

分类号 C8/253
U D C _____

密级 _____
编号 10741

兰州财经大学

LANZHOU UNIVERSITY OF FINANCE AND ECONOMICS

硕士学位论文

论文题目 混合分形 Heston-CIR 模型下的期权定价
及统计模拟分析

研究生姓名: 白亚楠

指导教师姓名、职称: 郭精军 教授

学科、专业名称: 统计学 数理统计学

研究方向: 金融统计与风险管理

提交日期: 2021年6月6日

独创性声明

本人声明所呈交的论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果. 尽我所知, 除了文中特别加以标注和致谢的地方外, 论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果. 与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已 在论文中作了明确的说明并表示了谢意.

学位论文作者签名: 白亚楠 签字日期: 2021.6.6

导师签名: 李树斌 签字日期: 2021.6.6

关于论文使用授权的说明

本人完全了解学校关于保留、使用学位论文的各项规定, 同意 (选择“同意” / “不同意”) 以下事项:

1. 学校有权保留本论文的复印件和磁盘, 允许论文被查阅和借阅, 可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文;

2. 学校有权将本人的学位论文提交至清华大学“中国学术期刊(光盘版)电子杂志社”用于出版和编入 CNKI《中国知识资源总库》或其他同类数据库, 传播本学位论文的全部或部分内 容.

学位论文作者签名: 白亚楠 签字日期: 2021.6.6

导师签名: 李树斌 签字日期: 2021.6.6

Option Pricing and Statistical Simulation Analysis under Mixed Fractional Heston-CIR Model

Candidate :Yanan Bai

Supervisor:Jingjun Guo

摘要

期权作为当代金融衍生品市场的新兴产品,越来越成为金融界不可或缺的重要组成部分.而期权定价问题也一直是学者和投资者热议的话题之一,1973年 B-S(Black-Scholes)公式的出现为期权、期货等金融衍生品定价提供了强有力的理论支持,引起了学术界的广泛关注.但是经典 B-S 模型的收益率与实际收益率呈现出的非正态性、非线性、非独立性等经验性特征不一致,因此学者们主要从两方面着手对其进行改进.一方面为了描述金融产品的长相依特性提出了分形布朗运动模型.另一方面为了描述标的资产的“尖峰厚尾”、不连续性、“波动率微笑”等特征提出了跳跃扩散模型、随机利率与随机波动率模型.虽然这些模型能较好的拟合真实金融数据,但是与真实价格相比还是存在一定的差异.

为了更好地描述期权价格变化,本文在 Heston 模型的基础上对其进行改进提出了带跳的 Heston-CIR 混合模型和混合分形 Heston-CIR 模型.研究内容主要从以下三个部分展开.第一部分主要求解带跳的 Heston-CIR 混合模型下的欧式看涨期权价格.在 Heston 模型之上又考虑了随机利率和突发事件对衍生品价格的影响,建立带跳的随机波动率与随机利率(Heston-CIR)混合模型.先将标的资产所满足的随机微分方程经测度变换,变换到远期测度下.然后,利用快速傅里叶变换法解得该模型下的期权价格.

第二部分为混合分形 Heston-CIR 模型下的美式看跌期权定价研究.首先,为了刻画标的资产呈现出的波动率微笑和长相依等特性,基于分形市场理论用分数布朗运动和标准布朗运动的线性组合代替布朗运动,即构建混合分形 Heston-CIR 模型描述标的资产价格.然后,分别研究了标的资产价格和利率所满足随机微分方程的解的唯一性和存在性,并研究了利率方程的 Euler 格式离散化的强收敛性.

第三部分为模拟分析结果.首先,选取标的资产历史数据做描述性统计分析.其次,将真实数据与不同模型下的标的资产价格路径作比较.最后,采用最小二乘 Monte Carlo 算法得到不同到期日下美式看跌期权的价格,并运用数值模拟证明了提出模型的合理性.

关键词: 欧式期权 美式期权 Heston-CIR 模型 混合分形布朗运动 跳跃扩散过程

Abstract

As an emerging product of the contemporary financial derivatives market, option is becoming an indispensable part of the financial market. Option pricing is one of the most popular topics among scholars and investors. In 1973, the emergence of B-S (Black-Scholes) formula provided strong theoretical support for the pricing of financial derivatives such as options and futures, which attracted extensive attention from academic circles. However, the return rate of the classical B-S model is inconsistent with the empirical characteristics of the real return, such as non-normality, non-linearity and non-independence, so scholars mainly improve it from two aspects. On the one hand, fractional Brownian motion model is proposed to describe the long-term dependence of financial assets. On the other hand, in order to describe the characteristics of the underlying assets, such as "peak thick tail", discontinuity and "volatility smile", jump diffusion model, random interest rate and random volatility model are proposed. Although these models can fit the real financial data well, there are still some differences compared with the real prices.

In order to describe the variation of option price better, based on the Heston model, mixed Heston-CIR model with jump and mixed fractional Heston-CIR model are proposed. There are three parts as follows in this article. In the first part, European call option pricing under Heston-CIR mixed model with jump is solved. Based on the classical Heston model, a

hybrid stochastic volatility and stochastic interest rate (Heston-CIR) model with jump is constructed by considering the impact of random interest rate and emergency on the price of financial products. Firstly, the stochastic differential equation satisfied by the underlying asset is transformed to the forward measure by measure transformation. Then, the European option price under the model is solved by the fast Fourier transform method.

In the second part, American put option pricing under mixed fractional Heston-CIR model is studied. First of all, in order to reflect the volatility smile and the long dependence of the underlying asset, a mixed fractional Heston-CIR model is constructed to describe the underlying asset price based on the fractional market theory. The linear combination of the standard Brownian motion and the fractional Brownian motion is used to replace the Brownian motion. Secondly, the uniqueness and existence of the solutions to the stochastic differential equations satisfied by the underlying asset price and interest rate are proved respectively. The strong convergence of the Euler scheme discretization of the interest rate equation is also proved.

In the third part, the results of simulation analysis are given. Firstly, the historical data of the underlying assets are selected for descriptive statistical analysis. Secondly, the real data are compared with the underlying asset price paths under different models. Finally, the least

squares Monte Carlo algorithm is used to obtain the prices of American put options with different expiration dates, and the rationality of the proposed model is proved by numerical simulation.

Keywords: European option; American option; Heston-CIR model; Mixed fractional Brownian motion; Jump diffusion process.

目录

1 引言	1
1.1 研究背景.....	1
1.2 研究目的与意义.....	2
1.3 研究现状.....	2
1.4 研究内容与安排.....	6
2 预备知识	8
2.1 经典 B-S 期权定价模型.....	8
2.2 混合分数布朗运动的定义与性质.....	9
2.3 Heston-CIR 混合模型结构.....	10
2.4 相关定义与引理.....	11
3 带跳的 Heston-CIR 混合模型下的欧式期权定价	14
3.1 模型动态及其测度变换.....	14
3.2 欧式看涨期权价格公式.....	17
4 混合分形 Heston-CIR 模型下的美式期权定价	22
4.1 模型解的存在性和唯一性.....	22
4.2 Euler 格式离散化的强收敛性.....	26
5 数值模拟	30
5.1 数据的统计特征.....	30
5.2 敏感性分析.....	31
5.3 模拟结果.....	33
6 研究总结与展望	38
6.1 研究总结.....	38
6.2 研究展望.....	38
参考文献	39
致谢	44

1 引言

1.1 研究背景

近几十年来随着金融市场的不断优化,新兴衍生产品的种类不断丰富,学者们和金融投资者们所面对的金融风险也越来越繁杂.为了高效、快速地规避和管理这些风险,学者及投资者们提出了大量风险管理和对冲模型,其中期权定价模型是当前风险管理的热门研究之一.尤其是1973年 Black 和 Scholes 提出经典的 B-S 模型为期权等金融产品的有效定价打下了稳固的基础,广受金融投资者和学者们的追捧.但是 B-S 模型仅在理论假设条件下有效,即假设资产价格由布朗运动驱动,并且波动率、利率是固定数值,这与真实资产表现出的“波动率微笑”、“尖峰厚尾”、长相依等经验性特征不一致.

传统 B-S 模型的股票收益是由标准布朗运动驱动,不能有效刻画金融产品收益率的长相依性.针对这一问题 Peters(1994)初次从非线性的角度着手,提出了更契合现实金融界的分形市场假说理论,即假定模型的股票价格服从分形布朗运动.在此假定下 Hurst 参数的取值至关重要,当 $H \neq \frac{1}{2}$ 时,虽然分数布朗运动能够捕捉到不同日期收益间的长期依赖关系,但是它允许套利机会的存在且很难进行数值研究.而混合分形布朗运动(分形布朗运动与标准布朗运动的线性组合)的引入能消除套利机会,且当 $H > \frac{3}{4}$ 时混合分形布朗运动等价于布朗运动,不但能有效刻画分形市场特征而且不会产生套利.

此外, B-S 模型假定股票收益服从标准正态分布,且波动率与利率均为常数,这与实际不符.一方面金融市场往往会对好消息和坏消息做出过度反应或反应不足,导致金融数据在短期时间间隔内发生跳跃或不连续的情形.因此 Merton(1975)提出跳扩散模型来刻画市场对外界消息的反应.另一方面实际市场数据的隐含波动率曲线往往会表现出微笑的形状,即“波动率微笑”现象,资产收益具有“尖峰厚尾”的特性,并且利率也会随着市场的变化而变动.许多学者则对常数波动率做了改进提出随机波动率模型充分刻画金融数据的上述特性.改进的模型有 Hull-White 模型、常系数弹性方差(CEV)模型、Vasicek 模型和 Heston 模型等.尤其是 Heston 模型假定波动率满足 CIR 随机过程,并且波动率与资产价格是相关

的,不但具有与实际数据相一致的均值回归和非负性等特性而且能通过傅里叶逆变换解得衍生品价格的封闭解.由于市场利率也具有类似的特征,同样可以用 CIR 等随机过程刻画利率的变化.由此可见,为了更精确地反映金融市场数据的变化情况和有效地防范金融风险,通过构建带跳的 Heston-CIR 混合模型、混合分数随机波动与随机利率(Heston-CIR)模型来研究期权定价问题具有深远的意义.

1.2 研究目的与意义

早在 18 世纪后期的欧美市场就出现了期权这种衍生产品,即以股票、债券、股指、期货等为标的物并赋予购买者一定选择权的合约.最初由于期权交易机制不完善它并不能吸引广大投资者的关注.随着 19 世纪 70 年代早期芝加哥证交所的创立,期权交易逐步走向一致化和标准化,自此也吸引了大量投资者和学者投身于期权研究.在随后的发展中,人们依据买卖时间的不同将期权分为欧式和美式.其中欧式期权的买方只能在合约规定的交易日期行权,而美式期权相较于欧式期权更加自由、灵活可以在规定日期内的任意时刻进行交割.期权这种衍生品不但拓宽了股票投资者的投资渠道更为他们带来更高的收益,因此它一直是金融爱好者研究的热点.

从最初的期权定价理论提出至今不断改进的定价模型也越来越符合实际市场,其中应用最广泛的就是 Heston 模型,但是该模型还是不能很精确地刻画标的物价格的变化情况,因此在已有研究基础上提出带跳的 Heston-CIR 模型和混合分形 Heston-CIR 模型.一方面采用带跳的 Heston-CIR 模型描述金融产品价格数据的“尖峰厚尾”、“波动率微笑”和不连续性.另一方面运用混合分形 Heston-CIR 模型更准确地刻画金融资产价格的长相依性等分布特征.通过数值模拟方法得到欧式和美式期权价格,丰富了期权的相关理论知识,为以后的研究拓宽了思路.给投资者提供投资依据,带来稳定收益,以及对金融衍生品类型的丰富和市场的优化壮大具有重要的意义.

1.3 研究现状

(1) 经典 B-S 模型的研究现状

期权定价理论的发展历史悠久,对当今风险管理起至关重要的作用.而期权定价理论作为金融经济理论的基石更渗透于金融学的每一个角落.1973年 Black 和 Scholes 在知名杂志上发表了有关期权定价的论文,提出了用 B-S 模型描述股票价格路径变化情况并得到欧式期权的解析解,自此关于期权定价理论的研究取得了重大突破.但是,随着市场的快速成长和金融衍生生物种类的不断丰富,经典 B-S 模型常数波动率、利率以及收益率服从几何布朗运动的假设已不能适应当代社会复杂多变的市场.研究表明真实股票价格路径是不连续的,会出现间断性跳跃的现象,因此 Merton(1976)将日常小的扩散运动与较大的、随机发生的跳跃结合在一起提出跳扩散模型刻画资产价格变化情况.随后 Kou(2002)研究发现 Merton 模型没有考虑波动率聚类现象且更适用于到期时间较短的期权,因此他对其做出改进,即提出了双指数跳跃扩散模型.之后有许多学者也做了大量这方面的研究,如陈盛双(2006)等提出了双指数跳扩散模型下定价回望期权的新方法,并运用 Laplace 变换法得到该模型下的期权价格解析公式.宋殿宇(2011)等建立了双指数跳扩散模型,并采用鞅方法研究了可转债的定价问题.Li (2018)等通过选取 Esscher 变换参数得到了风险资产折现值为鞅的风险中性测度,并得到了跳扩散模型下的可转换期权的定价公式.Singh (2018)等讨论了 Merton 和 Kou 跳跃扩散模型下的期权定价,研究了运用三时间层紧致格式求解模型下期权价格的偏微分方程.

自相似和长相依性是金融时间序列表现出的重要特性,上述模型都是由标准布朗运动驱动,无法描述这一特征.然而 Peter(1994)发现 Hurst 参数 $H \in (0,1)$ 的分形布朗运动具有长相依特性并将其运用于金融市场.然而 Roger (1997)研究发现虽然分形布朗运动能够捕捉到不同日期收益间的长期依赖关系,但是它允许套利机会的存在且当 $H \neq 1/2$ 时 fBm 不是半鞅过程,因此不能用 Itô 微积分等知识求解期权价格.随后 Cheridito(2001)研究证明,当 $H \in (3/4,1)$ 时混合分形布朗运动等价于布朗运动且不存在套利机会.因此为了消除套利,学者们引入由混合分形布朗运动驱动模型刻画标的资产价格的波动,如 Sun(2013)在混合分形布朗运动模型下得到看涨欧式货币期权满足的混合分形偏微分方程和定价公式,并运用数值模拟验证了其合理性.徐峰(2015)等利用分数 Itô 公式讨论了混合分形布朗运动

模型下的永久美式期权定价. Rao(2016)等讨论了混合分形布朗运动下的几何亚式期权定价. Mehrdoust(2018)等证明了混合分形布朗运动模型下美式期权的解的存在唯一性, 并采用最小二乘 Monte Carlo(LSM)法模拟该模型下的美式期权价格. 郭精军(2018)等应用分形伊藤公式求解了混合高斯模型下带红利的永久美式期权定价公式. Ahmadian(2020)等得到混合分形布朗运动模型下的几何亚式彩虹期权的定价公式, 并通过 Monte Carlo 模拟法验证了期权价格解析解的正确性.

