

分类号 _____
U D C _____

密级 _____
编号 _____



硕士学位论文

论文题目 跳环境和混合高斯过程下的欧式期权定价及统计
模拟分析

研究生姓名: 彭波

指导教师姓名, 职称: 郭精军 教授

学科, 专业名称: 统计学 数理统计学

研究方向: 金融统计与风险管理

提交日期: 2021年6月7日

独创性声明

本人声明所呈交的论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果.尽我所知,除了文中特别加以标注和致谢的地方外,论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果.与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意.

学位论文作者签名: 彭波 签字日期: 2021.6.6

导师签名: 郭静宇 签字日期: 2021.6.6

关于论文使用授权的说明

本人完全了解学校关于保留,使用学位论文的各项规定, 同意 (选择“同意”/“不同意”)以下事项:

1.学校有权保留本论文的复印件和磁盘,允许论文被查阅和借阅,可以采用影印,缩印或扫描等复制手段保存,汇编学位论文;

2.学校有权将本人的学位论文提交至清华大学“中国学术期刊(光盘版)电子杂志社”用于出版和编入 CNKI《中国知识资源总库》或其他同类数据库,传播本学位论文的全部或部分内容.

学位论文作者签名: 彭波 签字日期: 2021.6.6

导师签名: 郭静宇 签字日期: 2021.6.6

European Option Pricing and Statistical Simulation Analysis under Jump Environment and Mixed Gaussian Process

Candidate :Bo Peng

Supervisor:Jingjun Guo

摘 要

经典 Black-Scholes(B-S)模型构建后,期权定价成为学术界研究的热点话题之一. 随着对经典 B-S 定价模型研究的不断深入,发现原来的部分假设条件难以符合实际金融情况,如连续交易且无交易费用、标的资产价格变化服从几何布朗运动、以及对数收益率服从正态分布.已有的部分文献是单一考虑,鲜有同时考虑这三个假设条件,并且分数布朗运动下的期权定价模型会出现套利机会.

主要研究了混合次分数布朗运动模型建立的欧式期权定价和风险管理问题.研究内容包括四部分.第一部分不考虑交易费用,建立了基于跳环境和混合次分数布朗运动下的欧式期权定价模型.首先,利用 Δ 对冲原理,获得了欧式期权所满足的随机偏微分方程.其次,使用拟条件期望分别得到欧式看涨、看跌期权定价公式和看涨看跌平价公式.

基于此,第二部分利用混合次分数布朗运动建立了欧式期权定价模型,同时考虑带交易费用和跳环境来进行资产定价.首先,利用对冲策略,获得了欧式看涨期权所满足的随机偏微分方程.其次,使用自融资策略分别得到欧式看涨、看跌期权定价公式和看涨看跌平价公式.

第三部分通过希腊字母和关于 Hurst 指数 H 的偏导公式量化了资产风险.最后,数值模拟表明:定价参数中的 Hurst 指数 H 和跳跃强度 λ 对期权价值有显著影响.第四部分中,分别采用"上证指数","市北 B 股"和"耀皮 B 股"等的收盘价日线数据,研究表明:在跳环境和混合高斯过程下的欧式期权定价比经典 B-S 模型更加接近真实值,该研究不仅能够在理论意义中丰富金融统计与风险管理有关期权定价方面的理论,同时在实际意义中也能够为金融市场提供更多的参考依据.

关键词:跳扩散 次分数布朗运动 拟条件期望 交易费用 资产风险

Abstract

After the classic Black-Scholes (B-S) model is constructed, option pricing has become one of the hot topics in academic research. With the continuous in-depth study of the classic B-S pricing model, it is found that some of the original assumptions are difficult to meet the actual financial situation, such as, continuous trading and no transaction costs, the price of the underlying asset changes obey geometric Brownian motion, the logarithmic rate of return obeys a normal distribution. Part of the existing literature is a single consideration. It rarely considers these three assumptions at the same time. And the option pricing model under fractional Brownian motion will have arbitrage opportunities.

It mainly studies the European option pricing and risk management problems established by the mixed subfractional Brownian motion model. The content includes four parts. In the first part, no consideration of transaction fees, a European option pricing model based on jump environment and mixed subfractional Brownian motion is established. Firstly, using the Delta hedging principle, the stochastic partial differential equations satisfied by European options are obtained. Secondly, use the quasi-conditional expectation to obtain the European-style call and put option pricing formula, and the call and put parity formula respectively.

