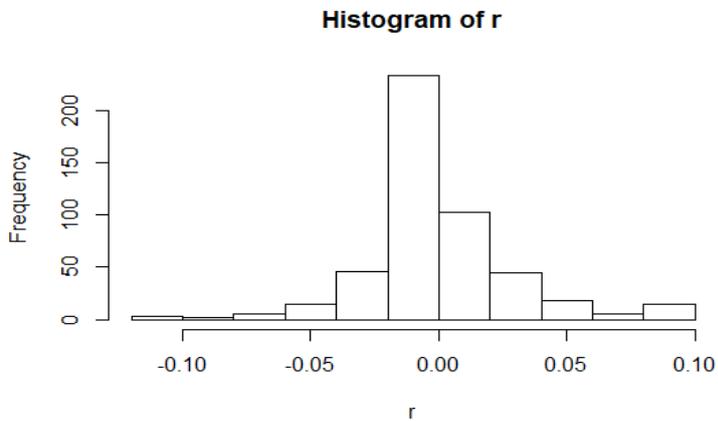


图 4.4 收益率直方图

收益率的 Q-Q 图如图 4.5 所示。

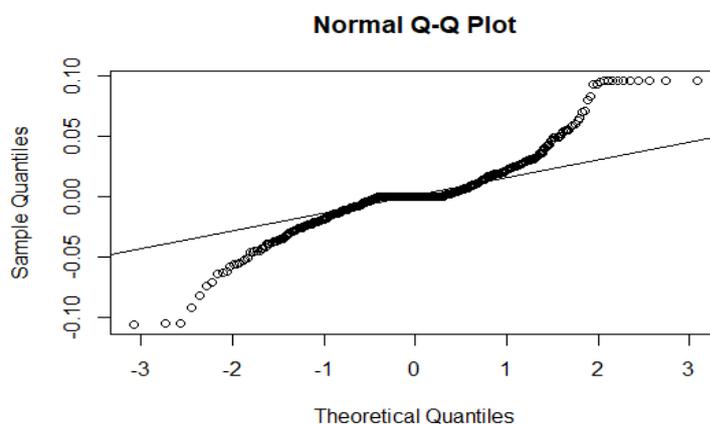


图 4.5 收益率 Q-Q 图

在 B-S 期权定价模型下假定股票价格服从对数正态分布的前提下，股票的收益率也服从正态分布。而从万科股票价格的收益率 Q-Q 图可以看到，收益率并不服从正态分布。进一步，运用 Kolmogorov-Smirnov 检验，R 软件输出结果如下：

One-sample Kolmogorov-Smirnov test

Data: r

D = 0.46196, p-value < 2.2e-16

alternative hypothesis: two-sided

可以进一步确认收益率不服从正态分布。

#### 4.4.2 参数估计

为了验证模型(4.1)能否描述具有常值周期性的资产价格变化，需要对模型(4.1)进行离散化，运用计算机模拟它的路径，并与真实股价数据进行比较。

下面运用历史数据估计股票价格的波动率以及运用  $R/S$  分析法来估计 Hurst 指数  $H$ 。

波动率的估计式如下

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{m-1} \sum_i^m (u_{n-i} - \bar{u})^2}.$$

其中  $\bar{u} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m u_{n-i}$ ,  $u_i = \ln \frac{S_i}{S_{i-1}}$ ,  $S_i$  为第  $i$  天末的收盘价。上式计算的  $\sigma_n$  为股价的

日波动率, 需通过下式

$$\sigma = \sigma_n \times \sqrt{252}.$$

转变为年波动率<sup>[31]</sup>, 其中 252 为一年中交易的天数。计算可得万科股票价格的年波动率为  $\hat{\sigma} = 0.4550934$ 。

下面运用  $R/S$  分析方法估计 Hurst 指数  $H$ <sup>[30]</sup>, 对于股价序列  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,

令  $X_n = \sum_{k=1}^n x_k$  构造统计量

$$Q_n = \frac{R_n}{S_n},$$

其中

$$R_n = \max_{k \leq n} \left( X_k - \frac{k}{n} X_n \right) - \min_{k \leq n} \left( X_k - \frac{k}{n} X_n \right),$$

$$S_n = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 - \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right)^2}.$$

对于大的  $n$  值, 统计量  $Q_n = \frac{R_n}{S_n}$  可用  $cn^H$  进行近似, 即

$$\frac{R_n}{S_n} \sim cn^H.$$

其中  $c$  为某个常数。对上式两端取对数得  $\ln(R_n/S_n) \sim \ln c + H \ln n$ , 因此对于股价数据得到相应的点列  $(\ln n, \ln(R_n/S_n))$ , 运用最小二乘法求出直线  $\hat{a}_n + \hat{b}_n \ln n$ , 直线的斜率  $\hat{b}_n$  即为 Hurst 指数  $H$  的估计值。由股票收盘价序列得 Hurst 指数的估计值为  $\hat{H} = 0.5584205$ 。

#### 4.4.3 模拟结果

取万科公司 2014 年 10 月 8 日的收盘价 9.44 元作为初始值  $S_t$ , 运用 R 语言对(4.1)式进行编程<sup>[15]</sup>, 对于固定的时间步长  $\Delta t$ , 迭代得到股票价格的离散序列  $\{S_{t+i\Delta t}, i=1, 2, \dots, n\}$ , 即得到股票价格的一条模拟路径, 并与真实股价以及经典的