(2) Heston 模型的研究现状

传统 B-S 模型常数波动率假设与实际市场存在较大差异, 在现实市场中资产收益往往存在微笑效应, 且价格的概率密度函数存在偏态和峰度效应. 因此学者们对其进行改进, 如 Hull-White(1987)等提出随机波动模型, 即假设股票的波动率满足某一随机过程, 并解得该模型下的欧式期权价格. Scott(1987)假设股票的波动率风险是可分散的, 而且波动率与股票收益不存在相关关系, 并研究了该模型下的看涨欧式期权的定价问题. Stein(1991)等假设波动率由算术 O-U 过程驱动, 通过分析技术推导出模型下期权的显式封闭解, 并讨论了随机波动率与股价“厚尾”分布特征之间的关系. Heston(1993)采用 CIR 仿射过程来描述波动率变化, 利用特征函数推导出包含一维积分的公式来计算具有随机波动率的欧式期权, 并将其运用到债券和货币期权定价中. Mehrdoust(2015)等采用 LSM 法计算了 CEV 模型下的期权价格. Araneda(2020)构建了分数和混合分数 CEV 模型, 并利用分形 Itô 公式和 Fokker-Planck 方程研究了欧式期权的定价问题. 其中 Heston 模型不但具有均值回复性和正则性等特点而且存在封闭解, 因此受到金融爱好者们的广泛关注. Forde(2010)等讨论了时间依赖型的 Heston 波动率模型下亚式期权的定价问题. Ballestra(2007)等采用 Monte Carlo 模拟法讨论了 Heston 模型下的奇异路径依赖衍生品的定价问题. 王林(2011)等利用模拟退火算法研究了 Heston 模型下的参数估计问题. 李静(2012)等利用自适应 Simpson 数值积分和仿射变换法研究了差价、商数和乘数等多资产期权的定价问题. 邓国和(2015)采用 Fourier 逆变换和二维特征函数法求解了随机波动率跳扩散模型下的欧式复合看涨期权价格的半解析公式. He(2016)等研究了机制转换 Heston 模型下的欧式期权定价. 张丽娟(2018)等构建了基于 Heston 模型的混合神经网络模型研究了中国金融市场上的上证 50ETF 和恒生指数期权. Kozpina(2020)等通过间断伽辽金有限元方法讨论

了标的资产价格遵循 Heston 模型时美式看跌和欧式香草期权的定价问题。

(3) Heston-CIR 混合模型的研究现状

B-S 模型假设利率也是固定不变的,然而学者们研究发现市场利率并非固定常数而是随着时间的变化而变化.因此 Vasicek(1977)等假设利率是随机变化的并提出了短期随机利率模型,并通过套利论证表明,任何债券的预期回报率超过即期利率与其标准差成正比.刘坚(2007)等运用鞅方法和随机分析方法研究了股票价格服从 O-U 过程,利率遵循 Vasicek 模型下的单再装日期权的定价公式. Fallah(2019)等构建分形 CIR 随机利率模型,讨论了该模型下的双障碍期权的定价问题.王向荣(2019)等假设资产价格和利率分别满足 O-U 过程和 Hull-White 过程,并运用哥萨诺夫定理和鞅理论求解了复合型期权的价格.奚欢(2020)等用带有双指数跳跃过程的 Vasicek 随机利率模型定价重置期权,并采用测度变换和 multidimensional Fourier 逆变换法求解此模型下的期权价格.

随后实证研究表明采用单个的随机波动率或随机利率模型刻画的资产价格与实际数据存在较大差异,而将随机利率引入随机波动率模型中能更精确地拟合金融市场数据.于是学者们做了大量这方面的研究,如 Grzelak(2011, 2012)等采用 Stein-Stein 随机波动率和 Hull-White 随机利率混合模型,在傅立叶余弦展开框架下对欧洲期权进行评估,并且在此基础上还提出了随机利率过程和 Heston 模型相结合的模型.郭滨(2017)等研究了随机利率与随机波动率的 Levy 模型下的欧式期权定价,并用最小鞅测度方法得到此模型下的期权价格. Samimi(2017)等采用 Heston-Hull-White 混合模型定价美式期权,并应用 LSM 法得到了该模型下的美式看跌期权价格.之后 He(2018)等研究表明 Hull-White 模型下的波动率和利率有可能为负值,而 CIR 过程具有均值回复和正则性等优点,因此他们采用 Heston-CIR 混合模型描述标的资产价格变化,然后通过傅里叶逆变换等方法解得此模型下欧式期权价格的闭形式解,并通过模拟验证了此模型准确性较高且收敛速度较快. Berthe(2019)等将 Heston 模型和多因子 CIR 利率模型相结合描述资产价格变化,采用香农小波法研究了欧式外汇期权定价问题. Mehrdoust(2019)等研究了 Heston-CIR 混合模型下的多资产美式期权定价,在该模型下证明了标的资产价格解的存在性和唯一性,并用最小二乘蒙特卡罗算法验证了模型的有效性.

综上所述,随着学者们对 B-S 模型的不断改进,期权定价理论得到不断完善

和发展. 股票价格已经由原来的单个过程驱动改进为由多个随机过程驱动, 所构建模型拟合金融数据的效果也越来越好, 但是与真实值相比还是存在一定差距. 虽然 Heston-CIR 混合模型能够更加精确的刻画金融产品收益的“尖峰厚尾”和“波动率微笑”, 但是它不能很好地刻画衍生品收益的长相依性和不连续跳跃性. 因此为了更好的刻画金融产品价格的变化, 本文总结以往学者的研究经验, 对 Heston 波动率模型进行改进, 构建了带跳的 Heston-CIR 混合模型和混合分形 Heston-CIR 模型, 研究了最具有代表性的欧式及美式期权的定价问题.

1.4 研究内容与安排

1.4.1 研究内容

将基于 Heston 模型展开研究, 在此模型基础之上主要讨论了以下内容

(1)采用快速傅里叶变换(FFT)方法得到带跳的 Heston-CIR 混合模型下的欧式期权价格. 首先, 构建带跳的 Heston-CIR 混合模型. 其次, 考虑到此模型中涉及多个随机变量不能直接求解, 故采用测度变换方法将其变换到远期测度下, 然后用伊藤引理和广义 Feynman-Kac 定理得到模型下关于标的资产的特征函数. 最后, 采用 FFT 法求解欧式期权的价格.

(2)构建混合分形 Heston-CIR 模型并研究该模型下解的性质. 将 Heston-CIR 混合模型由标准布朗运动驱动替换为由混合分形布朗运动驱动, 再利用线性增长和局部 Lipschitz 条件得到混合分形 Heston-CIR 模型下的标的资产、利率方程解的唯一性和存在性并研究了随机微分方程 Euler 离散化的强收敛性.

(3)模拟标的资产价格路径将其与真实值做比较, 并采用简单高效的最小二乘 Monte Carlo(LSM)算法求解美式期权价格. 首先, 对上证 50ETF 价格数据做描述性统计分析; 然后, 通过 Monte Carlo 法模拟不同模型下的股票价格路径并将其与真实值作比较; 最后, 考虑到美式期权的买方有权利在到期日前的任何时刻进行交易, 很难得到其解析解, 故采用 LSM 算法求解美式期权价格并通过数值模拟验证模型的有效性.

1.4.2 研究安排

本文的结构安排如下:

第一部分是引言. 主要介绍了期权定价的研究背景、研究现状以及随机波动率与随机利率模型的研究现状. 介绍了主要研究内容, 分析了论文的研究目的与意义, 给出文章结构安排为具体研究提供理论指导.

第二部分是预备知识. 主要介绍定理证明时涉及的假设条件、定义、引理等.

第三部分为带跳的 Heston-CIR 混合模型下的欧式期权定价. 建立带跳的 Heston-CIR 混合模型将其变换到远期测度下并采用 FFT 方法求解此模型下的欧式期权价格.

第四部分为混合分形 Heston-CIR 模型下的美式看跌期权定价. 构建混合分形 Heston-CIR 模型刻画资产价格变化; 运用随机分析方法证明该模型存在唯一解, 并讨论了 Euler 格式离散化的强收敛性.

第五部分为数值模拟. 对期权标的真实数据做描述性统计分析, 并通过数值模拟得到标的资产价格样本路径变化情况, 并将不同模型下的样本路径与真实值做比较. 采用最小二乘 Monte Carlo 法得到美式期权价格的变化路径并分析模拟结果.

第六部分为研究总结及展望. 总结论文的主要研究内容并对下一步研究做出展望.

2 预备知识

这一部分主要介绍经典 B-S 期权定价模型理论知识, 混合分形布朗运动的性质及定义, Heston-CIR 混合模型的相关理论, 以及定理证明过程中涉及的相关定义、引理等.

2.1 经典 B-S 期权定价模型

B-S 模型的提出轰动了当时的金融界, 使得股票、期权的研究取得较大进步. 其股票和期权价格满足如下“假设条件”^[7]:

- (1) 短期利率已知且在有效期内固定不变;
- (2) 在连续时间内股票价格遵从随机游走, 且股票价格的平方与波动率成正比. 因此股票价格服从对数正态分布, 股票收益率的波动为固定常数值;
- (3) 股票不支付股息或做其他分配;
- (4) 期权是欧式期权并且只能在到期日交易;
- (5) 买卖股票或期权的过程中无交易费用;
- (6) 投资者以短期利率购买或持有证券的资金是充足的;
- (7) 允许卖空. 不拥有证券的卖方将会接受买方的证券价格, 并同意在将来的某个日期向买方支付与该证券当日价格相等的金额.

B-S 期权定价公式推导^[48]

假定在风险中性测度下, 波动率 σ 和平均回报速率 r 都是固定常数值, 时间 $t \geq 0$, 股票价格 S_t 所满足的偏微分方程如下

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$$

其中 W_t 是概率空间 (Ω, \mathbb{F}, P) 上的布朗运动. 令 S_0 为初始股价, 根据 Itô 公式求解上述偏微分方程可得

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \sigma W_t + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t \right\},$$

衍生证券的支付为 $V_T = (S_T - K)^+$, K 为执行价格, 根据风险中性定价公式可知

$$V_t = E \left[e^{-r(T-t)} (S_T - K)^+ | \mathbb{F}_t \right]$$

由几何布朗运动的性质可得, 存在函数 $c(t, S_t)$ 使得

$$\begin{aligned} c(t, S_t) &= E \left[e^{-r(T-t)} (S_T - K)^+ | \mathbb{F}_t \right] \\ &= E \left[e^{-r\tau} \left(S_t e^{-\sigma\sqrt{\tau}Y + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau} - K \right)^+ \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r\tau} \left(S_t e^{-\sigma\sqrt{\tau}y + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau} - K \right)^+ e^{-\frac{1}{2}y^2} dy, \end{aligned}$$

其中 $Y = -\frac{W_T - W_t}{\sqrt{T-t}}$ 表示标准正态随机变量, $\tau = T-t$ 是离到期日剩余的时间. 解上

述方程, 最终可得欧式看涨期权的价格 $BS(t, S_t)$ 为

$$BS(t, S_t) = S_t N(d_+) - e^{-r\tau} K N(d_-),$$

其中 $d_+ = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \left[\log \frac{S_t}{K} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau \right]$, $d_- = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \left[\log \frac{S_t}{K} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau \right]$, $N(\cdot)$ 表示标准正态分布的累积分布函数.

2.2 混合分数布朗运动的定义与性质

假定分数布朗运动 $B^H = \{B_t^H, t \geq 0\}$, 且 Hurst 参数 $H \in (0, 1)$, 是一个定义在概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的中心高斯过程, 则它满足如下协方差函数

$$\text{Cov}(B_t^H, B_s^H) = \frac{1}{2} (s^{2H} + t^{2H} - |t-s|^{2H}),$$

其中当 $H = \frac{1}{2}$ 时, B^H 为标准布朗运动, 即 $B = \{B_t, t \geq 0\}$.

令 $a, b > 0$ 为常数则有如下定义

定义 2.1^[29] 假定 $M_t^H = \{M_t^H(a, b), t \geq 0\}$ 是定义在概率空间 (Ω, \mathbb{F}, P) 上的混合分数布朗运动, 其中 a, b, H 为参数则

$$M_t^H = aB_t + bB_t^H, \forall t \in R^+,$$

其中 $B_t, t \in R^+$ 为标准布朗运动, $B_t^H, t \in R^+$ 是独立于 B_t 的分数布朗运动且 Hurst 参数 $H \in (0,1)$.

过程 M_t^H 满足如下性质

引理 2.1^[29] 存在一个混合分形布朗运动 M_t^H , 其满足如下性质

- (1) M_t^H 是一个中心高斯过程;
- (2) 对所有 $t \in R^+$, $E[M_t^H] = 0$, $Var[M_t^H] = a^2 t + b^2 t^{2H}$;
- (3) $Cov(M_t^H, M_s^H) = a^2(t \wedge s) + \frac{1}{2} \left[b^2 (t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}) \right]$, $t \wedge s = \frac{1}{2}(t+s-|t-s|)$;
- (4) M^H 的增量是固定的.

2.3 Heston-CIR 混合模型结构^[16]

因 B-S 模型的常数利率和波动率假设不符合实际市场, 所以学术界对其修正提出了随机波动率和随机利率模型, 其中 Heston 模型的波动率满足 CIR 随机过程, 它不但呈现出与真实市场数据相一致的非负性和均值回复等特性, 而且能求得衍生品价格的解析解. 由于相似的原因 CIR 过程也被用来描述随机利率变化. 由此将 Heston 模型和 CIR 随机利率模型结合构造 Heston-CIR 混合模型, 在风险中性条件 Q 下模型结构为

$$\begin{aligned} dS_t &= r_t S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_{1,t}, \\ dv_t &= \kappa(\theta - v_t) dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_{2,t}, \\ dr_t &= \alpha(\beta - r_t) dt + \eta \sqrt{r_t} dW_{3,t}, \\ dW_{1,t} \cdot dW_{2,t} &= \rho, \\ dW_{1,t} \cdot dW_{3,t} &= 0, \\ dW_{2,t} \cdot dW_{3,t} &= 0, \end{aligned}$$

其中 $r_t, v_t, S_t, t \geq 0$ 分别是 t 时刻的无风险利率、波动率以及标的资产价

格. $dW_{1,t}, dW_{2,t}, dW_{3,t}$ 三个布朗运动之间相互独立, ρ 为 $dW_{1,t}, dW_{2,t}$ 的相关系数. κ, α 分别为 v_t, r_t 的均值回复速率, θ, β 分别为 v_t, r_t 的长期均值, σ, η 分别为 v_t, r_t 的波动率.