Based on this, the second part uses the mixed subfractional Brownian motion to establish a European option pricing model, while considering the transaction costs and jump environment for asset pricing. Firstly, using the hedging strategy, the stochastic partial differential equations satisfied by European call option are obtained. Secondly, the pricing formula of European call, put option and the parity formula of call and put are obtained by using the self-financing strategy.

In the third part, it quantifies the asset risk through the Greek letters and the partial derivative formula on the Hurst index H . Finally, numerical simulations show that the Hurst index H and jump intensity λ in the pricing parameters have a significant impact on the value of options. In the fourth part, the daily closing price data of "Shanghai Stock Index", "Shibei B-shares" and "Yaopi B-shares" are used

respectively. It shows that European option pricing under the jump environment and mixed Gaussian process is closer to the true value than the classic B-S model. It can not only enrich the theory of financial statistics and risk management related to option pricing in the theoretical sense, but also in the practical sense. It can provide more reference basis for the financial market.

Keywords: Jump diffusion; Subfractional Brownian motion; Quasi-conditional expectation; Transaction cost; Asset risk

目 录

1 引言	1
1.1 研究背景.....	1
1.2 研究现状.....	2
1.3 研究意义.....	4
1.4 研究内容及方法.....	4
1.5 创新之处.....	5
2 预备知识	6
2.1 相关引理.....	6
2.2 经典 B-S 期权定价模型.....	6
2.3 混合次分数布朗运动模型及其性质.....	7
3 在跳环境和混合高斯过程下的欧式期权定价	9
3.1 金融市场建模.....	9
3.2 在跳环境下的偏微分方程.....	9
3.3 在跳环境下的定价公式.....	10
4 带交易费用的欧式期权定价	15
4.1 带交易费用的金融市场建模.....	15
4.2 带交易费用的期权定价公式.....	16
5 混合高斯过程下欧式期权的风险管理	21
5.1 量化风险的希腊字母.....	21
5.2 模拟分析.....	22

6 实证研究	25
6.1 研究数据的选取.....	25
6.2 标的统计特征以及正态性检验.....	25
6.3 参数估计.....	31
6.4 模拟结果.....	31
7 研究总结与展望	42
7.1 研究总结.....	42
7.2 研究展望.....	42
参考文献	43
致谢	47
作者在硕士期间的科研成果	48

1 引言

1.1 研究背景

从芝加哥交易所推出金融衍生品以来,金融衍生品已经经历了一个多世纪的发展.诺贝尔经济学奖得主莫顿·米勒对金融衍生工具有过经典的评价:"金融衍生工具使企业和机构能有效和经济地处理困扰其多年的风险,世界也因之变得更加安全,而不是变得更加危险."期权是金融衍生品中的一种,是一种风险管理工具,使得金融工具品种多样化、避险、交易策略多元化,有效地推动资本市场的健康发展.荷兰郁金香泡沫事件,更是期权发展历史上的一个重要事件,由于郁金香在当时代表了贵族身份,于是大量投机商人通过郁金香种植人员将期权购买回来,也就是定期内,依据相应价格对郁金香进行收购,在短短几年时间里,郁金香价格飞涨,此后一直膨胀直至抵达终点,最后泡沫破裂,后来荷兰政府不得不介入其中,明令投机式交易不可继续再进行,使得这次经济泡沫才得以遏制.而期权随着郁金香经济泡沫的破裂,在大众的心里也留下了非常不好的印象.目前,期权已经是一个功能强大,应用广泛的金融工具.期权能够有效的把金融市场风险在不同金融市场参与主体间转移,"不要把所有的鸡蛋放在同一个篮子里面",这样做就能达到金融风险管理的要求,最终将金融市场风险控制在一定的范围,促进金融市场长久和谐稳定的发展.期权市场是商品经济高度发展的必然产物,期权已经成为现代金融体系重要组成部分.相比较于发达国家来说,我国金融衍生品行业虽然发展迅速,但处于起步阶段.

期权极大促进了金融资本市场的整体发展,但对于期权的定价一直都是学术界的一个难题.虽然在 1973 年,Black-Scholes(B-S)模型的出现给定价带来了重大突破,从此定价有了扎实的数学基础,但是由于其各种假设的局限性,其期权定价效果并不理想.近年来,随着期权市场产品的增多,经典 B-S 模型越来越不能满足期权市场产品发展需要,因此需要采用改进模型对期权进行定价的研究是必要的.特别是近年来实证分析表明:资产价格会发生不连续波动等跳跃特征,股票对数收益率具有长相依性和"尖峰厚尾"等特征,以及频繁改变交易策略来进行对冲的金融市场会产生高额交易费用等特征.故采用基于混合高斯过程和跳环境下带交易费用的资产定价模型对欧式期权进行研究,考虑了该期权定价模型下的风险管理问题和数值模拟问题.