B-S 定价模型所得到的模拟股票价格进行对比，结果如图 4.6 所示。

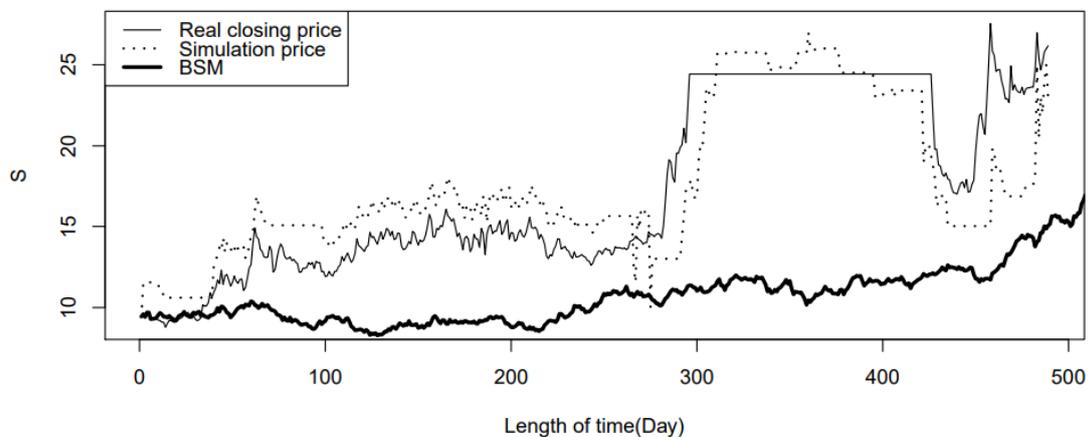


图 4.6 股票收盘价格与模拟价格对比图

模型的误差分析见表 4.3。

表 4.3 误差分析表

	均值	最大值	最小值	中位数	标准差	极差
收盘价	17.41	27.57	8.78	14.67	5.44	18.79
模拟价	17.63	27.00	9.44	16.22	4.55	17.56
BSM	17.57	31.47	8.28	15.63	7.56	23.19

由图 4.6 以及表 4.3 可知，采用时变混合分数布朗运动模型模拟的股票价格的标准差为 4.55，小于股价真实值的标准差 5.44，并且模拟价与收盘价的走势较吻合，因而本文采用的模型在描述具有常值周期性特征的资产价格变动时是有效的。

## 5 总结与展望

### 5.1 研究总结

本文研究结果主要有以下两个方面：

(1) 首先通过假设标的资产价格变动由混合高斯跳过程描述，运用分数型  $Itô$  公式推导出了混合高斯跳过程下的  $Itô$  公式，并运用自融资策略、 $\Delta$  对冲策略以及风险中性原理得到了几何平均亚式幂期权价格所满足的偏微分方程，通过求解偏微分方程，得到几何平均亚式幂期权的看涨、看跌公式。最后通过数值模拟验证了 Hurst 指数  $H$ 、跳跃强度  $\lambda$  以及幂次  $n$  对期权价格有显著影响。基于实例分析，验证了本文建立的定价模型在刻画具有“跳”特征的资产价格变动时具有有效性。

(2) 通过假设标的资产价格变动服从时变混合分数布朗运动，得到了在离散情形下带有交易成本的几何平均亚式看涨、看跌期权的定价公式。基于数值试验，对不同亚式期权定价模型下得到的期权价格进行了比较，定价公式中参数  $\alpha$ 、 $H$  对于期权价格有明显的影响。基于实例分析，验证了本文采用的定价模型在刻画具有常值周期性的资产价格变动时具有有效性。

### 5.2 研究展望

本文所采用的两个模型都只是对 B-S 模型的假设某几个方面的放松，没有考虑到更多金融市场上的实际情形。另外，在亚式期权定价过程中，标的资产平均价格的计算除了采用几何平均外，还有算数平均方法，由于算术平均方法下不能得到精确的解析解，因此在这种方法下的亚式期权定价研究较少。因此，在以后的研究中，可以从以下两个方面进行研究：

- (1) 考虑结合机器学习以及深度学习的方法，比如用期权价格的历史数据预测将来期权的价格，是一项很有意义的研究课题。
- (2) 探索更合理的算法对算数平均方法下的亚式期权定价进行研究。

## 参考文献

- [1] Black F, Scholes M. The pricing of option and corporate liabilities[J]. *Journal of Political Economy*, 1973, 81(3): 637-654.
- [2] Greene M T, Fielitz B D. Long-term dependence in common stock returns[J]. *Journal of Financial Economics*, 1977, 4(3): 339-349.
- [3] Mandelbrot B B. *Fractals and Scaling in Finance: Discontinuity, Concentration, Risk*[M]. New York: Springer, 1997.
- [4] Cheridito P. Arbitrage in fractional Brownian motion models [J]. *Finance and Stochastics*, 2003, 7(4): 533-553.
- [5] Cheridito P. Mixed fractional Brownian motion[J]. *Bernoulli*, 2001,7(6):913–934.
- [6] Sun L. Pricing currency options in the mixed fractional Brownian motion[J]. *Physica A: Statistical Mechanics & its Applications*, 2013, 392(16): 3441-3458.
- [7] Shokrollahi F, Kiliçman A. Pricing currency option in a mixed fractional Brownian motion with jumps environment [J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014, 13: 92-99.
- [8] Fusai G, Meucci A. Pricing discretely monitored Asian options under Lévy processes [J]. *Journal of Banking & Finance*, 2008, 32(10): 2076-2088.
- [9] Chung S F, Wong H Y. Analytical pricing of discrete arithmetic Asian options with mean reversion and jumps [J]. *Journal of Banking & Finance*, 2014, 44: 130-140.
- [10] Wang X C. Pricing power exchange options with correlated jump risk[J]. *Finance Research Letters*, 2016, 19: 90-97.
- [11] Prakasa Rao B L S. Pricing geometric Asian power options under mixed fractional Brownian motion environment [J]. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2016, 446(15): 92-99.
- [12] Peng B. Pricing Asian power options under jump-fraction process [J]. *Journal of Economics, Finance and Administrative Science*, 2012, 17(33): 2-9.
- [13] Tudor C. Some properties of the sub-fractional Brownian motion [J]. *Stochastics*, 2007, 79(5): 431-448.
- [14] 肖炜麟, 张卫国, 徐维军. 次分数布朗运动下带交易费用的备兑权证定价[J]. *中国管理科学*, 2014, 22(5): 1-7.
- [15] 程志勇, 郭精军, 张亚芳. 次分数布朗运动下支付红利的欧式期权定价[J].