2.4 相关定义与引理

期权定价的理论思想来源于对冲证券组合理论. 也就是说在均衡条件下, 投资者零投资则零收益, 且投资者的平均收益与资产风险正相关. 从 B-S 定价公式的推导过程可以看出期权定价其实与这一理论思想是一致的, 它的出现也实现了复杂的数学知识与财富之间的转换. 接下来基于 B-S 定价理论给出本文涉及到的相关定义和引理.

定义 2.2^[50] (无套利市场) 不存在不付出代价或不承担风险就能获得额外收益机会的市场, 也就是说“天下没有免费的午餐”.

定义 2.3^[50] (完备市场) 如果一个金融市场中的每个未定权益在该市场中都可以被某一个交易策略所复制, 则称这个市场是完备的.

定义 2.4^[50] (风险中性定价原理) 当对衍生品进行定价时, 所有投资者都是风险中性的. 此时, 所有证券的预期收益率等于无风险利率, 所有现金流都应使用无风险利率折现得到现值.

定义 2.5^[30] (Itô 公式) 设

$$dX(t) = udt + vdB(t),$$

是一个 n 维 Itô 过程, 其中 $X(t)$ 为标的资产, $B(t)$ 是布朗运动, u 为漂移率, v 为股票的波动率. $g(t, x) = (g_1(t, x), \dots, g_p(t, x))$ 是一个从 $[0, \infty) \times R^n \rightarrow R^p$ 的 C^2 映射. 则过程

$$Y(t, \omega) = g(t, X(t)),$$

是一个 Itô 过程, k, Y_k 满足下式

$$dY_k = \frac{\partial g_k}{\partial t}(t, X)dt + \sum_i \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(t, X)dX_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i \partial x_j}(t, X)dX_i dX_j,$$

其中 $dB_i dB_j = \delta_{i,j} dt, dB_i dt = dt dB_i = 0$.

定义 2.6^[48] (Radon-Nikodym 导数) 设 (Ω, \mathbb{F}, P) 是概率空间, \tilde{P} 是 P 在 (Ω, \mathbb{F}) 上的等价概率测度, Z 是 (Ω, \mathbb{F}) 上几乎必然为正的随机变量, 且 $EZ = 1$. 对于 $A \in \mathbb{F}$, \tilde{P} 和 P 满足

$$\tilde{P}(A) = \int_A Z(\omega) dP(\omega),$$

则称 Z 是 \tilde{P} 关于 P 的 Radon-Nikodym 导数, 记为:

$$Z = \frac{d\tilde{P}}{dP}.$$

定义 2.7^[12] (局部 Lipschitz 条件) 假设对于任意整数 $n \geq 1$, 存在一个正整数 C_n , 使得所有的 $t \in [0, T], x, \bar{x}, y, \bar{y} \in R^d$ 且 $|x| \vee |\bar{x}| \vee |y| \vee |\bar{y}| \leq n$, 则如下不等式成立

$$|f(t, x, y) - f(t, \bar{x}, \bar{y})| + |g(t, x, y) - g(t, \bar{x}, \bar{y})| \leq C_n (|x - \bar{x}| + |y - \bar{y}|)$$

(线性增长条件) 假设对于每一个整数 $n \geq 1$, 都存在一个正整数 C , 使得如下不等式成立

$$|f(t, x, y)| + |g(t, x, y)| \leq C(1 + |x| + |y|),$$

其中 $(t, x, y) \in [0, T] \times R^d \times R^d$.

引理 2.2^[48] (Feynman-Kac 定理) 设存在一个随机微分方程

$$dX(u) = \beta(u, X(u))du + \gamma(u, X(u))dW(u),$$

给定 $h(X(T))$ 是 Borel 可测函数, $T > 0, t \in [0, T]$. 又定义函数

$$g(t, x) = E^{t,x} h(X(T)),$$

且对所有的 t 和 x 有 $E^{t,x} |h(X(T))| < \infty$. 则可得函数 $g(t, x)$ 满足如下偏微分方程

$$g(t, x) + \beta(t, x) g_x(t, x) + \frac{1}{2} \gamma^2(t, x) g_{xx}(t, x) = 0,$$

其中 $g(T, x) = h(x), \forall x \in R$.

引理 2.3^[12] 对于 $p > 2$, 存在一个常数 D 使得如下不等式成立

$$E \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |g_t|^p \right] \vee E \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |y_t|^p \right] \leq D, \quad t \in [0, T].$$

3 带跳的 Heston-CIR 混合模型下的欧式期权定价

实际金融产品价格会受外部重大事件(如地震等)影响而发生较大幅度的变化,通常采用跳扩散模型描述这一现象.虽然 Heston 模型相较于经典的 B-S 模型能够更精确地捕捉金融产品表现出的“波动率微笑”和厚尾特征,但是它没有考虑利率的随机性,也无法描述外部因素对产品价格的影响.因此这一节将 Heston 随机波动率模型与 CIR 随机利率模型结合,并引入跳扩散过程,即构造出风险中性条件下带跳的 Heston-CIR 混合动态模型,其次通过测度变换将其变换到远期测度下,最后用 FFT 方法求解期权价格.

3.1 模型动态及其测度变换

假设 (Ω, \mathbb{F}, Q) 是关于域流 $\mathbb{F}(t)(0 \leq t \leq T)$ 的一个概率空间, Q 表示风险中性测度, $B_t, W_{V,t}, W_{r,t}$ 是该空间上的布朗运动, $\{N_t\}$ 表示强度为常数 $\lambda(\lambda > 0)$ 的泊松过程,且 $\{N_t\}$ 与 $B_t, W_{V,t}, W_{r,t}$ 相互独立, $\mathbb{F}(t)$ 是由泊松过程和这些布朗运动生成的域流,则带跳的 Heston-CIR 混合模型下的资产价格满足如下方程

$$dS_t = r_t S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dB_t + (e^{J_i} - 1) S_t dN_t - E\{(e^{J_i} - 1) S_t dN_t\}, \quad (3.1)$$

$$dV_t = \alpha(\beta - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t}dW_{V,t}, \quad (3.2)$$

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \xi\sqrt{r_t}dW_{r,t}, \quad (3.3)$$

且

$$dB_t \cdot dW_{V,t} = \rho dt,$$

$$dB_t \cdot dW_{r,t} = 0,$$

$$dW_{r,t} \cdot dW_{V,t} = 0.$$

其中 V_t 表示波动率, r_t 表示无风险利率, S_t 表示标的资产价格, ρ 为 dB_t 与 $dW_{V,t}$ 的相关系数, 参数 $\alpha, \beta, \kappa, \theta, \sigma, \xi$ 都为常数. $J_i \sim N(\mu, \gamma^2)(i=1, 2, \dots, N, \gamma > 0)$ 为独立且同分布的随机变量, N 表示发生跳的次数, e^{J_i} 表示跳跃的幅度且服从对数正态

分布, S_{t-} 表示跳跃前一刻 S_t 的价格, e^{J_i} 与 S_t 相互独立.

假设在很小的时间间隔 (dt) 内只发生一次跳跃, 前后两次跳跃之间是相互独立的且同时发生的概率为 0, 则可得

$$E\{(e^{J_i} - 1)S_{t-}dN_t\} = \lambda \left(e^{\mu + \frac{1}{2}\gamma^2} - 1 \right) S_{t-}dt = \lambda m S_t dt, \quad (3.4)$$

其中 $m = e^{\mu + \frac{1}{2}\gamma^2} - 1$.

将式(3.4)代入式(3.1)整理得

$$dS_t = (r_t - \lambda m)S_t dt + \sqrt{V_t}S_t dB_t + (e^{J_i} - 1)S_{t-}dN_t. \quad (3.5)$$

为了方便计算记 $J = J_i (i=1, 2, \dots, N)$, 令 $X_t = \ln S_t$ 由 Itô 公式与文献[27]可得

$$dX_t = S_t^{-1}dS_t^L - \frac{1}{2}S_t^{-1}dS_t^L \cdot dS_t^L + (J-1)X_{t-}dN_t, \quad (3.6)$$

其中 $\begin{cases} dS_t^L = (r_t - \lambda m)S_t dt + \sqrt{V_t}S_t dB_t, \\ dS_t^L \cdot dS_t^L = S_t^2 V_t dt \end{cases}$, X_{t-} 表示发生跳跃前一刻 X_t 的价格, dS_t^L 表

示随机微分方程解的连续部分.

最终可得带跳的混合 Heston-CIR 动态模型下的对数资产满足如下方程

$$dX_t = \left(r_t + \frac{V_t}{2} - \lambda m \right) dt + \sqrt{V_t} dB_t + (J-1)X_{t-}dN_t, \quad (3.7)$$

$$dV_t = \alpha(\beta - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t}dW_{V,t},$$

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \xi\sqrt{r_t}dW_{r,t}.$$

鉴于定价模型(3.1)-(3.3)在 Q 下涉及多个随机变量不能直接解得此模型下的期权价格, 因此先将 Q 下的定价公式变换到远期测度 (Q^T) 下, 并得到 Q^T 下的动态模型, 然后用 FFT 方法求解 Q^T 下的期权价格.

在风险中性条件下满足方程(3.1)-(3.3)的期权价格公式为

$$U(S, V, r, t) = \frac{1}{D(t)} E \left[D(T) (S_T - K)^+ \right], \quad (3.8)$$

其中 S 满足式(3.1), V 满足式(3.2), r 满足式(3.3), $D(t) = \exp \left\{ -\int_0^t R(u) du \right\}$.

接下来对式(3.8)进行测度变换, 将其从 Q 变换到 Q^T 下. 假设 $P(r, t, T)$ 为零息债券, 由 Radon-Nikodym 导数的定义可知

$$Z(t) = \frac{1}{P(r, t, T)},$$

则可得

$$\begin{aligned} U(S, V, r, t) &= P(r, t, T) E \left[Z(T) (S_T - K)^+ \right] \\ &= P(r, t, T) E^T \left[(S_T - K)^+ \right]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

同时, 由文献[16]的测度变换方法可得 Q^T 下带跳的 Heston-CIR 混合动态模型为

$$dX_t = \left(r_t - \frac{V}{2} - \lambda m \right) dt + \sqrt{V_t} dB_t + (J-1) X_{t-} dN_t, \quad (3.10)$$

$$dV_t = \alpha (\beta - V_t) dt + \sigma \sqrt{V_t} dW_{V,t}, \quad (3.11)$$

$$dr_t = \left[\kappa \theta - (\kappa + I \xi^2) \right] dt + \sigma \sqrt{r_t} dW_{r,t}. \quad (3.12)$$

经过变换期权价格可通过求解式(3.9)得到, 其中 $P(r, t, T)$ 的特征函数由引理 1 可得.

引理 3.1^[16] 假设利率模型服从式(3.3), 则远期测度 Q^T 下零息债券的特征函数为

$$P(r, t, T) = e^{H(t, T) - I(t, T)r}, \quad (3.13)$$

其中

$$H(t, T) = -\kappa \theta \left\{ \frac{1}{(a - \kappa)(a + \kappa)} \ln \left[\frac{2a + (a + \kappa)(e^{a(T-t)} - 1)}{2a} + \frac{2}{\kappa - a}(T - t) \right] \right\}, \quad (3.14)$$

$$I(t, T) = \frac{2(e^{a(T-t)} - 1)}{2a + (\kappa + a)(e^{a(T-t)} - 1)}, \quad (3.15)$$

$$a = \sqrt{\kappa + 2\xi^2},$$

且满足边界条件 $P(r, T, T) = 1$.

3.2 欧式看涨期权价格公式

FFT 方法求解期权价格的重点主要是特征函数的应用,下面给出 Q^T 下混合动态模型下期权价格的推导过程.

定理 3.1 设标的资产满足式(3.10), 波动率满足式(3.11), 利率满足式(3.12), 则带跳的 Heston-CIR 混合动态模型下关于标的资产 X_t 的特征函数为

$$F(\varphi; \tau, x, v, r) = \exp \{ A(\tau, \varphi) + B(\tau, \varphi)v + C(\tau, \varphi)r + i\varphi x \}, \quad (3.16)$$

其中

$$A(\tau, \varphi) = \frac{\alpha\beta}{\sigma^2} \left[(\alpha - i\varphi\rho\sigma + \Delta)\tau - 2\ln \frac{1 - ae^{\Delta\tau}}{1 - a} \right] \\ + \alpha\beta \int_0^\tau \frac{2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)b_{n+1}\tau^n}{\xi^2 \sum_{n=0}^{\infty} b_n\tau^n} dt - i\varphi\lambda m\tau + \Lambda(\varphi)\tau,$$

$$B(\tau, \varphi) = \frac{\alpha - i\varphi\rho\sigma + \Delta}{\sigma^2} \left(\frac{1 - e^{\Delta\tau}}{1 - de^{\Delta\tau}} \right),$$

$$C(\tau, \varphi) = \frac{2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)b_{n+1}\tau^n}{\xi^2 \sum_{n=0}^{\infty} b_n\tau^n},$$

$$d = \frac{\Delta - i\varphi\rho\sigma + \alpha}{\alpha - i\varphi\rho\sigma}, \Delta = \sqrt{(i\varphi\rho\sigma - \alpha)^2 + \xi^2 (i\varphi + \varphi^2)}, \tau = T - t.$$

$$b_{n+1} = -\frac{M}{2m(n+1)(n+2)}, n \geq 0, b_0 = 1, b_1 = 0,$$

$$M = 2\kappa m(n+1)b_{n+1} + i\varphi\xi^2 mb_n + (\kappa + m) \sum_{j=1}^n (n+2-j)(n+1-j)c_j b_{n+2-j}$$

$$+ (\kappa^2 + \kappa m + 2\xi^2) \sum_{j=1}^n (n+1-j)c_j b_{n+1-j} + \frac{1}{2}i\varphi\xi^2 (\kappa + m) \sum_{j=1}^n c_j b_{n-j},$$

$$c_j = \frac{m^n}{n!}.$$

证明: 根据特征函数定义可得

$$F(\varphi; \tau, x, v, r) = E^T \left[e^{i\varphi X_\tau} \mid X_t = x, V_t = v, r_t = r \right], \quad (3.17)$$

其中 $\tau = T - t$, $F|_{t=T} = e^{i\varphi x}$. 又根据 Itô 公式对式(3.17)求导得

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &= \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial v} dv + \frac{\partial F}{\partial r} dr + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} dv dv + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} dr dr + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial v} dx dv \\ &= \frac{\partial F}{\partial t} dt + \left[\left(r - \frac{v}{2} \right) dt + \sqrt{v} dB_t \right] \frac{\partial F}{\partial x} \\ &\quad + \left[\alpha(\beta - v) dt + \sqrt{v} dW_{v,t} \right] \frac{\partial F}{\partial v} \\ &\quad + \left\{ \left[\kappa\theta - (\kappa - I\xi^2) r \right] dt + \xi \sqrt{r} dW_{r,t} \right\} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{v}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sigma^2 v^2 \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} dt + \frac{1}{2} \xi^2 r \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} dt + \rho \sigma v \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial v} dt. \end{aligned}$$

设 $q(J)$ 为随机变量 J 的密度函数, 根据广义 Feynman-Kac 定理得

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} + \left(r - \frac{v}{2} - \lambda m \right) \frac{\partial F}{\partial x} + \alpha(\beta - v) \frac{\partial F}{\partial v} + \left[\kappa\theta - (\kappa + I\xi^2) r \right] \frac{\partial F}{\partial r} \\ + \frac{v}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \xi^2 r \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \rho \sigma v \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial v} \\ + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \left[F(T-t, x + J, v, r, \varphi) - F(T-t, x, v, r, \varphi) \right] q(J) dJ = 0. \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} + \left(r - \frac{v}{2} - \lambda m \right) \frac{\partial F}{\partial x} + \alpha(\beta - v) \frac{\partial F}{\partial v} + \left[\kappa\theta - (\kappa + I\xi^2) r \right] \frac{\partial F}{\partial r} \\ + \frac{v}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \xi^2 r \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \rho \sigma v \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial v} + \Lambda(\varphi) F = 0, \quad (3.18) \end{aligned}$$

其中 $\Lambda(\varphi) = \lambda \left(e^{i\varphi\mu - \frac{1}{2}\varphi^2\gamma^2} - 1 \right)$.