1.2 研究现状

经典 B-S 模型构建后, 期权定价成为学术界研究的热点话题之一. Black 等(1973)、Leland(1985)和 Merton(1976)对期权定价进行了研究.但随着对经典 B-S 定价模型研究的不断深入, 发现原来的部分假设条件难以符合实际金融情况, 如第一个假设条件为连续交易且无交易费用, 第二个假设条件为标的资产价格变化服从几何布朗运动, 以及第三个假设条件为对数收益率服从正态分布.

针对第一个假设条件, 学者们发现实际金融市场具有摩擦. 本来每次的交易费用可以忽略不计, 但是投资者为了获得更高的收益, 会频繁改变交易策略来进行对冲, 此时把每次交易的费用累加起来, 交易费用就会很高额, 甚至会超出我们的想象. 其中, Leland(1985)提出经典的带交易费用的定价问题, 并且在离散时间和有交易费用的情况下, 通过 Delta 对冲策略, 推导出对应的 B-S 期权定价公式. 王晓天(2010,2011)研究了带交易费用的欧式期权定价问题. 所以研究带交易费的欧式期权定价是金融界的研究方向之一. 郑小迎等(2001)研究得到期权标的资产交易费用的存在有利于期权成交. 吴一玲等(2009)得到带交易费用和红利支付的期权定价公式与现实情况更加相符. 袁国军等(2007)研究得到跳-扩散过程中有交易费用的欧式期权定价方程. Davis 等(1991)将交易成本模型转化为随机最优控制问题, 目的是找到一种最优投资组合策略. Mariani 等(2012)研究了在带交易费且波动率是随机变量下的期权定价问题. 孙琳(2009)得到考虑交易成本可以消除分数布朗运动环境下的套利的结论. Amster 等(2005)研究了带单调交易费用的期权定价问题. Wang 等(2010)研究了带交易费用的期权定价. Stettner(2000)计算出在各种交易成本情况下的离散时间欧式期权价格.

针对第二个假设条件, 在实际的金融市场当中资产价格可能出现"跳跃"情况. 这些"跳跃"可能是由于某些突发情况引起, 如爆发疫情, 爆发战争及经济大危机等. 为了刻画标的资产价格不连续的波动, Merton(1976)构建出跳扩散模型, 并得到欧式期权定价公式. Cai 等(2009)研究了混合指数跳扩散过程. 因此, 从金融实际情况出发, 研究跳扩散下的期权定价模型是金融工程领域中的重要问题之一. Hsu 等(2016)考虑了具有相关跳尺度风险的 RS 跳扩散模型. Tian 等(2014)在跳扩散模型下研究了考虑相关信用风险的脆弱期权定价问题. 钱晓松(2003,2004)研究了在跳扩散模型下的交换期权, 亚式期权等新型期权的定价问题. 周圣武(2009)研究了服从连续扩散过程和跳扩散过程等多种组合情况下的脆弱期权定价及其风险度量问题. Xu 等(2012)提出了一个改进的脆弱期权定价方

法.董迎辉(2012)将跳扩散模型应用于寿险合同与信用衍生产品定价中.Chang等(2013)将RS跳扩散模型应用到道琼斯工业平均指数(DJIA)和其成份股,并进行了实证研究.Fu等(2017)研究了跳扩散模型并且能够更好的捕捉金融实际数据.Martin(2007)研究了交换期权定价.胡素华等(2006)研究了双指数跳跃扩散模型的MCMC估计.Li等(2016)研究了RS跳扩散模型.陈超(2008)研究了标的资产服从跳扩散过程的脆弱期权定价问题.魏正元等(2011)引入多个跳跃风险源对期权的标的资产价格和合约空头方的资产的跳-扩散模型过程进行建模.连颖颖等(2010)与石广平等(2012)讨论了二叉树数值方法在新型期权定价模型中的应用.陈超等(2000)将泊松过程引入到期权定价理论中,推导出一种欧式期权的跳-扩散定价公式.王峰等(2004)提出用泊松过程来描述突发的信息变化对股票价格产生的影响.