- 应用概率统计, 2018, 34(1): 37-48.
- [16] El-nouty C, Zili M. On the sub-mixed fractional Brownian motion[J]. *Applied Mathematics: A Journal of Chinese Universities(Series B)*, 2015, 30(1): 23-35.
- [17] Zhang W G, Li Z, Liu Y J. Analytical pricing of geometric Asian power options on an underlying driven by a mixed fractional Brownian motion [J]. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2018, 490: 402-418.
- [18] 耿延静, 周圣武. 混合分数跳-扩散模型下的亚式期权定价[J]. *华东师范大学学报(自然科学版)*, 2017, (3): 29-38.
- [19] 高新羽, 刘丽霞. O-U 过程下具有不确定执行价格的领子期权定价[J]. *西南大学学报(自然科学版)*, 2019, 41(7): 70-75.
- [20] Magdziarz M. Black-Scholes formula in subdiffusive regime[J], *Journal of Statistical Physics*, 2009, 136:553-564.
- [21] Gu H, Liang J R, Zhang Y X. Time-changed geometric fractional Brownian motion and option pricing with transaction costs[J]. *Physica A*, 2012, 391:3971-3977.
- [22] Guo Z D, Yuan H J. Pricing European option under the time-changed mixed Brownian-fractional Brownian model[J]. *Physica A*, 2014, 406:73-79.
- [23] Shokrollahi F, Kiliçman A, Magdziarz M. Pricing European options and currency options by time changed mixed fractional Brownian motion with transaction costs[J]. *International Journal of Financial Engineering*, 2016, (3):1-22.
- [24] Shokrollahi F. The evaluation of geometric Asian power options under time changed mixed fractional Brownian motion[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2018, 344:716-724.
- [25] Bertoin J. *Lévy Processes*[M]. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [26] Sato K I. *Processes and Infinitely Divisible Distributions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [27] Samko S G, Kilbas A A, Marichev D I, *Integrals and Derivatives of the Fractional Order and Some of their Applications*[M]. Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 1993.
- [28] 姜礼尚. 期权定价的模型和方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.
- [29] Mao Z J, Liang Z A. Evaluation of geometric Asian power options under fractional Brownian motion[J]. *Journal of Mathematical Finance*, 2014, (4):1-9.
- [30] 施利亚耶夫著, 史树中译. 随即金融数学基础(第一卷)[M]. 北京: 高等教育出

- 出版社,2016.
- [31]约翰赫尔著,王勇,索吾林译. 期权、期货及其他衍生产品[M]. 北京: 机械工业出版社, 2019.
- [32]郑振龙, 陈蓉. 金融工程[M]. 北京: 高等教育出版社, 2015.
- [33]毛蒨萍. 混合分数跳-扩散模型下亚式幂期权的定价[D]. 武汉: 华中师范大学,2019.
- [34]张慈. 时变布朗运动下带交易费用的亚式期权定价[D]. 合肥: 中国矿业大学,2015.
- [35]张亚芳. 次分数布朗运动环境下的欧式期权定价研究[D]. 兰州: 兰州财经大学,2017.
- [36]郭精军, 程志勇. 混合高斯模型下带红利的永久美式期权定价[J].应用数学,2018,31(2):250-256.
- [37]Önalán Ö. Time-changed generalized mixed fractional Brownian motion and application to arithmetic average Asian option pricing[J]. International Journal of Applied Mathematical Research, 2017, 6(3):85:92.
- [38]Fang Y, Shu H, Xiu K et al. The Asian option pricing when discrete dividends follow a Markov-Modulated model[J]. Open Journal of Statistics, 2017, 7(6):1067-1080.
- [39]Wang W, Cai G H et al. Pricing geometric Asian power options in the sub-fractional Brownian motion environment[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2021, 145:1-6.
- [40]周蜀林. 偏微分方程[M]. 北京: 北京大学出版社, 2018.
- [41]Shi Q H, Yang X P. Pricing Asian options in a stochastic volatility model with jumps[J]. Applied Mathematics and Computation, 2014, 228:411-422.
- [42]Wang X C. Pricing options on the maximum or minimum of multi-assets under jump-diffusion processes[J]. International Review of Economics and Finance, 2020, 20:16-26.
- [43]郭精军, 张亚芳. 次分数 Vasicek 随机利率模型下的欧式期权定价[J]. 应用数学, 2017, 30(3):503-511.
- [44]Xu F, Li R. The pricing formulas of compound option based on the sub-fractional Brownian motion model[J]. Journal of Physics: Conference Series, 2018, 1053(1):1-5.
- [45]Ivanov R V, Ano K. Option pricing in time-changed Lévy models with compound

- Poisson jumps[J]. 2020, 1053:1-5.
- [46] Shiraya K, Wang C, Yamazaki A. A general control variate method for time-changed Lévy processes: An application to option pricing. CARF Working Paper, 2021, 1-25.

## 附录

### 附录 1 混合高斯跳模型下期权敏感性分析 R 代码

```

# 行权价格 K、跳跃强度 lambda 和亚式期权价格 V 的关系
par(mfrow=c(1,2))
T <- 1
t <- 0
H <- 0.75
n <- 1
sigma <- 0.2
lambda <- 1
St <- 100
r <- 0.06
q <- 0.02
K <- seq(80,160,10)
Gt <- 1
beta_t <- r * (T-t)
x <- 2-2^(2*H-1)
Tt0 <- T^(2*H) - t^(2*H)
Tt1 <- T^(2*H+1) - t^(2*H+1)
Tt2 <- T^(2*H+2) - t^(2*H+2)
tao <- (n^2 * sigma^2 *(1+lambda)*(T-t)^3)/(6*T^2)+
  (n^2 * sigma^2 * x * Tt0)/2 -
  (2*H*n^2 * sigma^2 * x * Tt1)/(T*(2*H+1)) +
  (H*n^2 * sigma^2 * x * Tt2)/(2*T^2*(H+1))
itatao <- (t*log(Gt)+(T-t)*n*log(St))/T +
  (n*(r-q-0.5*sigma^2 * (1+lambda))*(T-t)^2)/(2*T) -
  (n * sigma^2 * x * Tt0)/2 +
  (n * sigma^2 * H * x * Tt1)/(T * (2*H+1))
d1 <- (itatao+2*tao-n*log(K))/sqrt(2*tao)
d2 <- (itatao - n*log(K))/sqrt(2*tao)
VC <- exp(-beta_t)*(exp(tao+itatao)*pnorm(d1)-K^n * pnorm(d2))
plot(K,VC,xlab = "行权价格/K",ylab = "看涨期权价格/V")
lines(K,VC,lwd=2,col=1)
T <- 1
t <- 0
H <- 0.75
n <- 1
sigma <- 0.2