将式(3.16)代入式(3.18)得下列常微分方程

$$-\frac{dA(\tau, \varphi)}{dt} = \alpha\beta B + \kappa\theta C - i\varphi\lambda m + \Lambda(\varphi), \quad (3.19)$$

$$-\frac{dB(\tau, \varphi)}{dt} = \frac{1}{2}\xi^2 B^2 + (i\varphi\rho\sigma - \alpha)B - \frac{1}{2}\varphi(i + \varphi), \quad (3.20)$$

$$-\frac{dC(\tau, \varphi)}{dt} = \frac{1}{2}\xi^2 C^2 - (\kappa + I\xi^2)C + i\varphi. \quad (3.21)$$

满足边界条件 $A(0, \varphi) = B(0, \varphi) = C(0, \varphi) = 0$.

接下来分别求解式(3.19)、(3.20)和(3.21).

用分离变量法求解式(3.20), 令

$$B(\tau, \varphi) = \frac{-2y'}{\xi^2 y}, \quad (3.22)$$

将式(3.22)代入式(3.20)整理得

$$y'' - (i\varphi\rho\sigma - \alpha) - \frac{1}{4}\varphi(i + \varphi)\xi^2 y^2 = 0. \quad (3.23)$$

在这里设 $y'(0) = 0$, 解二阶线性常微分方程(3.23)得

$$y = C_1 e^{d^+\tau} + C_2 e^{d^-\tau}, \quad (3.24)$$

其中 C_1, C_2 为常数,

$$d^+ = \frac{(i\varphi\rho\sigma - \alpha) + \Delta}{2},$$

$$d^- = \frac{(i\varphi\rho\sigma - \alpha) - \Delta}{2},$$

$$\Delta = \sqrt{(i\varphi\rho\sigma - \alpha)^2 + \xi^2(i\varphi + \varphi^2)}.$$

根据 $y'(0) = 0$ 这个初始条件得

$$\frac{C_1}{C_2} = -\frac{d^-}{d^+}, \quad (3.25)$$

将式(3.25)和(3.24)代入式(3.22)整理最终得

$$B(\tau, \varphi) = \frac{\alpha - i\varphi\rho\sigma + \Delta}{\sigma^2} \left(\frac{1 - e^{\Delta\tau}}{1 - de^{\Delta\tau}} \right),$$

$$\text{其中 } d = \frac{\Delta - i\varphi\rho\sigma + \alpha}{\alpha - i\varphi\rho\sigma}.$$

常微分方程(3.21)的解可由文献[16]得, 再将式(3.20)、(3.21)的解代入式(3.19), 两边同时积分, 得式(3.19)的解, 则定理 3.1 得证.

接下来, 在方程(3.10)、(3.11)和(3.12)下, 用 FFT 方法求解期权价格, 为了方便计算取零息债券 $P(r, t, T)$ 中的 t 为 0, 即 $P(r, 0, T)$. 则期权价格

$$U(K, T) = P(r, 0, T) E^T \left[(S_T - K)^+ \right]. \quad (3.26)$$

首先, 设 $X_t = \ln S_t, k = \ln K$, 则式(3.28)可改写为

$$U(k, T) = P(r, 0, T) E^T \left[(e^{X_T} - e^k)^+ \right]. \quad (3.27)$$

在式(3.27)中当 $k \rightarrow -\infty$ 时, $U(k, T)$ 不是均方可积的, 则引入调整后 $u(k, T)$ ^[10]

$$u(k, T) = e^{bk} U(k, T), b > 0. \quad (3.28)$$

然后, 根据傅里叶变换和傅里叶逆变换公式得

$$F_{U_T}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\varphi k} U(k, T) dk, \quad (3.29)$$

$$U(k, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\varphi k} F_{U_T}(\varphi) d\varphi, \quad (3.30)$$

其中 $F_{U_T}(\varphi)$ 为 $U(k, T)$ 的特征函数.

将式(3.27)代入式(3.29)得

$$\begin{aligned} F_{U_T}(\varphi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\varphi k} U(k, T) dk = P(r, 0, T) \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\varphi - (1+b)i)X_T} q_T(X_T) dX_T}{(1+b+i\varphi)(b+i\varphi)} \\ &= P(r, 0, T) G_{U_T}(\varphi), \end{aligned} \quad (3.31)$$

其中 $G_{U_T}(\varphi) = \frac{\Phi_T(\varphi - (b+1)i)}{(1+b+i\varphi)(b+i\varphi)}$, $\Phi_T(\varphi - (b+1)i)$ 为 X_T 的特征函数, $q_T(X_T)$ 为

X_T 的密度函数.

将式(3.30)代入式(3.28)得

$$U(K, T) = \frac{e^{-bk}}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-i\phi k} F_{U_T}(\phi) d\phi. \quad (3.32)$$

最后, 根据 FFT 算法^[10]得

$$\begin{aligned} U(K, T) &\approx P(r, 0, T) \frac{e^{-bk_u}}{\pi} \sum_{j=1}^N e^{-i\omega k} G_{U_T}(\phi_j) \eta \\ &= P(r, 0, T) \frac{e^{-bk_u}}{\pi} \sum_{j=1}^N e^{-i\frac{2\pi}{N}(j-1)(u-1)} e^{ibv_j} G_{U_T}(v_j) \frac{\eta}{3} [3 + (-1)^j - \delta_{j-1}], \end{aligned}$$

其中 $v_j = \eta(j-1)$, $b = \frac{\pi}{\eta}$, $k_u = -b + \frac{2b}{N}(u-1)$, $u = 1, 2, \dots, N+1$, $\delta_j = \begin{cases} 1 & j=0 \\ 0 & j \neq 0 \end{cases}$ 为克罗

内克符号函数.

由此, 通过采用上述高效快速的 FFT 方法, 欧式期权的价格即得.

4 混合分形 Heston-CIR 模型下的美式期权定价

美式期权作为研究最广泛的期权之一,其价值一般高于欧式期权,特别是美式看跌期权.因为美式期权的持有者可以在合约规定日期内的任意时刻进行交割,无法直接得到其闭形式解,故通常利用数值模拟方法求解其价格.金融现实表明衍生品收益率具有长相依性和自相似性,遗憾的是 Heston-CIR 模型由标准布朗运动驱动,无法刻画这一特性.而混合分形布朗运动具有长相依性,特别是当 Hurst 指数 $H \in (3/4,1)$ 它不但没有套利机会而且等价于布朗运动,因此将 Heston-CIR 模型由标准布朗运动驱动替换为由混合分数布朗运动驱动.首先,构建混合分形 Heston-CIR 模型刻画标的资产价格变化.然后运用随机分析方法证明该模型解的存在唯一性,并讨论 Euler 离散化的强收敛性.

4.1 模型解的存在性和唯一性

混合分形 Heston-CIR(mfH-CIR)模型具有利率、波动率随机性,波动率微笑和长相依等优点,且当 $H \in (3/4,1)$ 时混合分形布朗运动等价于布朗运动.下面给出当 $H \in (3/4,1)$ 时,该模型下解的存在性和唯一性以及 Euler 法的强收敛性的证明过程.假设在风险中性条件下, mfH-CIR 模型下标的资产的动态模型如下

$$\frac{dS_t}{S_t} = r_t dt + \sqrt{v_t} dM_{1,t}^H, \quad (4.1)$$

$$dv_t = \kappa_v (\theta_v - v_t) dt + \sigma_v \sqrt{v_t} dM_{2,t}^H, \quad (4.2)$$

$$dr_t = \kappa_r (\theta_r - r_t) dt + \sigma_r \sqrt{r_t} dM_{3,t}^H, \quad (4.3)$$

$$dM_{1,t}^H \cdot dM_{2,t}^H = \rho(dt^{2H} + dt),$$

$$dM_{1,t}^H \cdot dM_{3,t}^H = 0,$$

$$dM_{2,t}^H \cdot dM_{3,t}^H = 0.$$

其中 $M_{i,t}^H$ ($M_{i,t}^H = aB_{i,t} + bB_{i,t}^H, i = 1, 2, 3$) 为混合分形布朗运动, $H \in (3/4,1)$ 为 Hurst 指数, S_t 为标的资产, v_t, r_t 分别表示波动率和利率, $\kappa_v, \kappa_r, \theta_v, \theta_r$ 分别表示 v_t, r_t 的平

均回归速率和长期均值, σ_v, σ_r 是随机过程 v_t 和 r_t 的波动率, ρ 为 $B_{i,t}$ 与 $B_{i,t}^H$ 的相关系数.

定理 4.1 假设 $f(\cdot, \cdot): [0, T] \times R^d \rightarrow R^n$, $g(\cdot, \cdot): [0, T] \times R^d \rightarrow R^n$ 为局部 Lipschitz 函数且定义 2.7 成立, 则 mfH-CIR 模型下的随机微分方程

$$dS_t = f(t, S_t, v_t, r_t)dt + g(t, S_t, v_t, r_t)dM_{1,t}^H, \quad (4.4)$$

存在唯一解 $S_t, t \in [0, T]$.

证明 首先证明方程(4.4)解的唯一性. 令 \hat{S}_t 和 \bar{S}_t 是式(4.4)的两个解, 对于所有的整数 $n \geq 1$ 定义

$$\hat{\tau}_n = \inf \{t \in [0, T] : |v_t| \geq n\},$$

$$\bar{\tau}_n = \inf \{t \in [0, T] : |r_t| \geq n\}.$$

令 $\tau_n = \hat{\tau}_n \wedge \bar{\tau}_n$, 则

$$\begin{aligned} & E \left[\sup_{u \leq t \wedge \tau_n} |\hat{S}_u - \bar{S}_u|^2 \right] \\ &= E \left[\int_0^{t \wedge \tau_n} \left(f(s, \hat{S}_s, v_s, r_s) - f(s, \bar{S}_s, v_s, r_s) \right) ds \right. \\ & \quad \left. + \sup_{u \leq t \wedge \tau_n} \int_0^u \left(g(s, \hat{S}_s, v_s, r_s) - g(s, \bar{S}_s, v_s, r_s) \right) dM_{1s}^H \right]^2 \\ &\leq 2E \left[\int_0^{t \wedge \tau_n} \left(f(s, \hat{S}_s, v_s, r_s) - f(s, \bar{S}_s, v_s, r_s) \right) ds \right]^2 \\ & \quad + 2E \left[\sup_{u \leq t \wedge \tau_n} \int_0^u \left(g(s, \hat{S}_s, v_s, r_s) - g(s, \bar{S}_s, v_s, r_s) \right) dM_{1s}^H \right]^2, \end{aligned}$$

由 L^2 范数、Doob 不等式和 Itô 等距公式可得

$$E \left[\sup_{u \leq t \wedge \tau_n} |\hat{S}_u - \bar{S}_u|^2 \right]$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2E \left[\left| \int_0^{t \wedge \tau_n} \left(f(s, \hat{S}_s, v_s, r_s) - f(s, \bar{S}_s, v_s, r_s) \right) ds \right|^2 \right] \\
&\quad + 4a^2 E \left[\left| \sup_{u \leq t \wedge \tau_n} \int_0^u \left(g(s, \hat{S}_s, v_s, r_s) - g(s, \bar{S}_s, v_s, r_s) \right) dB_{1,s} \right|^2 \right] \\
&\quad + 4b^2 E \left[\left| \sup_{u \leq t \wedge \tau_n} \int_0^u \left(g(s, \hat{S}_s, v_s, r_s) - g(s, \bar{S}_s, v_s, r_s) \right) dB_{1,s}^H \right|^2 \right], \\
&\leq 2L^2 t E \left[\left| \int_0^{t \wedge \tau_n} \left(f(s, \hat{S}_s, v_s, r_s) - f(s, \bar{S}_s, v_s, r_s) \right) ds \right|^2 \right] \\
&\quad + 16L^2 (a^2 + b^2 t^{2H-1}) E \left[\left| \int_0^{t \wedge \tau_n} \left(g(s, \hat{S}_s, v_s, r_s) - g(s, \bar{S}_s, v_s, r_s) \right) ds \right|^2 \right],
\end{aligned}$$

接下来根据局部 Lipschitz 条件得

$$\begin{aligned}
&E \left[\sup_{u \leq t \wedge \tau_n} \left| \hat{S}_u - \bar{S}_u \right|^2 \right] \\
&\leq 2L^2 C_n^2 t \int_0^t E \left[\sup_{u \leq s \wedge \tau_n} \left| \hat{S}_u - \bar{S}_u \right| \right] ds + 16L^2 C_n^2 (a^2 + b^2 t^{2H-1}) \int_0^t E \left[\sup_{u \leq s \wedge \tau_n} \left| \hat{S}_u - \bar{S}_u \right| \right] ds \\
&= 2L^2 C_n^2 (t + 8a^2 + 8b^2 t^{2H-1}) \int_0^t E \left[\sup_{u \leq s \wedge \tau_n} \left| \hat{S}_u - \bar{S}_u \right| \right] ds,
\end{aligned}$$

最后根据 Gronwall 不等式可得, 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \infty$

$$E \left[\left| \hat{S}_t - \bar{S}_t \right|^2 \right] = 0.$$

到此解的唯一性得证, 接下来证明解的存在性.