针对第三个假设条件,实证研究表明,股票的对数收益率具有长相依性和"尖峰厚尾"等特征.并且Peters(1989)运用R/S分析方法,提出了非周期循环和分形结构的存在.由于分数布朗运动具有长相关性和厚尾性等特征,故Necula(2002)使用它推广了经典Black-Scholes期权定价理论.但Zhang等(2017)提出此时会出现套利机会,Shokrollahi(2018)、Wang等(2010)用改进后的混合分形高斯过程来刻画标的资产价格变化,彭波等(2020)研究了在跳环境和混合次分数布朗运动下的欧式期权定价问题.Hu等(2003)证明了在分数随机积分理论下的金融市场是完备的,并且金融数学模型是无套利的.程志勇等(2018)研究了次分数布朗运动下支付红利的欧式期权定价.Jost(2006)提出了分数布朗运动的变换公式,使得分数布朗运动理论更加完善.刘韶跃等(2002,2006)主要研究了分数布朗运动下带有红利率的期权定价.郭精军等(2017)研究了次分数Vasicek随机利率模型下的欧式期权定价.肖艳清(2012)研究了分数布朗运动驱动下的随机方程在期权定价中的应用.王爱银等(2021)研究了在B-P混合驱动模型和CEV模型下的亚式期权.奚欢等(2021)研究了双跳跃仿射扩散模型的几何平均型水平重置期权定价.经典期权定价模型已经不能满足,越来越复杂的金融市场需要.另外,已有的部分文献是单一考虑假设条件一,二或三,鲜有同时考虑这三个假设条件,并且分数布朗运动下的期权定价模型会出现套利机会.基于此,利用混合次分数布朗运动建立了欧式期权定价模型,同时考虑带交易费用和跳环境来进行资产定价.

1.3 研究意义

期权定价是当今金融领域的重要理论之一,也是现代金融学的重要组成部分.因此研究期权定价具有重要理论意义和应用价值.

首先,研究带交易费用的期权定价有重要理论意义.建立在混合高斯过程和跳环境下的期权定价模型,通过使用 Delta 对冲原理、自融资策略、无套利市场原理、次分数 Girsanov 定理和拟条件期望等定理,获得了希腊字母、欧式期权定价公式和随机偏微分方程等理论,为金融学提供了严谨的逻辑推理和计算方法,进一步丰富了数理金融的理论知识,对金融学理论的发展起到了一定的促进作用,也为后续的研究者提供了理论参考.

然后,研究在跳环境和混合高斯过程下的欧式期权定价和欧式期权风险管理有重要应用价值.尽管我国金融衍生品市场规模比较大,但风险管理体系还不健全,存在投资者不够理性、投机行为、和金融衍生品市场抗冲击能力比较弱等问题.而且我国证券经营机构和国际同行相比,总体实力还比较弱,且难以满足实体经济对风险管理和投资的迫切需求.随着金融全球一体化加速,金融危机和一些突发事件的发生变得越来越频繁,而且随着全球化投资增长,任何一个金融衍生品市场发生波动都会波及其他金融衍生品市场,没有哪一个国家的金融衍生品市场可以完全避免受其影响.因此,风险管理显得尤其重要.

1.4 研究内容及方法

1.4.1 研究内容

基于期权定价理论的基础以及次分数布朗运动随机理论,本论文研究与建立了在次分数布朗运动环境中带跳欧式期权及带交易费用欧式期权的定价模型.分别从标的资产是否带有交易费用的两个方面,着重讨论了次分数欧式期权的定价公式,在没有交易费用的情况下建立了在跳环境和混合高斯过程下的欧式期权定价模型,在有交易费用的情况下建立了基于跳环境和混合高斯过程下带交易费用的欧式期权定价模型.

本论文共分为七部分:第一部分引言对选题的研究背景,研究现状及研究意义与运用的方法和创新之处等进行了阐述;第二部分介绍了相关的引理定理;第三部分和第四部分介绍了本论文的期权定价理论;第五部分介绍了风险管理中希腊字母的原理及其在本论文中的应用;第六部分为本论文的实证部分;第七部分总结了论文要点,并且提出了对于未来的展望.