```

```

lambda <- 3
St <- 100
r <- 0.06
q <- 0.02
K <- seq(80,160,10)
Gt <- 1
beta_t <- r * (T-t)
x <- 2-2^(2*H-1)
Tt0 <- T^(2*H) - t^(2*H)
Tt1 <- T^(2*H+1) - t^(2*H+1)
Tt2 <- T^(2*H+2) - t^(2*H+2)
tao <- (n^2 * sigma^2 *(1+lambda)*(T-t)^3)/(6*T^2)+
  (n^2 * sigma^2 * x * Tt0)/2 -
  (2*H*n^2 * sigma^2 * x * Tt1)/(T*(2*H+1)) +
  (H*n^2 * sigma^2 *x * Tt2)/(2*T^2*(H+1))
itatao <- (t*log(Gt)+(T-t)*n*log(St))/T +
  (n*(r-q-0.5*sigma^2 * (1+lambda))*(T-t)^2)/(2*T) -
  (n * sigma^2 * x * Tt0)/2 +
  (n * sigma^2 * H * x * Tt1)/(T * (2*H+1))
d1 <- (itatao+2*tao-n*log(K))/sqrt(2*tao)
d2 <- (itatao - n*log(K))/sqrt(2*tao)
VC <- exp(-beta_t)*(exp(tao+itatao)*pnorm(d1)-K^n * pnorm(d2))
points(K,VC,pch = 2)
lines(K,VC,lwd=2,col=2)
T <- 1
t <- 0
H <- 0.75
n <- 1
sigma <- 0.2
lambda <- 5
St <- 100
r <- 0.06
q <- 0.02
K <- seq(80,160,10)
Gt <- 1
beta_t <- r * (T-t)
x <- 2-2^(2*H-1)
Tt0 <- T^(2*H) - t^(2*H)
Tt1 <- T^(2*H+1) - t^(2*H+1)
Tt2 <- T^(2*H+2) - t^(2*H+2)
tao <- (n^2 * sigma^2 *(1+lambda)*(T-t)^3)/(6*T^2)+
  (n^2 * sigma^2 * x * Tt0)/2 -
  (2*H*n^2 * sigma^2 * x * Tt1)/(T*(2*H+1)) +
  (H*n^2 * sigma^2 *x * Tt2)/(2*T^2*(H+1))

```

```

itatao <- (t*log(Gt)+(T-t)*n*log(St))/T +
  (n*(r-q-0.5*sigma^2 * (1+lambda))*(T-t)^2)/(2*T) -
  (n * sigma^2 * x * Tt0)/2 +
  (n * sigma^2 * H * x * Tt1)/(T * (2*H+1))
d1 <- (itatao+2*tao-n*log(K))/sqrt(2*tao)
d2 <- (itatao - n*log(K))/sqrt(2*tao)
VC <- exp(-beta_t)*(exp(tao+itatao)*pnorm(d1)-K^n * pnorm(d2))
points(K,VC,pch = 19)
lines(K,VC,lwd=2,col=3)

# 波动率 sigma、Hurst 指数 H 和亚式期权价格 V 的关系
par(mfrow=c(1,2))

T <- 1
t <- 0
H <- 0.1
n <- 1
sigma <- seq(0.2,1,0.1)
lambda <- 2
St <- 100
r <- 0.06
q <- 0.02
K <- 100
Gt <- 1
beta_t <- r * (T-t)
x <- 2-2^(2*H-1)
Tt0 <- T^(2*H) - t^(2*H)
Tt1 <- T^(2*H+1) - t^(2*H+1)
Tt2 <- T^(2*H+2) - t^(2*H+2)
tao <- (n^2 * sigma^2 *(1+lambda)*(T-t)^3)/(6*T^2)+
  (n^2 * sigma^2 * x * Tt0)/2 -
  (2*H*n^2 * sigma^2 * x * Tt1)/(T*(2*H+1)) +
  (H*n^2 * sigma^2 * x * Tt2)/(2*T^2*(H+1))
itatao <- (t*log(Gt)+(T-t)*n*log(St))/T +
  (n*(r-q-0.5*sigma^2 * (1+lambda))*(T-t)^2)/(2*T) -
  (n * sigma^2 * x * Tt0)/2 +
  (n * sigma^2 * H * x * Tt1)/(T * (2*H+1))
d1 <- (itatao+2*tao-n*log(K))/sqrt(2*tao)
d2 <- (itatao - n*log(K))/sqrt(2*tao)
VC <- exp(-beta_t)*(exp(tao+itatao)*pnorm(d1)-K^n * pnorm(d2))
plot(sigma,VC,xlab = "波动率/sigma",ylab = "看涨期权价格/V")
lines(sigma,VC,lwd=2,col=1)

```

```

T <- 1
t <- 0
H <- 0.4
n <- 1
sigma <- seq(0.2,1,0.1)
lambda <- 2
St <- 100
r <- 0.06
q <- 0.02
K <- 100
Gt <- 1
beta_t <- r * (T-t)
x <- 2-2^(2*H-1)
Tt0 <- T^(2*H) - t^(2*H)
Tt1 <- T^(2*H+1) - t^(2*H+1)
Tt2 <- T^(2*H+2) - t^(2*H+2)
tao <- (n^2 * sigma^2 *(1+lambda)*(T-t)^3)/(6*T^2)+
  (n^2 * sigma^2 * x * Tt0)/2 -
  (2*H*n^2 * sigma^2 * x * Tt1)/(T*(2*H+1)) +
  (H*n^2 * sigma^2 *x * Tt2)/(2*T^2*(H+1))
itatao <- (t*log(Gt)+(T-t)*n*log(St))/T +
  (n*(r-q-0.5*sigma^2 * (1+lambda))*(T-t)^2)/(2*T) -
  (n * sigma^2 * x * Tt0)/2 +
  (n * sigma^2 * H * x * Tt1)/(T * (2*H+1))
d1 <- (itatao+2*tao-n*log(K))/sqrt(2*tao)
d2 <- (itatao - n*log(K))/sqrt(2*tao)
VC <- exp(-beta_t)*(exp(tao+itatao)*pnorm(d1)-K^n * pnorm(d2))
points(sigma,VC,pch = 2)
lines(sigma,VC,lwd=2,col=2)

T <- 1
t <- 0
H <- 0.7
n <- 1
sigma <- seq(0.2,1,0.1)
lambda <- 2
St <- 100
r <- 0.06
q <- 0.02
K <- 100
Gt <- 1
beta_t <- r * (T-t)
x <- 2-2^(2*H-1)