定义 $S_t^{(0)} = S_0, S_t^{(k)} = S_t^{(k)}(\omega)$. 由此可得

$$S_t^{(k+1)} = S_0 + \int_0^t f(u, S_u^{(k)}, v_u, r_u) du + \int_0^t g(u, S_u^{(k)}, v_u, r_u) dM_{1,u}^H.$$

根据解的唯一性的类似推导方法可得

$$E \left[\sup_{u \leq t \wedge \tau_n} \left| S_u^{(k+1)} - S_u^{(k)} \right|^2 \right]$$

$$\leq 2L^2 C_n^2 (t + 8a^2 + 8b^2 t^{2H-1}) \int_0^t E \left[\left| S_u^{(k)} - S_u^{(k-1)} \right|^2 \right] du, k \geq 1, t \leq T.$$

根据归纳法可得

$$I_1 = E \left[\sup_{u \leq t \wedge \tau_n} \left| S_u^{(1)} - S_u^{(0)} \right|^2 \right] \leq 2L^2 C^2 (1 + t^2) \left(1 + E \left[|S_0|^2 + |v_0|^2 \right] \right) \leq A_1 t.$$

其中常数 A_1 , 仅依赖于 C, T 和 $E \left[|S_0|^2 + |v_0|^2 \right]$.

$$I_{k+1} = E \left[\sup_{u \leq t \wedge \tau_n} \left| S_u^{(k+1)} - S_u^{(k)} \right|^2 \right] \leq \frac{A_2^{k+1} t^{k+1}}{(k+1)!}, k \geq 0, t \in [0, T].$$

其中常数 A_2 依赖于 C, C_n, T 和 $E \left[|S_0|^2 + |v_0|^2 \right]$. $I_{k+1} = I_1 + \sum_{i=1}^k (I_{i+1} - I_i)$ 绝对收敛于 L^2

范数, 因此解的存在性得证. 证毕.

定理 4.2 假设 $\kappa_r \theta_r > \frac{\sigma_r^2}{2}$, 则混合分形 Heston-CIR 模型下的利率方程(4.3)存

在唯一解 $r_t, t \in [0, T]$.

证明 首先证明方程(4.3)解的唯一性, 令 \hat{r}_t 和 \bar{r}_t 是式(4.3)的两个解, 定义

$$\hat{\tau}_n = \inf \{ t \in [0, T] : |\hat{r}_t| \geq n \},$$

$$\bar{\tau}_n = \inf \{ t \in [0, T] : |\bar{r}_t| \geq n \}.$$

令 $\tau_n = \hat{\tau}_n \wedge \bar{\tau}_n$, 对所有的 $t \in [0, T]$ 有

$$\begin{aligned} & E \left[\left| \hat{r}_{t \wedge \tau_n} - \bar{r}_{t \wedge \tau_n} \right|^2 \right] \\ &= E \left[\left| \int_0^{t \wedge \tau_n} (-\kappa_r (\hat{r}_u - \bar{r}_u)) du + \int_0^{t \wedge \tau_n} \sigma_r (\sqrt{\hat{r}_u} - \sqrt{\bar{r}_u}) dM_{3u}^H \right|^2 \right] \\ &\leq 2E \left[\left| \int_0^{t \wedge \tau_n} (-\kappa_r (\hat{r}_u - \bar{r}_u)) du \right|^2 \right] + 2E \left[\left| \int_0^{t \wedge \tau_n} \sigma_r (\sqrt{\hat{r}_u} - \sqrt{\bar{r}_u}) dM_{3u}^H \right|^2 \right] \\ &\leq 2t\kappa_r^2 E \left[\int_0^{t \wedge \tau_n} |\hat{r}_u - \bar{r}_u|^2 du \right] + 4\sigma_r^2 (a^2 + b^2 t^{2H-1}) E \left[\int_0^{t \wedge \tau_n} |\sqrt{\hat{r}_u} - \sqrt{\bar{r}_u}|^2 du \right], \end{aligned}$$

$$\leq 2T\kappa_r^2 E \left[\int_0^{t \wedge \tau_n} |\hat{r}_u - \bar{r}_u|^2 du \right] + \frac{4\sigma_r^2 (a^2 + b^2 t^{2H-1})}{\varepsilon^2} E \left[\int_0^{t \wedge \tau_n} |\hat{r}_u - \bar{r}_u|^2 du \right],$$

其中 $\varepsilon = \min \left\{ (\sqrt{\hat{r}_t} + \sqrt{\bar{r}_t}) \mid t \in [0, T] \right\}$, 又根据局部 Lipschitz 条件可得

$$\begin{aligned} & E \left[|\hat{r}_{t \wedge \tau_n} - \bar{r}_{t \wedge \tau_n}|^2 \right] \\ & \leq 2 \left(T\kappa_r^2 + \frac{2\sigma_r^2 (a^2 + b^2 t^{2H-1})}{\varepsilon^2} \right) C_n^2 \int_0^t E \left[|\hat{r}_{u \wedge \tau_n} - \bar{r}_{u \wedge \tau_n}|^2 du \right] \end{aligned}$$

由 Gronwall 不等式可得, 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \infty$ 时

$$E \left[|\hat{r}_t - \bar{r}_t|^2 \right] = 0.$$

因此解的唯一性得证.

下面证明利率方程解的存在性, 首先令 $r_t^{(0)} = r_0, r_t^{(k)} = r_t^{(k)}(\omega)$. 则可得

$$r_t^{(k+1)} = r_0 + \int_0^t \kappa_r (\theta_r - r_t^{(k)}) du + \int_0^t \sigma_r \sqrt{r_t^{(k)}} dM_{3,u}^H.$$

根据解的唯一性的类似推导过程可得

$$E \left[|r_t^{(k+1)} - r_t^{(k)}|^2 \right] \leq 2 \left(T\kappa_r^2 + \frac{2\sigma_r^2 (a^2 + b^2 t^{2H-1})}{\varepsilon^2} \right) C_n^2 \int_0^t E \left[|r_t^{(k)} - r_t^{(k-1)}|^2 \right] du,$$

根据归纳法可得

$$\begin{aligned} I_1 &= E \left[|r_t^{(1)} - r_t^{(0)}|^2 \right] \\ &\leq 4t^2 \kappa_r^2 (\theta_r^2) + E \left[|r_0|^2 \right] + 4\sigma_r^2 (a^2 + b^2 t^{2H-1}) t E \left[|r_0| \right] \leq A_1 t, \end{aligned}$$

其中 A_1 仅依赖于 $C, T, E \left[|r_0|^2 \right]$ 和 $E \left[|r_0| \right]$.

$$I_{k+1} = E \left[|r_t^{(k+1)} - r_t^{(k)}|^2 \right] \leq \frac{A_2^{k+1} t^{k+1}}{(k+1)!}, k > 0, t \in [0, T],$$

其中 A_2 依赖于 $C, C_n, T, E \left[|r_0|^2 \right]$ 和 $E \left[|r_0| \right]$. $I_{k+1} = I_1 + \sum_{i=1}^k (I_{i+1} - I_i)$ 绝对收敛于 L^2 范

数, 因此解的存在性得证. 证毕.

4.2 Euler 格式离散化的强收敛性

下面给出 mfH-CIR 模型下关于随机利率方程 Euler 法的强收敛性的证明. 将连续时间段 $[0, T]$ 离散化为序列 $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$, 采用 Euler 法对方程(4.3) 进行近似逼近, 即 $X_k \approx r_{t_k}$ ($t_k = k\Delta t, \Delta t > 0$), 令 $X_0 = r_0$ 则

$$X_{k+1} = X_k + \kappa_r (\theta_r - X_k) \Delta t + \sigma_r \sqrt{X_k} \Delta M_{3,k}^H, \quad (4.5)$$

其中 $\Delta M_{3,k}^H = M_{3,t_{k+1}}^H - M_{3,t_k}^H$. 定义

$$\bar{X}_t = X_k + \kappa_r (\theta_r - X_k) \Delta t + \sigma_r \sqrt{X_k} (M_{3,t}^H - M_{3,t_k}^H), \quad t \in [t_k, t_{k+1}). \quad (4.6)$$

式(4.6)等价于下式

$$\bar{X}_t = X_0 + \int_0^t \kappa_r (\theta_r - X_u) du + \int_0^t \sigma_r \sqrt{X_u} dM_{3,u}^H, \quad (4.7)$$

其中 $X_t := X_k, t \in [t_k, t_{k+1})$. 记 $\bar{X}_{t_k} = X_{t_k} = X_k$, X_t 和 \bar{X}_t 是离散近似序列 $\{X_k\}$ 的连续时间扩展.

定理 4.3 在引理 2.3 成立的条件下, 有连续时间扩展(式(4.7))的 Euler 解(式(4.5))满足下式

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} E \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |\bar{X}_t - r_t|^2 \right] = 0.$$

证明 定义

$$\hat{\tau}_n = \inf \{t \in [0, T] : |\bar{X}_t| \geq n\},$$

$$\bar{\tau}_n = \inf \{t \in [0, T] : |r_t| \geq n\}.$$

令 $\tau_n = \hat{\tau}_n \wedge \bar{\tau}_n, e_t = \bar{X}_t - r_t$, 对 $\forall \delta > 0$, 根据鞅不等式和文献[10]可得

$$\begin{aligned} E \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |e_t|^2 \right] &= E \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |e_t|^2 I_{\{\hat{\tau}_n > T, \bar{\tau}_n > T\}} \right] + E \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |e_t|^2 I_{\{\hat{\tau}_n \leq T \text{ or } \bar{\tau}_n \leq T\}} \right] \\ &\leq E \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |e_{t \wedge \tau_n}|^2 I_{\{\tau_n > T\}} \right] + \frac{2\delta}{p} E \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |e_t|^p \right] \\ &\quad + \frac{1 - \frac{2}{p}}{\delta^{\frac{p-2}{2}}} P[\hat{\tau}_n \leq T \text{ or } \bar{\tau}_n \leq T] \end{aligned}$$

$$\leq E \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \bar{X}_{t \wedge \tau_n} - r_{t \wedge \tau_n} \right|^2 \right] + \frac{2^{p+1} \delta D}{p} + \frac{2(p-2)D}{p \delta^{\frac{2}{p-2}} n^p}. \quad (4.8)$$

为了计算式(4.8)不等号右边第一项, 记

$$r_{t \wedge \tau_n} = r_0 + \int_0^{t \wedge \tau_n} \kappa_r (\theta_r - r_u) du + \int_0^{t \wedge \tau_n} \sigma_r \sqrt{r_u} dM_{3,u}^H,$$

$$\bar{X}_{t \wedge \tau_n} = X_0 + \int_0^{t \wedge \tau_n} \kappa_r (\theta_r - X_u) du + \int_0^{t \wedge \tau_n} \sigma_r \sqrt{X_u} dM_{3,u}^H.$$

运用定理 4.2 证明解的唯一性的类似方法可得, 对 $\forall \tau \leq T$

$$E \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \bar{X}_{t \wedge \tau_n} - r_{t \wedge \tau_n} \right|^2 \right]$$

$$= E \left[\sup_{0 \leq t \leq \tau} \left| \int_0^{\tau \wedge \tau_n} -\kappa_r (X_u - r_u) du + \int_0^{\tau \wedge \tau_n} \sigma_r (\sqrt{X_u} - \sqrt{r_u}) dM_{3,u}^H \right|^2 \right]$$

$$\leq 2 \left(T \kappa_r^2 + \frac{2\sigma_r^2 (a^2 + b^2 t^{H-1})}{\varepsilon^2} \right) C_n^2 E \left[\int_0^{\tau \wedge \tau_n} |X_u - r_u|^2 du \right]$$

$$\leq 2 \left(T \kappa_r^2 + \frac{2\sigma_r^2 (a^2 + b^2 t^{H-1})}{\varepsilon^2} \right) C_n^2 E \left[\int_0^{\tau \wedge \tau_n} (|X_u - \bar{X}_u|^2 + |\bar{X}_u - r_u|^2) du \right]$$

$$\leq 2 \left(T \kappa_r^2 + \frac{2\sigma_r^2 (a^2 + b^2 t^{H-1})}{\varepsilon^2} \right) C_n^2 (\Pi_1 + \Pi_2). \quad (4.9)$$

$$\text{其中 } \Pi_1 = E \left[\int_0^{\tau \wedge \tau_n} |X_u - \bar{X}_u|^2 du \right], \Pi_2 = E \left[\int_0^{\tau} \sup_{0 \leq s \leq u} |\bar{X}_{s \wedge \tau_n} - r_{s \wedge \tau_n}|^2 du \right].$$

接下来计算 Π_1 , 给定 $u \in [0, T \wedge \tau_n)$, 令 $k_u, u \in [t_{k_u}, t_{k_u+1})$ 为整数, 则

$$X_u - \bar{X}_u = X_{k_u} - \left(X_{k_u} + \int_{t_{k_u}}^u \kappa_r (\theta_r - X_s) ds + \int_{t_{k_u}}^u \sigma_r \sqrt{X_s} dM_{3,s}^H \right)$$

$$\leq -\kappa_r (\theta_r - X_{k_u}) (u - t_{k_u}) - \sigma_r \sqrt{X_{k_u}} (M_{3,u}^H - M_{3,t_{k_u}}^H),$$

对 $\forall |y| \leq n$, 有

$$\left| X_u - \bar{X}_u \right|^2 \leq 2\kappa_r^2 (\theta_r - X_{k_u})^2 \Delta t^2 - \sigma_r^2 X_{k_u} \left| M_{3,u}^H - M_{3,t_{k_u}}^H \right|^2$$

$$\leq 4 \left(C_n |X_{k_u}|^2 + |\kappa_r (\theta_r - r_0)|^2 \vee |\sigma_r \sqrt{r_0}|^2 \right) \left(\Delta t^2 + \left| M_{3,u}^H - M_{3,t_{k_u}}^H \right|^2 \right),$$

由引理 2.3 和 Lyapunov 不等式, 可得

$$\begin{aligned}
\Pi_1 &\leq E \left[\int_0^{\tau \wedge \tau_n} 4 \left(C_n |X_{k_u}|^2 + |\kappa_r (\theta_r - r_0)|^2 \vee |\sigma_r \sqrt{r_0}|^2 \right) \left(\Delta t^2 + |M_{3,u}^H - M_{3,t_{k_u}}^H|^2 \right) du \right] \\
&\leq \int_0^{\tau} 4 \left(C_n E \left[|X_{k_u}|^2 \right] + |\kappa_r (\theta_r - r_0)|^2 \vee |\sigma_r \sqrt{r_0}|^2 \right) \\
&\quad \cdot \left(\Delta t^2 + \left(a^2 E \left[|B_{3,1}|^2 \right] \Delta t + b^2 E \left[|B_{3,1}^H|^2 \right] \Delta t^{2H} \right) \right) du \\
&\leq 4T \left(C_n D^{\frac{2}{p}} + |\kappa_r (\theta_r - r_0)|^2 \vee |\sigma_r \sqrt{r_0}|^2 \right) \left[\Delta t^2 + a^2 E \left[|B_{3,1}|^2 \right] \Delta t + b^2 E \left[|B_{3,1}^H|^2 \right] \Delta t^{2H} \right].
\end{aligned}$$

由式(4.9)可得

$$E \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |\bar{X}_{t \wedge \tau_n} - r_{t \wedge \tau_n}|^2 \right] = m_1 m_2 + m_1 \Pi_2,$$

其中

$$\begin{aligned}
m_1 &= 2 \left(T \kappa_r^2 + \frac{2\sigma_r^2 (a^2 + b^2 t^{H-1})}{\varepsilon^2} \right) C_n^2, \\
m_2 &= 4T \left(C_n D^{\frac{2}{p}} + |\kappa_r (\theta_r - r_0)|^2 \vee |\sigma_r \sqrt{r_0}|^2 \right) \\
&\quad \cdot \left[\Delta t^2 + a^2 E \left[|B_{3,1}|^2 \right] \Delta t + b^2 E \left[|B_{3,1}^H|^2 \right] \Delta t^{2H} \right].
\end{aligned}$$

由 Gronwall 不等式, 可得

$$E \left[\sup_{0 \leq t \leq \tau} |\bar{X}_{t \wedge \tau_n} - r_{t \wedge \tau_n}|^2 \right] \leq m_1 m_2 e^{m_1 T}, \quad (4.10)$$

将式(4.10)带入式(4.8), 可得

$$E \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |e_t|^2 \right] \leq m_1 m_2 e^{m_1 T} + \frac{2^{p+1} \delta D}{p} + \frac{2(p-2)D}{p \delta^{\frac{2}{p-2}} n^p}.$$

$$\text{对 } \forall \xi > 0, \exists \delta \text{ 使得 } \frac{2^{p+1} \delta D}{p} \leq \frac{\xi}{3}, \exists n \text{ 使得 } \frac{2(p-2)D}{p \delta^{\frac{2}{p-2}} n^p} \leq \frac{\xi}{3}, \exists \Delta t \text{ 使得 } m_1 m_2 e^{m_1 T} \leq$$

$\frac{\xi}{3}$, 因此 $E \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |e_t|^2 \right] \leq \xi$. 证毕.