```

```

Tt0 <- T^(2*H) - t^(2*H)
Tt1 <- T^(2*H+1) - t^(2*H+1)
Tt2 <- T^(2*H+2) - t^(2*H+2)
tao <- (n^2 * sigma^2 *(1+lambda)*(T-t)^3)/(6*T^2)+
  (n^2 * sigma^2 * x * Tt0)/2 -
  (2*H*n^2 * sigma^2 * x * Tt1)/(T*(2*H+1)) +
  (H*n^2 * sigma^2 *x * Tt2)/(2*T^2*(H+1))
itatao <- (t*log(Gt)+(T-t)*n*log(St))/T +
  (n*(r-q-0.5*sigma^2 * (1+lambda))*(T-t)^2)/(2*T) -
  (n * sigma^2 * x * Tt0)/2 +
  (n * sigma^2 * H * x * Tt1)/(T * (2*H+1))
d1 <- (itatao+2*tao-n*log(K))/sqrt(2*tao)
d2 <- (itatao - n*log(K))/sqrt(2*tao)
VC <- exp(-beta_t)*(exp(tao+itatao)*pnorm(d1)-K^n * pnorm(d2))
points(sigma,VC,pch = 19)
lines(sigma,VC,lwd=2,col=3)

T <- 1
t <- 0
H <- 0.95
n <- 1
sigma <- seq(0.2,1,0.1)
lambda <- 2
St <- 100
r <- 0.06
q <- 0.02
K <- 100
Gt <- 1
beta_t <- r * (T-t)
x <- 2-2^(2*H-1)
Tt0 <- T^(2*H) - t^(2*H)
Tt1 <- T^(2*H+1) - t^(2*H+1)
Tt2 <- T^(2*H+2) - t^(2*H+2)
tao <- (n^2 * sigma^2 *(1+lambda)*(T-t)^3)/(6*T^2)+
  (n^2 * sigma^2 * x * Tt0)/2 -
  (2*H*n^2 * sigma^2 * x * Tt1)/(T*(2*H+1)) +
  (H*n^2 * sigma^2 *x * Tt2)/(2*T^2*(H+1))
itatao <- (t*log(Gt)+(T-t)*n*log(St))/T +
  (n*(r-q-0.5*sigma^2 * (1+lambda))*(T-t)^2)/(2*T) -
  (n * sigma^2 * x * Tt0)/2 +
  (n * sigma^2 * H * x * Tt1)/(T * (2*H+1))
d1 <- (itatao+2*tao-n*log(K))/sqrt(2*tao)
d2 <- (itatao - n*log(K))/sqrt(2*tao)

```

```

VC <- exp(-beta_t)*(exp(tao+itatao)*pnorm(d1)-K^n * pnorm(d2))
points(sigma,VC,pch = 8)
lines(sigma,VC,lwd=2,col=4)
legend("topleft",legend=c("H=0.1","H=0.4","H=0.7","H=0.95"),pch=c(1,2,19,8),cex=0.8,col
=c(1:4))

T <- 1
t <- 0
H <- 0.1
n <- 1
sigma <- seq(0.2,1,0.1)
lambda <- 2
St <- 100
r <- 0.06
q <- 0.02
K <- 100
Gt <- 1
beta_t <- r * (T-t)
x <- 2-2^(2*H-1)
Tt0 <- T^(2*H) - t^(2*H)
Tt1 <- T^(2*H+1) - t^(2*H+1)
Tt2 <- T^(2*H+2) - t^(2*H+2)
tao <- (n^2 * sigma^2 *(1+lambda)*(T-t)^3)/(6*T^2)+
  (n^2 * sigma^2 * x * Tt0)/2 -
  (2*H*n^2 * sigma^2 * x * Tt1)/(T*(2*H+1)) +
  (H*n^2 * sigma^2 *x * Tt2)/(2*T^2*(H+1))
itatao <- (t*log(Gt)+(T-t)*n*log(St))/T +
  (n*(r-q-0.5*sigma^2 * (1+lambda))*(T-t)^2)/(2*T) -
  (n * sigma^2 * x * Tt0)/2 +
  (n * sigma^2 * H * x * Tt1)/(T * (2*H+1))
d1 <- (itatao+2*tao-n*log(K))/sqrt(2*tao)
d2 <- (itatao - n*log(K))/sqrt(2*tao)
VP <- exp(-beta_t)*(K^n * pnorm(-d2)-exp(tao+itatao)*pnorm(-d1))
plot(sigma,VP,xlab = "波动率/sigma",ylab = "看跌期权价格/V")
lines(sigma,VP,lwd=2,col=1)

T <- 1
t <- 0
H <- 0.4
n <- 1
sigma <- seq(0.2,1,0.1)
lambda <- 2
St <- 100
r <- 0.06

```

```

q <- 0.02
K <- 100
Gt <- 1
beta_t <- r * (T-t)
x <- 2-2^(2*H-1)
Tt0 <- T^(2*H) - t^(2*H)
Tt1 <- T^(2*H+1) - t^(2*H+1)
Tt2 <- T^(2*H+2) - t^(2*H+2)
tao <- (n^2 * sigma^2 *(1+lambda)*(T-t)^3)/(6*T^2)+
  (n^2 * sigma^2 * x * Tt0)/2 -
  (2*H*n^2 * sigma^2 * x * Tt1)/(T*(2*H+1)) +
  (H*n^2 * sigma^2 *x * Tt2)/(2*T^2*(H+1))
itatao <- (t*log(Gt)+(T-t)*n*log(St))/T +
  (n*(r-q-0.5*sigma^2 * (1+lambda))*(T-t)^2)/(2*T) -
  (n * sigma^2 * x * Tt0)/2 +
  (n * sigma^2 * H * x * Tt1)/(T * (2*H+1))
d1 <- (itatao+2*tao-n*log(K))/sqrt(2*tao)
d2 <- (itatao - n*log(K))/sqrt(2*tao)
VP <- exp(-beta_t)*(K^n * pnorm(-d2)-exp(tao+itatao)*pnorm(-d1))
points(sigma,VP,pch = 2)
lines(sigma,VP,lwd=2,col=2)

```

```

T <- 1
t <- 0
H <- 0.7
n <- 1
sigma <- seq(0.2,1,0.1)
lambda <- 2
St <- 100
r <- 0.06
q <- 0.02
K <- 100
Gt <- 1
beta_t <- r * (T-t)
x <- 2-2^(2*H-1)
Tt0 <- T^(2*H) - t^(2*H)
Tt1 <- T^(2*H+1) - t^(2*H+1)
Tt2 <- T^(2*H+2) - t^(2*H+2)
tao <- (n^2 * sigma^2 *(1+lambda)*(T-t)^3)/(6*T^2)+
  (n^2 * sigma^2 * x * Tt0)/2 -
  (2*H*n^2 * sigma^2 * x * Tt1)/(T*(2*H+1)) +
  (H*n^2 * sigma^2 *x * Tt2)/(2*T^2*(H+1))

```

```

itatao <- (t*log(Gt)+(T-t)*n*log(St))/T +
  (n*(r-q-0.5*sigma^2 * (1+lambda))*(T-t)^2)/(2*T) -
  (n * sigma^2 * x * Tt0)/2 +
  (n * sigma^2 * H * x * Tt1)/(T * (2*H+1))
d1 <- (itatao+2*tao-n*log(K))/sqrt(2*tao)
d2 <- (itatao - n*log(K))/sqrt(2*tao)
VP <- exp(-beta_t)*(K^n * pnorm(-d2)-exp(tao+itatao)*pnorm(-d1))
points(sigma,VP,pch = 19)
lines(sigma,VP,lwd=2,col=3)

T <- 1
t <- 0
H <- 0.95
n <- 1
sigma <- seq(0.2,1,0.1)
lambda <- 2
St <- 100
r <- 0.06
q <- 0.02
K <- 100
Gt <- 1
beta_t <- r * (T-t)
x <- 2-2^(2*H-1)
Tt0 <- T^(2*H) - t^(2*H)
Tt1 <- T^(2*H+1) - t^(2*H+1)
Tt2 <- T^(2*H+2) - t^(2*H+2)
tao <- (n^2 * sigma^2 *(1+lambda)*(T-t)^3)/(6*T^2)+
  (n^2 * sigma^2 * x * Tt0)/2 -
  (2*H*n^2 * sigma^2 * x * Tt1)/(T*(2*H+1)) +
  (H*n^2 * sigma^2 *x * Tt2)/(2*T^2*(H+1))
itatao <- (t*log(Gt)+(T-t)*n*log(St))/T +
  (n*(r-q-0.5*sigma^2 * (1+lambda))*(T-t)^2)/(2*T) -
  (n * sigma^2 * x * Tt0)/2 +
  (n * sigma^2 * H * x * Tt1)/(T * (2*H+1))
d1 <- (itatao+2*tao-n*log(K))/sqrt(2*tao)
d2 <- (itatao - n*log(K))/sqrt(2*tao)
VP <- exp(-beta_t)*(K^n * pnorm(-d2)-exp(tao+itatao)*pnorm(-d1))
points(sigma,VP,pch = 8)
lines(sigma,VP,lwd=2,col=4)
legend("topleft",legend=c("H=0.1","H=0.4","H=0.7","H=0.95"),pch=c(1,2,19,8),cex=0.8,col=
c(1:4))

```

```

# Hurst 指数 H、跳跃强度 lambda 和亚式期权价格 V 的关系
par(mfrow=c(1,2))
T <- 1
t <- 0
H <- seq(0.1,1,0.1)
n <- 1
sigma <- 0.2
lambda <- 0.5
St <- 100
r <- 0.06
q <- 0.02
K <- 100
Gt <- 1
beta_t <- r * (T-t)
x <- 2-2^(2*H-1)
Tt0 <- T^(2*H) - t^(2*H)
Tt1 <- T^(2*H+1) - t^(2*H+1)
Tt2 <- T^(2*H+2) - t^(2*H+2)
tao <- (n^2 * sigma^2 *(1+lambda)*(T-t)^3)/(6*T^2)+
  (n^2 * sigma^2 * x * Tt0)/2 -
  (2*H*n^2 * sigma^2 * x * Tt1)/(T*(2*H+1)) +
  (H*n^2 * sigma^2 * x * Tt2)/(2*T^2*(H+1))
itatao <- (t*log(Gt)+(T-t)*n*log(St))/T +
  (n*(r-q-0.5*sigma^2 * (1+lambda))*(T-t)^2)/(2*T) -
  (n * sigma^2 * x * Tt0)/2 +
  (n * sigma^2 * H * x * Tt1)/(T * (2*H+1))
d1 <- (itatao+2*tao-n*log(K))/sqrt(2*tao)
d2 <- (itatao - n*log(K))/sqrt(2*tao)
VC <- exp(-beta_t)*(exp(tao+itatao)*pnorm(d1)-K^n * pnorm(d2))
plot(H,VC,xlab = "Hurst 指数/H",ylab = "看涨期权价格/V")
lines(H,VC,lwd=2,col=1)

T <- 1
t <- 0
H <- seq(0.1,1,0.1)
n <- 1
sigma <- 0.2
lambda <- 1
St <- 100
r <- 0.06
q <- 0.02
K <- 100
Gt <- 1
beta_t <- r * (T-t)