5 数值模拟

5.1 数据的统计特征

从 Wind 数据库中选取 2020 年 7 月 1 日到 2020 年 11 月 30 日的上证 50ETF 日收盘价格数据, 根据历史数据计算它的对数收益率, 并采用 R 软件做描述性统计分析, 结果如下所示.

表 5.1 上证 50ETF 对数收益率的描述性统计量

标的资产	均值	方差	标准差	偏度	峰度	JB 统计量
上证 50ETF	0.00168	0.00024	0.01561	1.44566	8.13194	333.1614

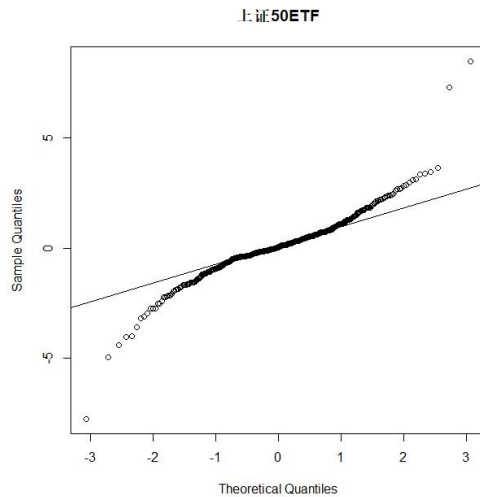


图 5.1 上证 50ETF 对数收益率 Q-Q 图

如表 5.1 所示, 上证 50ETF 的对数收益率的偏度值为 $1.44566 > 0$, 峰度值为 $8.13194 > 3$, 相比正态分布的峰度更高且右侧拖尾, 呈现出尖峰、厚尾的特征, 由 JB 统计量的数值也可知收益率不满足正态性. 从标的资产收益率的 Q-Q 图 5.1 容易看出, 数据中间部分与直线基本重合, 而两端均偏离了直线, 则说明股票收益率不服从正态分布. 由此可见常数波动率的假设是不合理的.

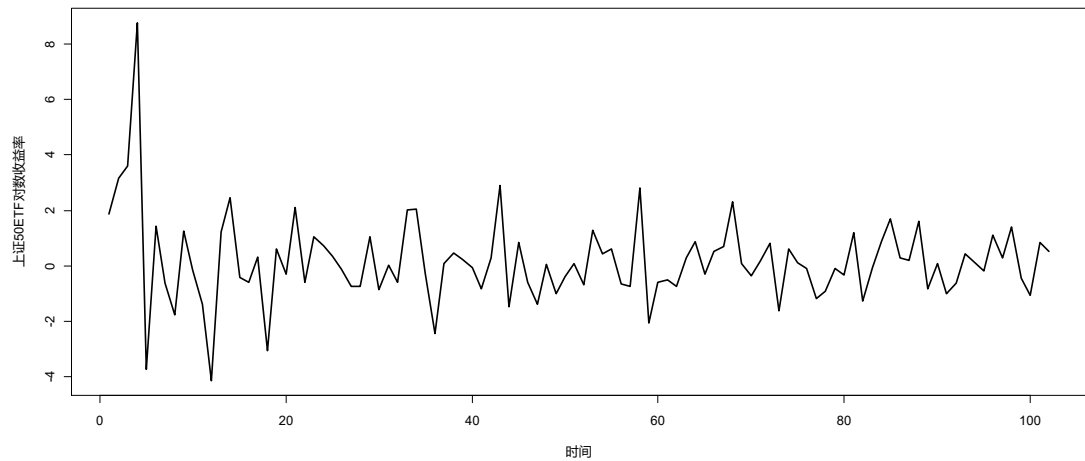
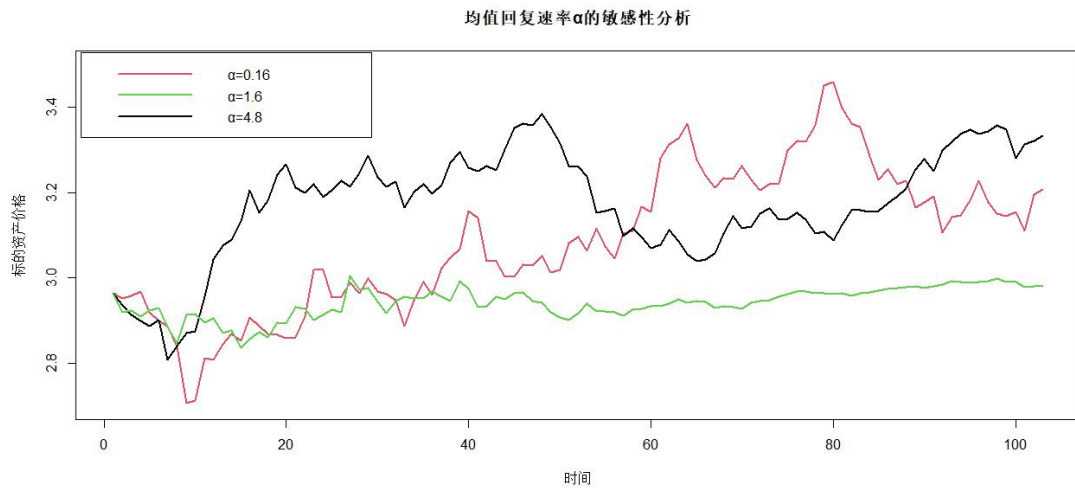


图 5.2 上证 50ETF 对数收益率

由图 5.2 可知,下一时段的标的物收益率会随着当前市场波动幅度的增大(减小)而增大(减小).也就是说,当前波动小则下一时段波动小,当前波动大则下一时段波动大,且大幅度波动与小幅度波动交替出现,这说明标的物的收益率具有波动聚集性和长记忆性.同时收益率数据出现了极端值,这说明标的物价格会发生跳跃现象.

5.2 敏感性分析

为了检验模型拟合真实数据的效果,在保持其他参数不变时对真实股票数据的相关参数做灵敏度分析,其他参数取值为 $v_0 = 0.02, r_0 = 0.05, dt = 0.01, \tau = 1, \gamma = 0.25, \rho = 0.4, \lambda = 0.0096, \mu = 0.0217$. 分析结果如下.



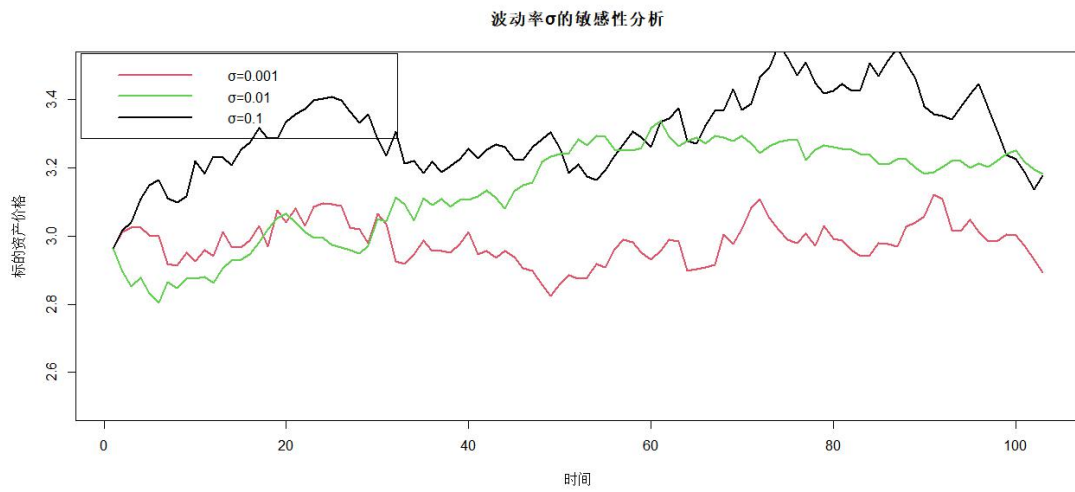
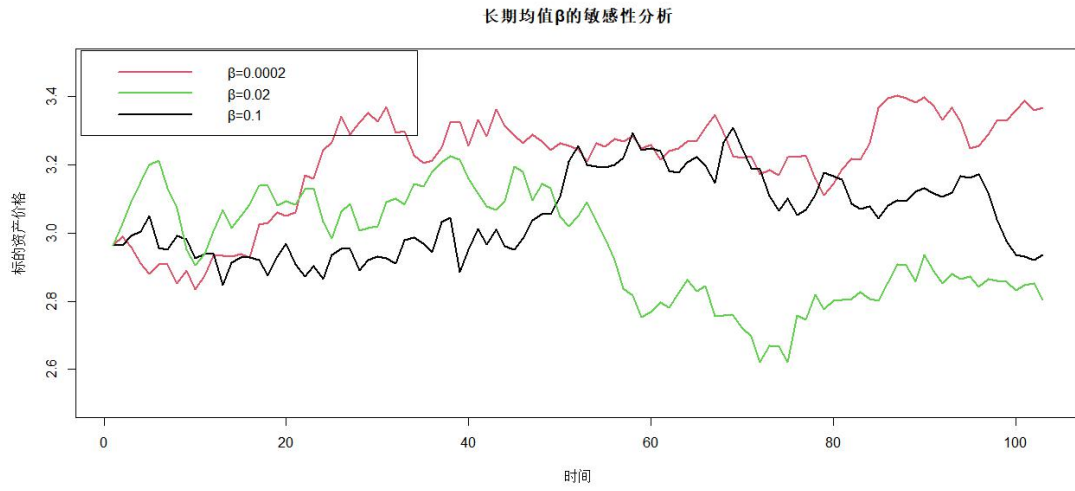
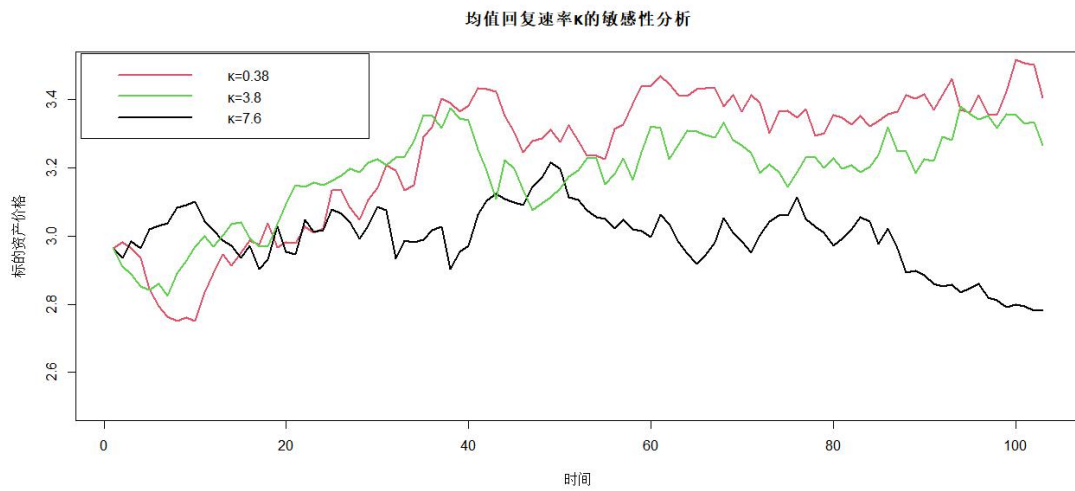


图 5.3 随机波动率过程参数的敏感性分析



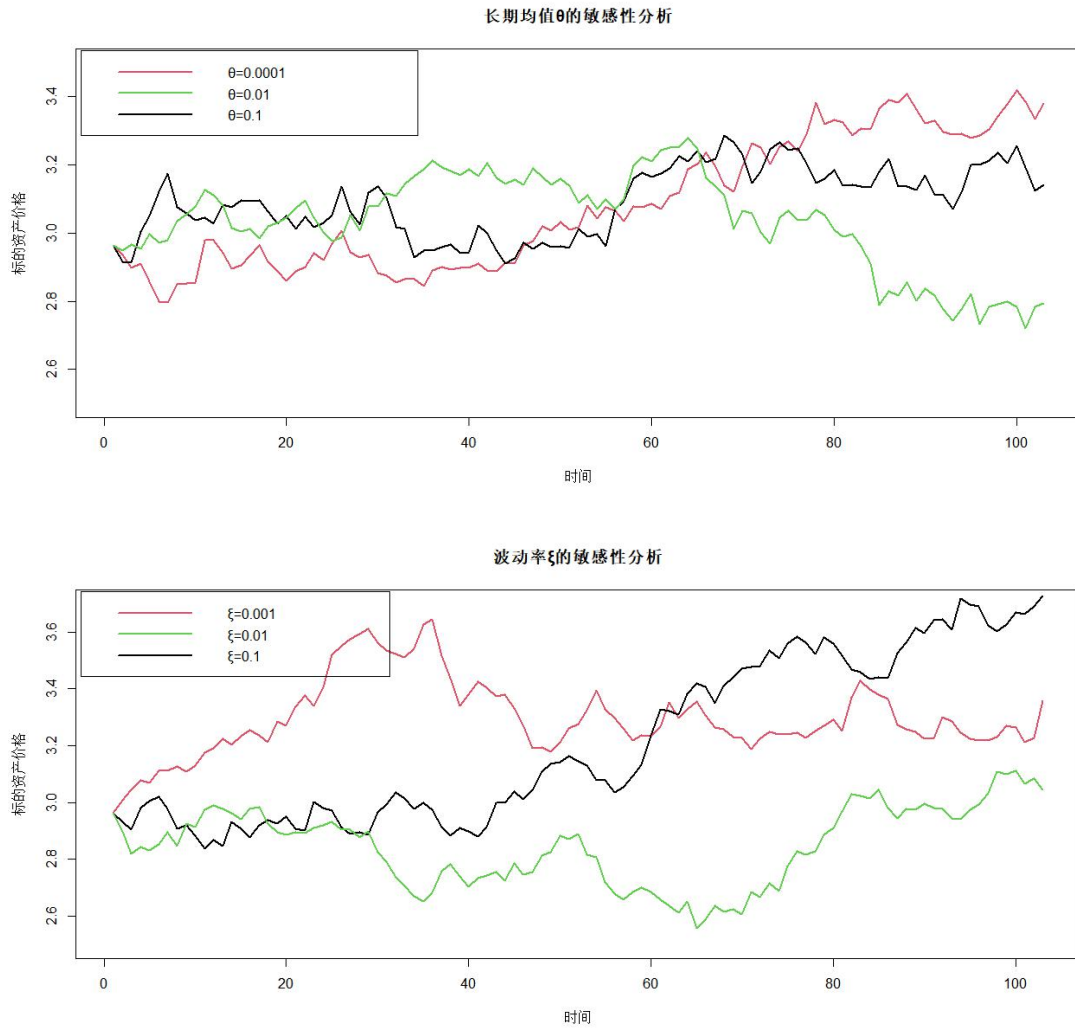


图 5.4 随机利率过程参数的敏感性分析

图 5.3 和 5.4 为模型中各个参数的敏感性分析结果, 模型中的参数对标的资产价格有显著影响. 均值回复速率 α, κ 的取值越大则回复的频率会越高, 长期均值 β, θ 与资产价格的“微笑”效应有密切关联, 换言之它们的取值越小, 波动越显著. σ, ξ 的取值越大则标的资产价格的波动越剧烈.