```

```

x <- 2-2^(2*H-1)
Tt0 <- T^(2*H) - t^(2*H)
Tt1 <- T^(2*H+1) - t^(2*H+1)
Tt2 <- T^(2*H+2) - t^(2*H+2)
tao <- (n^2 * sigma^2 *(1+lambda)*(T-t)^3)/(6*T^2)+
  (n^2 * sigma^2 * x * Tt0)/2 -
  (2*H*n^2 * sigma^2 * x * Tt1)/(T*(2*H+1)) +
  (H*n^2 * sigma^2 *x * Tt2)/(2*T^2*(H+1))
itatao <- (t*log(Gt)+(T-t)*n*log(St))/T +
  (n*(r-q-0.5*sigma^2 * (1+lambda))*(T-t)^2)/(2*T) -
  (n * sigma^2 * x * Tt0)/2 +
  (n * sigma^2 * H * x * Tt1)/(T * (2*H+1))
d1 <- (itatao+2*tao-n*log(K))/sqrt(2*tao)
d2 <- (itatao - n*log(K))/sqrt(2*tao)
VC <- exp(-beta_t)*(exp(tao+itatao)*pnorm(d1)-K^n * pnorm(d2))
points(H,VC,pch = 2)
lines(H,VC,lwd=2,col=2)

T <- 1
t <- 0
H <- seq(0.1,1,0.1)
n <- 1
sigma <- 0.2
lambda <- 1.5
St <- 100
r <- 0.06
q <- 0.02
K <- 100
Gt <- 1
beta_t <- r * (T-t)
x <- 2-2^(2*H-1)
Tt0 <- T^(2*H) - t^(2*H)
Tt1 <- T^(2*H+1) - t^(2*H+1)
Tt2 <- T^(2*H+2) - t^(2*H+2)
tao <- (n^2 * sigma^2 *(1+lambda)*(T-t)^3)/(6*T^2)+
  (n^2 * sigma^2 * x * Tt0)/2 -
  (2*H*n^2 * sigma^2 * x * Tt1)/(T*(2*H+1)) +
  (H*n^2 * sigma^2 *x * Tt2)/(2*T^2*(H+1))
itatao <- (t*log(Gt)+(T-t)*n*log(St))/T +
  (n*(r-q-0.5*sigma^2 * (1+lambda))*(T-t)^2)/(2*T) -
  (n * sigma^2 * x * Tt0)/2 +
  (n * sigma^2 * H * x * Tt1)/(T * (2*H+1))
d1 <- (itatao+2*tao-n*log(K))/sqrt(2*tao)
d2 <- (itatao - n*log(K))/sqrt(2*tao)

```

```

VC <- exp(-beta_t)*(exp(tao+itatao)*pnorm(d1)-K^n * pnorm(d2))
points(H,VC,pch = 19)
lines(H,VC,lwd=2,col=3)

T <- 1
t <- 0
H <- seq(0.1,1,0.1)
n <- 1
sigma <- 0.2
lambda <- 2
St <- 100
r <- 0.06
q <- 0.02
K <- 100
Gt <- 1
beta_t <- r * (T-t)
x <- 2-2^(2*H-1)
Tt0 <- T^(2*H) - t^(2*H)
Tt1 <- T^(2*H+1) - t^(2*H+1)
Tt2 <- T^(2*H+2) - t^(2*H+2)
tao <- (n^2 * sigma^2 *(1+lambda)*(T-t)^3)/(6*T^2)+
  (n^2 * sigma^2 * x * Tt0)/2 -
  (2*H*n^2 * sigma^2 * x * Tt1)/(T*(2*H+1)) +
  (H*n^2 * sigma^2 *x * Tt2)/(2*T^2*(H+1))
itatao <- (t*log(Gt)+(T-t)*n*log(St))/T +
  (n*(r-q-0.5*sigma^2 * (1+lambda))*(T-t)^2)/(2*T) -
  (n * sigma^2 * x * Tt0)/2 +
  (n * sigma^2 * H * x * Tt1)/(T * (2*H+1))
d1 <- (itatao+2*tao-n*log(K))/sqrt(2*tao)
d2 <- (itatao - n*log(K))/sqrt(2*tao)
VC <- exp(-beta_t)*(exp(tao+itatao)*pnorm(d1)-K^n * pnorm(d2))
points(H,VC,pch = 8)
lines(H,VC,lwd=2,col=4)
legend(0.1,6.85,legend=c("lambda=0.5","lambda=1","lambda=1.5","lambda=2"),pch=c(1,2,19
,8),cex=0.7,col=c(1:4))

T <- 1
t <- 0
H <- seq(0.1,1,0.1)
n <- 1
sigma <- 0.2
lambda <- 0.5
St <- 100
r <- 0.06

```

```

q <- 0.02
K <- 100
Gt <- 1
beta_t <- r * (T-t)
x <- 2-2^(2*H-1)
Tt0 <- T^(2*H) - t^(2*H)
Tt1 <- T^(2*H+1) - t^(2*H+1)
Tt2 <- T^(2*H+2) - t^(2*H+2)
tao <- (n^2 * sigma^2 *(1+lambda)*(T-t)^3)/(6*T^2)+
  (n^2 * sigma^2 * x * Tt0)/2 -
  (2*H*n^2 * sigma^2 * x * Tt1)/(T*(2*H+1)) +
  (H*n^2 * sigma^2 *x * Tt2)/(2*T^2*(H+1))
itatao <- (t*log(Gt)+(T-t)*n*log(St))/T +
  (n*(r-q-0.5*sigma^2 * (1+lambda))*(T-t)^2)/(2*T) -
  (n * sigma^2 * x * Tt0)/2 +
  (n * sigma^2 * H * x * Tt1)/(T * (2*H+1))
d1 <- (itatao+2*tao-n*log(K))/sqrt(2*tao)
d2 <- (itatao - n*log(K))/sqrt(2*tao)
VP <- exp(-beta_t)*(K^n * pnorm(-d2)-exp(tao+itatao)*pnorm(-d1))
plot(H,VP,xlab = "Hurst 指数/H",ylab = "看跌期权价格/V")
lines(H,VP,lwd=2,col=1)

T <- 1
t <- 0
H <- seq(0.1,1,0.1)
n <- 1
sigma <- 0.2
lambda <- 1
St <- 100
r <- 0.06
q <- 0.02
K <- 100
Gt <- 1
beta_t <- r * (T-t)
x <- 2-2^(2*H-1)
Tt0 <- T^(2*H) - t^(2*H)
Tt1 <- T^(2*H+1) - t^(2*H+1)
Tt2 <- T^(2*H+2) - t^(2*H+2)
tao <- (n^2 * sigma^2 *(1+lambda)*(T-t)^3)/(6*T^2)+
  (n^2 * sigma^2 * x * Tt0)/2 -
  (2*H*n^2 * sigma^2 * x * Tt1)/(T*(2*H+1)) +
  (H*n^2 * sigma^2 *x * Tt2)/(2*T^2*(H+1))