5.3 模拟结果

5.3.1 欧式期权

运用 Monte Carlo 法通过 R 软件模拟了 Heston 模型, 带跳的 Heston-CIR 混合

模型下的标的物价格路径,并将上述模型下的股票价格路径与真实路径作比较.首先,用欧拉离散化技术对标的资产价格、波动率、利率和跳过程分别进行离散化,通过敏感度分析确定主要参数取值,其中 $\alpha = 0.1608$, $\beta = 0.000184$, $\sigma = 0.00138$, $\kappa = 0.38$, $\theta = 0.001$, $\xi = 0.001$;然后,利用 Monte Carlo 法模拟标的物价格变化情况;最后,得到不同模型下的资产路径的如下.

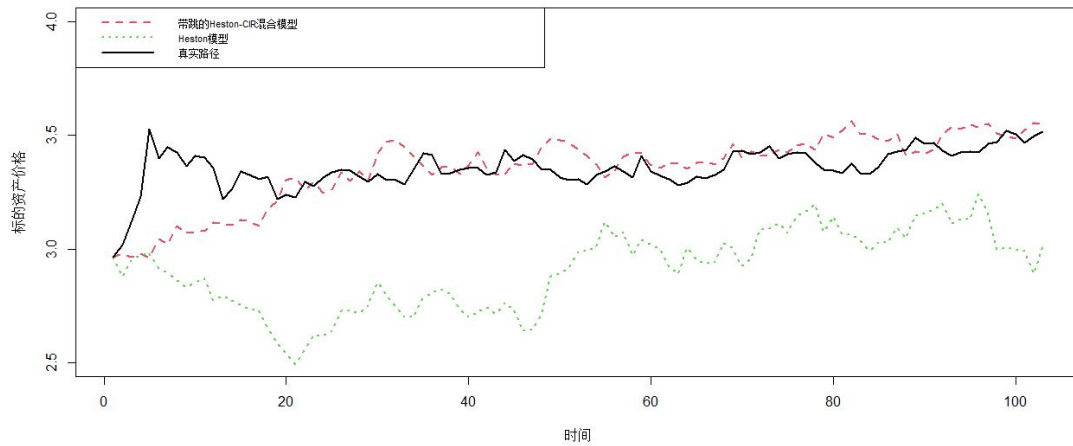


图 5.5 不同模型下的标的资产价格路径

如图 5.5 所示, Heston 模型和带跳的 Heston-CIR 混合模型下资产价格的变化路径存在明显的差异,且带跳的 Heston-CIR 混合模型下的资产价格路径更接近真实数据.这说明利率、波动率的变化对资产价格有显著影响,也说明该模型更符合实际金融市场.

5.3.2 美式期权

下面通过数值模拟方法求解美式看跌期权价格.这里采用简单、高效的 LSM 数值模拟法计算美式看跌期权价格.假设期权在固定的时间序列 $\{0 = t_0, t_1, \dots, t_n = T\}$ 内执行.用 Euler 离散化方法将标的资产、利率和波动率方程离散化,给定 $\Delta t > 0$ 得

$$S_{j+1} = S_j + r_j S_j \Delta t + \sqrt{v_j} S_j \Delta M_{ij}^H,$$

$$\begin{aligned}v_{j+1} &= v_j + \kappa_v (\theta_v - v_j) \Delta t + \sigma_v \sqrt{v_j} \Delta M_{ij}^H, \\r_{j+1} &= r_j + \kappa_r (\theta_r - r_j) \Delta t + \sigma_r \sqrt{r_j} \Delta M_{ij}^H,\end{aligned}$$

其中 M_{ij}^H ($0 \leq j \leq N-1, i=1,2,3$) 为混合分形布朗运动, 且

$$\Delta M_{ij}^H = M_i^H(t_{j+1}) - M_i^H(t_j), \Delta M_{ij}^H \sim N(0, a^2 \Delta t + b^2 \Delta t^{2H}), t_j = j \Delta t.$$

根据中心极限定理可得

$$\Delta M_{ij}^H \sim N(0, aZ_i \sqrt{\Delta t} + bZ_i \sqrt{\Delta t^{2H}}), Z_i \sim N(0, 1), i=1, 2, 3.$$

因此

$$\begin{aligned}S_{j+1} &= S_j + r_j S_j \Delta t + \sqrt{v_j} S_j (aZ_1 \sqrt{\Delta t} + bZ_1 \sqrt{\Delta t^{2H}}), \\v_{j+1} &= v_j + \kappa_v (\theta_v - v_j) \Delta t + \sigma_v \sqrt{v_j} (a\Phi \sqrt{\Delta t} + b\Phi \sqrt{\Delta t^{2H}}), \\r_{j+1} &= r_j + \kappa_r (\theta_r - r_j) \Delta t + \sigma_r \sqrt{r_j} (aZ_3 \sqrt{\Delta t} + bZ_3 \sqrt{\Delta t^{2H}}),\end{aligned}$$

其中 $\Phi = \rho Z_1 + \sqrt{1 - \rho^2} Z_2$.

假设期权的到期日为 T , 敲定价格为 K , $\tau \in [t, T]$ 为最优停时, S_τ 为时刻 τ 下的标的资产价格, 则美式期权的价格为

$$C(t, x) = \sup E \left[e^{-r(\tau-t)} \max \{ K - S_\tau, 0 \} \right].$$

接下来给出采用 LSM 算法得到的 mfH-CIR 模型下的标的资产价格变化路径图和美式看跌期权价格三维图. 参数取值见参考文献[33], 其中标的资产价格初始值为 $S_0 = 100$, Hurst 指数 $H = 0.75$, 相关系数 $\rho = -0.5$, 方差 $\sigma_r = 0.08, \sigma_v = 0.01$, 均值回复速率 $\kappa_v = 0.1, \kappa_r = 0.2$, 长期均值 $\theta_v = 0.03, \theta_r = 0.04$, 时间间隔 $dt = 0.01$. 模拟分析结果如下.

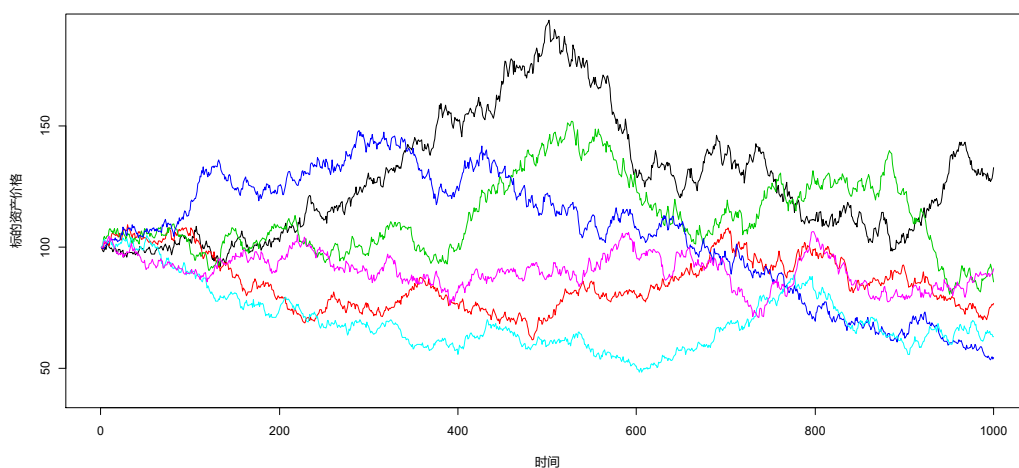


图 5.6 $r_0 = 0.01, v_0 = 0.01$ 时 mfH-CIR 模型下的标的资产价格变化路径

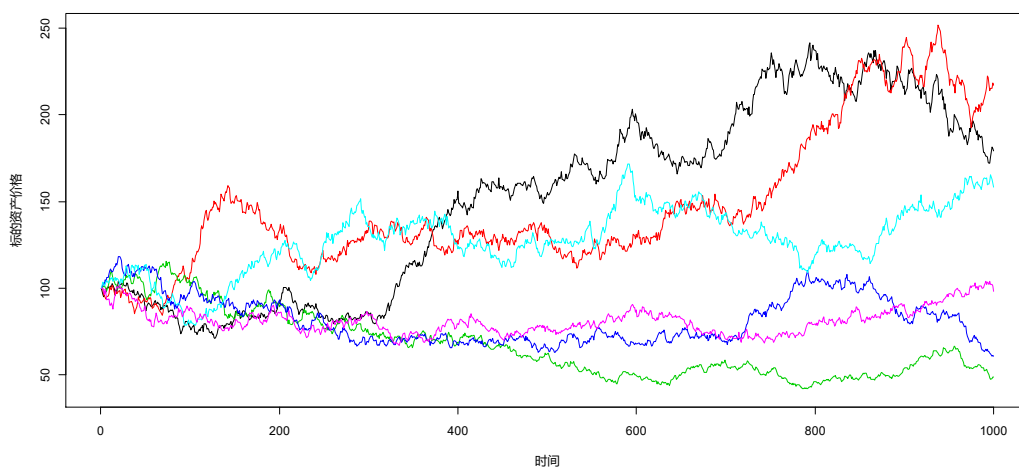


图 5.7 $r_0 = 0.01, v_0 = 0.03$ 时 mfH-CIR 模型下的标的资产价格变化路径

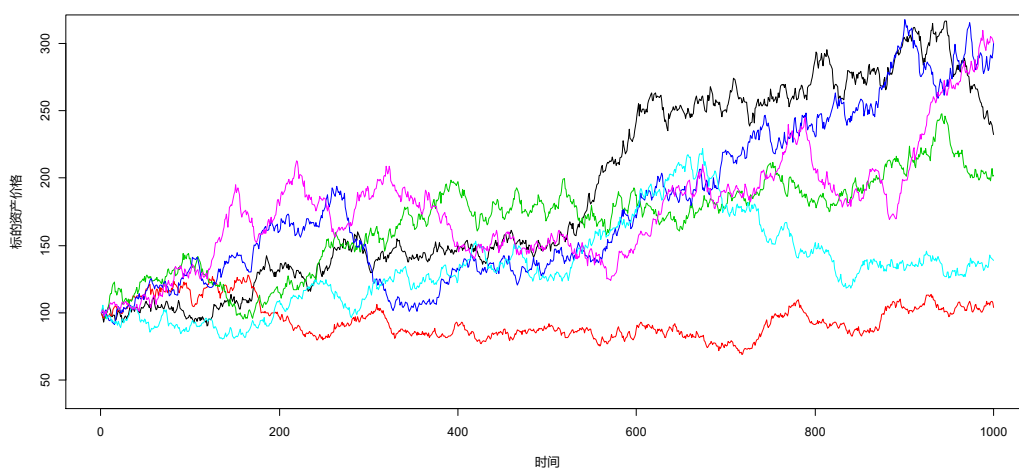


图 5.8 $r_0 = 0.05, v_0 = 0.04$ 时 mfH-CIR 模型下的标的资产价格变化路径

图 5.6-5.8 是在不同的波动率与利率下模拟的 6 条标的资产价格的变化路径. 由多条价格路径变化的总体趋势可见, 增加或减少波动性会影响资产的未来价格, 由此可见, 波动幅度的增加将会增大预期的最低价格和最高价格之间的差异. 由此可见, 模型假设与真实市场一致, 能更好地为投资者理财投资提供理论参考.