```

```

itatao <- (t*log(Gt)+(T-t)*n*log(St))/T +
  (n*(r-q-0.5*sigma^2 * (1+lambda))*(T-t)^2)/(2*T) -
  (n * sigma^2 * x * Tt0)/2 +
  (n * sigma^2 * H * x * Tt1)/(T * (2*H+1))
d1 <- (itatao+2*tao-n*log(K))/sqrt(2*tao)
d2 <- (itatao - n*log(K))/sqrt(2*tao)
VP <- exp(-beta_t)*(K^n * pnorm(-d2)-exp(tao+itatao)*pnorm(-d1))
points(H,VP,pch = 2)
lines(H,VP,lwd=2,col=2)

T <- 1
t <- 0
H <- seq(0.1,1,0.1)
n <- 1
sigma <- 0.2
lambda <- 1.5
St <- 100
r <- 0.06
q <- 0.02
K <- 100
Gt <- 1
beta_t <- r * (T-t)
x <- 2-2^(2*H-1)
Tt0 <- T^(2*H) - t^(2*H)
Tt1 <- T^(2*H+1) - t^(2*H+1)
Tt2 <- T^(2*H+2) - t^(2*H+2)
tao <- (n^2 * sigma^2 *(1+lambda)*(T-t)^3)/(6*T^2)+
  (n^2 * sigma^2 * x * Tt0)/2 -
  (2*H*n^2 * sigma^2 * x * Tt1)/(T*(2*H+1)) +
  (H*n^2 * sigma^2 *x * Tt2)/(2*T^2*(H+1))
itatao <- (t*log(Gt)+(T-t)*n*log(St))/T +
  (n*(r-q-0.5*sigma^2 * (1+lambda))*(T-t)^2)/(2*T) -
  (n * sigma^2 * x * Tt0)/2 +
  (n * sigma^2 * H * x * Tt1)/(T * (2*H+1))
d1 <- (itatao+2*tao-n*log(K))/sqrt(2*tao)
d2 <- (itatao - n*log(K))/sqrt(2*tao)
VP <- exp(-beta_t)*(K^n * pnorm(-d2)-exp(tao+itatao)*pnorm(-d1))
points(H,VP,pch = 19)
lines(H,VP,lwd=2,col=3)

T <- 1
t <- 0
H <- seq(0.1,1,0.1)

```

```

n <- 1
sigma <- 0.2
lambda <- 2
St <- 100
r <- 0.06
q <- 0.02
K <- 100
Gt <- 1
beta_t <- r * (T-t)
x <- 2-2^(2*H-1)
Tt0 <- T^(2*H) - t^(2*H)
Tt1 <- T^(2*H+1) - t^(2*H+1)
Tt2 <- T^(2*H+2) - t^(2*H+2)
tao <- (n^2 * sigma^2 *(1+lambda)*(T-t)^3)/(6*T^2)+
  (n^2 * sigma^2 * x * Tt0)/2 -
  (2*H*n^2 * sigma^2 * x * Tt1)/(T*(2*H+1)) +
  (H*n^2 * sigma^2 *x * Tt2)/(2*T^2*(H+1))
itatao <- (t*log(Gt)+(T-t)*n*log(St))/T +
  (n*(r-q-0.5*sigma^2 * (1+lambda))*(T-t)^2)/(2*T) -
  (n * sigma^2 * x * Tt0)/2 +
  (n * sigma^2 * H * x * Tt1)/(T * (2*H+1))
d1 <- (itatao+2*tao-n*log(K))/sqrt(2*tao)
d2 <- (itatao - n*log(K))/sqrt(2*tao)
VP <- exp(-beta_t)*(K^n * pnorm(-d2)-exp(tao+itatao)*pnorm(-d1))
points(H,VP,pch = 8)
lines(H,VP,lwd=2,col=4)
legend(0.1,5.5,legend=c("lambda=0.5","lambda=1","lambda=1.5","lambda=2"),pch=c(1,2,19,
8),cex=0.7,col=c(1:4))

```

## 在学期间完成的工作

### 发表论文与获奖情况

1. 丁毅, 郭精军. 混合高斯跳模型下的亚式幂期权定价[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2021,46(7):16-25.
2. 丁毅, 郭精军. 时变混合分数布朗运动下带交易费用的亚式期权定价[J]. 数学物理学报, 2021,41A(4):1135-1146.
3. 孙景云, 赵盼盼, 丁毅. 基于样本熵重构和 PSO 优化算法的人民币汇率预测[J]. 数学的实践与认识, 2021,51(19):70-83.
4. 兰州财经大学研究生一等奖学金. 2019.11
5. 兰州财经大学研究生一等奖学金. 2021.11
6. 第七届全国大学生统计建模大赛研究生组三等奖. 2021.11

### 参与项目情况

- [1] 甘肃省哲学社会科学规划项目（项目编号：19TB011）：《基于隐马尔可夫模型的生态文明程度指数测评指标体系设计与测度》。

## 致谢

“夫天地者，万物之逆旅也；光阴者，百代之过客也”。三年的研究生生涯即将结束，回首这三年的学习、生活，仿佛所有的事都发生在昨日。在这短暂的三年中，收获了许多，也成长了许多。

本论文是在导师郭精军教授的指导下完成的，从开题到论文写作，再到论文修改，郭老师都对我耐心指导，认真负责。我写的每一篇文章，他都耐心修改，不厌其烦地指导我，我每上一个台阶，都离不开郭老师的悉心教导。在此，对郭老师致以真挚的谢意，祝愿恩师工作顺利，身体健康。

感谢学校为我提供的良好、安全的学习环境，让我可以安心、心无旁骛的学习。感谢所有的任课老师，您们严谨、求真务实的态度对我产生了深刻影响，在以后的学习工作中，我将继续保持这些好的品质。

感谢我的舍友梁永玉和安翔，以及同门郑乐乐、马小雯、师姐白亚楠、马爱琴、张翠芸、师兄彭波，师弟杨小卜、师妹雷馨钰、徐嘉璐，感谢他们对我三年来的鼓励与帮助，祝愿你们工作顺利，学习进步。

最后，我要特别感谢我的父母、奶奶和姐姐，他们对我的爱是我勇敢面对一切困难挫折的力量。

丁毅

2022年5月15日