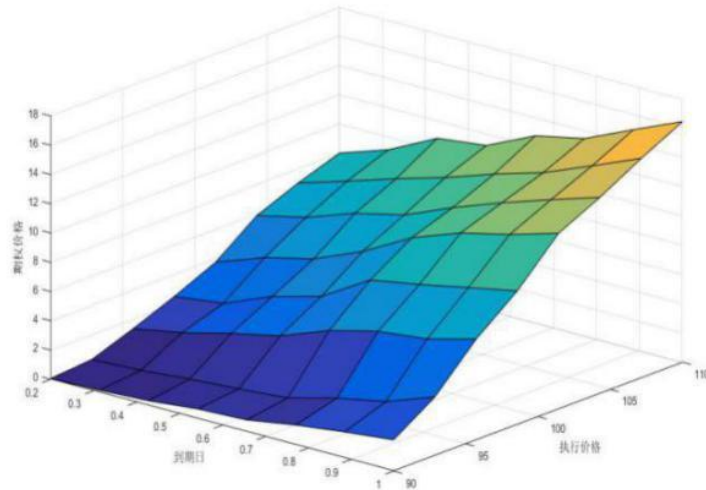


图 5.9 mfH-CIR 模型下美式看跌期权价格三维图

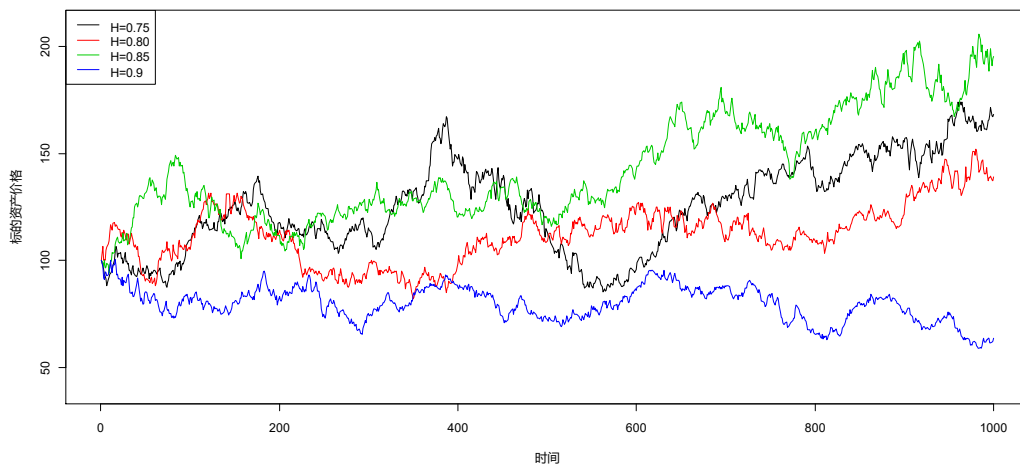


图 5.10 不同 Hurst 指数下的标的资产价格变化路径

实际上, 期权的执行价格和 Hurst 参数值在定价中也起着至关重要的作用. 由图 5.9 可见, 期权价格随执行价格的增加而增加. 如图 5.10 所示, 随着 Hurst 参数值增大标的资产价格路径会变得更加平滑, 这说明 Hurst 参数值的增大会导致标的资产价格波动性的减小. 对于风险偏好者来说他更加倾向于选择波动性较大的期权, 而风险厌恶者则正好相反. 由此可见, Hurst 参数值的大小将会给不同类型的投资者合理规避风险并获得更高收益提供理论参考.

6 研究总结与展望

6.1 研究总结

鉴于 Heston 模型不能更准确的拟合真实金融数据, 本文从以下几点着手改进. 首先, 考虑了利率的随机性和资产因突发性事件而发生跳跃的情形, 建立带跳的 Heston-CIR 混合模型刻画标的资产价格动态. 考虑到模型涉及多个随机微分方程无法直接求解期权价格, 因此先将模型变换到远期测度下, 再用快速傅里叶变换法、特征函数等求解期权价格公式. 其次, 考虑到金融衍生品具有长相依性, 则运用混合分形布朗运动替换标准布朗运动, 建立混合分形 Heston-CIR 模型. 然后采用线性增长条件和局部 Lipschitz 公式得到随机微分方程解的唯一性和存在性, 并用 Euler 法证明了随机微分方程解的强收敛性. 最后, 通过数值模拟证明提出模型的有效性. 先对真实股票数据做描述性统计分析, 说明真实数据的特性. 再将真实股票路径与 Heston 和带跳的 Heston-CIR 混合模型下的股票路径作比较, 还运用 LSM 算法解得美式看跌期权的价格, 验证了改进的模型更符合实际市场.

6.2 研究展望

随机波动率与随机利率模型是近年来学者们研究的热点问题, 由于模型自身的复杂性所涉及到的参数较多, 因此参数估计问题是一个值得进一步探讨和研究的热点. 另外, 由于影响期权价格的因素众多, 因此可以放宽模型的基本假设条件. 现如今金融产品种类丰富, 也可以研究新兴金融衍生工具的定价问题.

参考文献

- [1] Ahlip R, Park L A F, Prodan A. Pricing currency options in the Heston/CIR double exponential jump-diffusion model[J]. International Journal of Financial Engineering, 2017, 04(01): 1-27.
- [2] Ahmadian D, Ballestra L V. Pricing geometric Asian rainbow options under the mixed fractional Brownian motion[J]. Statal Mechanics and its Applications, 2020, 555: 124458.
- [3] Araneda A A. The fractional and mixed-fractional CEV model[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2020, 363: 106-123.
- [4] Ballestra L V, Pacelli G, Zirilli F. A numerical method to price exotic path-dependent options on an underlying described by the Heston stochastic volatility model[J]. Journal of Banking and Finance, 2007, 31(11): 3420-3437.
- [5] Berthe E, Dang D M, Ortiz-Gracia L. A Shannon wavelet method for pricing foreign exchange options under the Heston multi-factor CIR model[J]. Applied numerical mathematics, 2019, 136(FEB.): 1-22.
- [6] Biagini F, Hu Y Z, Øksendal B, et al. Stochastic calculus for fractional Brownian motion and applications[M]. New York: Springer, 2008.
- [7] Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. Journal of Political Economy, 1973, 81(3): 637-654.
- [8] Cheridito P. Mixed fractional Brownian motion[J]. Bernoulli Society for Mathematical Statistics and Probability, 2001, 7(6): 913-934.
- [9] Cox J C, Ross S A. The valuation of options for alternative stochastic processes [J]. Journal of Financial Economics, 1976, 3(1): 145-166.
- [10] Dempster M A H, Hong S S G. Spread option valuation and the fast Fourier transform [M]. New York: Springer Finance, 2002.
- [11] Falcó A, Navarro L, Vázquez C. A direct LU solver for pricing American bond options under Hull-White model[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2017, 309: 442- 455.
- [12] Fallah S, Najafi A R, Mehrdoust F. A fractional version of the Cox-Ingersoll-Ross

- interest rate model and pricing double barrier option with Hurst index[J].
Communication in Statistics Theory and Methods,2019,48:1-16.
- [13] Forde M,Jacquier A.Robust approximations for pricing Asian options and volatility swaps under stochastic volatility[J].Applied Mathematical Finance, 2010,17(3):241-259.
- [14] Heston S L.A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency option[J].Review of Financial Studies,1993, 6(2):327-343.
- [15] He X J,Zhu S P.An analytical approximation formula for European option pricing under a new stochastic volatility model with regime-switching[J].Journal of Economic Dynamics and Control,2016,71:77-85.
- [16] He X J,Zhu S P.A closed-form pricing formula for European options under the Heston model with stochastic interest rate[J].Journal of Computational and Applied Mathematics,2018,335:323-333.
- [17] Hull J,White A.The pricing of options on assets with stochastic volatilities [J].Journal of Finance,1987,42(2):281-300.
- [18] Grzelak L A,Oosterlee C W.On the Heston model with stochastic interest rates [J].Journal on Financial Mathematics,2011,2(1):255-286.
- [19] Grzelak L A,Oosterlee C W,Weeren S V.Extension of stochastic volatility equity models with the Hull-White interest rate process[J].Quantitative Finance, 2012,12(1):89-105.
- [20] Guo S,Grzelak L A,Oosterlee C W.Analysis of an affine version of the Heston-Hull-White option pricing partial differential equation[J].Applied Numerical Mathematics,2013,72:143-159.
- [21] Kou S G.A jump-diffusion model for option pricing[J].Management Science, 2002,48(8):1086-1101.
- [22] Kozpınar S,Uzunca M,Karasözen B.Pricing European and American options under Heston model using discontinuous Galerkin finite elements[J]. Mathematics and Computers in Simulation,2020,177:568-587.
- [23] Li W H,Liu L X,Lv G W,et al.Exchange option pricing in jump-diffusion models

- based on Esscher transform[J].Communications in Statistics-Theory and Methods,2018,47(19):4661-4672.
- [24] Mehrdoust F,Babaei S,Fallah S.Efficient Monte Carlo option pricing under CEV model[J].Communications in Statistics Simulation and Computation,2015,46(3): 2254-2266.
- [25] Mehrdoust F,Fallah S,Samimi O.Pricing multi-asset American option under Heston-CIR diffusion model with jumps[J].Communication in Statistics-Simulation and Computation,2019:1-12.
- [26] Mehrdoust F,Najafi A R,Fallah S,et al.Mixed fractional Heston model and the pricing of American options[J].Journal of Computational and Applied Mathematics,2018,330:141-154.
- [27] Mehrdoust F,Saber N,Najafi A R.Modeling asset price under two-factor Heston model with jumps[J].International Journal of Applied and Computational Mathematics,2017,3:3783-3794.
- [28] Merton R C.Option pricing when underlying stock returns are discontinuous [J].Working papers,1975,3(1):125-144.
- [29] Mounir Z.On the mixed fractional Brownian motion[J].International Journal of Stochastic Analysis,2006,2006:1-9.
- [30] Øksendal B.Stochastic differential equations[J].IEEE Transactions on Automatic Control,2006,51(10):1731-1732.
- [31] Rao P,B. L S.Pricing geometric Asian power options under mixed fractional Brownian motion environment[J].Physica A Statistical Mechanics and Its Applications,2016,446:92-99.
- [32] Rogers L C G.Arbitrage with fractional Brownian motion[J].Mathematical Finance,1997,7(1): 95-105.
- [33] Samimi O,Mardani Z,Sharafpour S,et al.LSM algorithm for pricing American option under Heston-Hull-White's stochastic volatility model[J].Computational Economics,2017,50:173-187.
- [34] Scott L O.Option pricing when the variance changes randomly:Theory,estimation and an application[J].Journal of Financial and Quantitative Analysis,1987,22(4):

- 419-438.
- [35] Singh P K, Mani M. Fourth-Order compact scheme for option pricing under the Merton's and Kou's jump-diffusion models[J]. International Journal of Theoretical and Applied Finance, 2018, 21(4):1-26.
- [36] Stein E M, Stein J C. Stock price distributions with stochastic volatility: an analytic approach[J]. Review of Financial Studies, 1991, 4(4):727-752.
- [37] Sun L. Pricing currency options in the mixed fractional Brownian motion[J]. Statistical Mechanics and Its Applications, 2013, 392(16):3441-3458.
- [38] Vasicek, Oldrich. An equilibrium characterization of the term structure[J]. Journal of Financial Economics, 1977, 5(4):627-627.
- [39] Zhang S, Wang L. A fast numerical approach to option pricing with stochastic interest rate, stochastic volatility and double jumps[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2013, 18(7):1832-1839.
- [40] Zhang W G, Li Z, Liu Y J. Analytical pricing of geometric Asian power options on an underlying driven by a mixed fractional Brownian motion[J]. Statistical Mechanics and its Applications, 2018, 490:402-418.
- [41] 陈盛双, 杨云霞. 基于双指数跳-扩散过程的回望期权的解析定价[J]. 武汉理工大学学报, 2006, 28(12):137-140.
- [42] 邓国和. 随机波动率跳跃扩散模型下复合期权定价[J]. 数理统计与管理, 2015, 05:154-166.
- [43] 郭滨, 何坤. 带有随机利率与随机波动率的 Lévy 模型期权定价[J]. 东华大学学报(自然科学版), 2017, 43(02):298-304.
- [44] 郭精军, 程志勇. 混合高斯模型下带红利的永久美式期权定价[J]. 应用数学, 2018, 31(02):250-256.
- [45] 郭精军, 张亚芳, 高海燕. 布朗运动和分数布朗运动混合的局部时[J]. 应用数学, 2017, 37(1):138-143.
- [46] 李静, 周峤. Heston 随机波动率模型下一类多资产期权的定价[J]. 系统工程学报, 2012, 27(03):320-326.
- [47] 刘坚, 邓国和, 杨向群. 利率和股票价格遵循 O-U 过程的再装期权定价[J]. 工程

- 数学学报,2007,24(02):237-241.
- [48] 施里夫. 金融随机分析[M].上海:上海财经大学出版社,2008.
- [49] 宋殿宇,金华,刘善存.双指数跳扩散过程下带违约风险的可转债定价[J].系统工程,2011,29(06):60-64.
- [50] 孙玉东,师义民.混合分数布朗运动下亚式期权定价[J].经济数学,2011,28(1):49-51.
- [51] 王林,张蕾,刘连峰.用模拟退火算法寻找 Heston 期权定价模型参数[J].数量经济技术经济研究,2011,28(09):131-139+153.
- [52] 王向荣,薛瑶瑶.基于 Hull-White 利率下 O-U 过程的复合期权定价[J].华中师范大学学报:自然科学版,2019,53(01):20-25.
- [53] 奚欢,胡志明.随机利率与双指数跳跃扩散模型下几何平均水平重置期权定价[J].数学的实践与认识,2020,50(10):23-34.
- [54] 徐峰,周圣武.混合分数布朗运动下永久美式期权的定价[J].数学的实践与认识,2015,45(20):61-65.
- [55] 张丽娟,张文勇.基于 Heston 模型和遗传算法优化的混合神经网络期权定价研究[J].管理工程学报,2018,32(03):142-149.

致谢

时光匆匆短短三年的研究生校园生活就要结束了. 研究生一年级到三年级的生活使我受益匪浅. 而这离不开学校的教育培养, 导师的悉心教导, 同门师姐、师妹、师兄、师弟们的关怀, 也离不开室友同学们的帮助以及家人们的鼓励支持. 借此机会由衷的感谢这些可爱的人儿们让我快乐、顺利地度过这三年时光.

首先, 感谢母校兰州财经大学给予我们优良的教育平台, 舒适的学习环境和良好的学习氛围, 使我们能在这里舒心学习. 学校里的老师们学识渊博, 待人和蔼、耐心, 使我能在这里不断充实自己、提升个人能力.

其次, 要万分感谢我的导师-郭精军教授. 感谢老师三年来的谆谆教导, 他的博学和严谨让我在三年的学习生活中受益匪浅也留给我们深刻的印象. 老师三年来风雨无阻的带领我们开展讨论班, 引导我们学习专业知识并帮助及时解决学习中遇到的困难, 为我们提供了锻炼的平台让我们提高了学习能力和学习效率, 他严谨、认真的工作态度和真挚、耐心的品格更是深深的影响了我们. 从小论文的书写到发表以及毕业论文的顺利完成都离不开郭老师不辞辛劳多次精心批阅和修改, 在他的教导下我才能顺利完成论文书写. 经师易遇, 人师难遇, 再次诚挚的感谢郭老师以及讨论班各位老师辛勤的付出与尽心的教导.

再次, 感谢同门师兄、师弟、师姐、师妹们在学习上给予的帮助和生活中给予的关怀. 感受最深的是同门们的团结友爱和互帮互助, 让我在这个“小家庭”收获满满. 特别要感谢的是柴婧婧师姐和汪育兵师兄, 他们是我学习的榜样, 学业中遇到困难时有他们耐心、细致的解答, 生活中也无时无刻有他们的关心和爱护. 还要感谢舍友、同学给予我的帮助和支持让我在母校度过一段充实的时光.

最后, 感谢家人的陪伴和支持. 父母在经济和精神上给我很大支持, 他们是我义无反顾奋勇向前的坚实后盾. 还有每当我站在艰难抉择的人生十字路口时背后总有姐姐的支持和鼓励, 在这里感谢你们多年来的陪伴和呵护!

白亚楠

2021年6月6日