1.4.2 研究方法

具体研究方法如下:文献分析法、随机分析理论、Delta 对冲原理、自融资策略、无套利原理、风险中性定价原理、拟条件期望和希腊字母量化资产风险等研究方法.所涉及到的方法大致如下:在期权定价模型的推导方面,采用具有长记忆性等分形特征的随机过程来刻画标的资产价格变化情况.考虑带交易费用和跳环境,利用混合次分数布朗运动建立了欧式期权定价模型.通过 Delta 对冲原理,获得了欧式期权所满足的随机偏微分方程.使用拟条件期望以及自融资策略分别得到欧式看涨、看跌期权定价公式和看涨看跌平价公式.通过希腊字母 Δ , ∇ , ρ , Θ , Γ , ν 和关于 Hurst 指数 H 的偏导公式量化了资产风险.对期权定价模型中的参数进行估计时,采用了矩估计法和重标极差(R/S)分析方法.在数值模拟分析方面,主要采用 R 语言软件和蒙特卡罗(Monte Carlo)模拟法.

1.5 创新之处

本论文采用跳环境,带交易费用和混合次分数布朗运动来进行期权定价.在已有研究成果的基础上,本论文的创新之处在于以下三个方面:

第一,采用具有长相依性和"尖峰厚尾"等特征的随机模型来刻画期权标的资产价格变化情况.对该模型下欧式期权的定价公式进行推导,同时考虑不带交易费用与带交易费用的情况,分别得到了随机偏微分方程,欧式看涨,看跌期权定价公式和看涨看跌平价公式.当有特殊情况发生时,考虑了标的资产不连续波动,将泊松过程与期权定价相结合,更加符合实际的金融市场.

第二,推导出基于混合高斯过程下欧式期权风险管理的希腊字母.本论文采用混合高斯模型来刻画期权标的资产价格变化情况,利用该模型下欧式期权的希腊字母公式对欧式期权蕴含的风险进行了度量,进一步量化了资产风险.

第三,将混合高斯模型进行模拟实证.模拟部分得到各个参数对定价模型有显著的影响.实证部分得到本论文混合高斯模型比经典模型,更加接近真实标的资产价格,进一步说明所构建模型的合理性.

2 预备知识

这部分主要介绍论文中涉及到的拟条件期望、自融资策略、无套利市场、经典 B-S 期权定价模型、混合次分数布朗运动模型及其性质。

2.1 相关引理

本论文的期权定价模型是在拟条件期望、无套利市场和风险中性定价原理的基础上进行推导的,下面给出一些与之相关的定理、引理和定义。

定理 2.1^[49]对任意 $t \in [0, T]$, 设一个 F_T^H 有界可测函数, 定义

$$F_t := e^{-r(T-t)} \tilde{E}_t[F],$$

式中: $F \in L^2$; \tilde{E}_t 为拟条件期望。

除了定理 2.1 之外, 还有关于次分数布朗运动的引理 2.1。

引理 2.1^[50]假设 $\{\xi_t^H, t \geq 0\}$ 为次分数布朗运动, $M \geq 0$, 这里 Hurst 指数 H 满足 $0.5 \leq H < 1$. 则,

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \sup V_M = 1,$$

其中, $V_M = \sup_{0 \leq s \leq M-dt} \beta_M |\xi_{s+dt}^H - \xi_s^H|$, $\beta_M^{-1} = (dt)^H (2 (\log(\frac{M}{dt} \vee e) + \ln(\ln M)))^{\frac{1}{2}}$.

在处理金融资产定价中, 需要考虑投资策略、无套利市场以及定价原理, 分别给出如下定义。

定义 2.1^[51]自融资策略指在一个融资过程中, 既没有新的资金注入又没有原有资金被抽离, 并且该融资过程中组合的价值保持不变的过程。

定义 2.2^[51]无套利市场指没有不需要支付成本或承担风险就能获得额外收益的机会的市场。

定义 2.3^[51]风险中性定价原理指对衍生证券进行定价时, 所有投资者都保持风险中性。

2.2 经典 B-S 期权定价模型^[52]

模型假设

- (1) 标的资产价格遵循几何布朗运动;
- (2) 期权交易市场不存在无风险套利机会;
- (3) 证券的交易是连续的, 证券价格的变动也是连续的;

- (4)允许卖空证券;
- (5)在进行交易时,不支付交易费用,并且所有证券都是完全可分的;
- (6)无风险利率 r 为常数,期望回报率 μ 和波动率 σ 为常数;

定价模型

标的资产价格遵循几何布朗运动,即

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t d\xi_t ,$$

其中 S_t 是标的资产价格, μ 为标的资产期望回报率, σ 为标的资产波动率, ξ_t 为布朗运动.

经典 B-S 期权定价模型为

$$C = S_t \tilde{N}(d_1) - Ke^{-r(T-t)} \tilde{N}(d_2),$$

$$P = Ke^{-r(T-t)} \tilde{N}(-d_2) - S_t \tilde{N}(-d_1),$$

其中 $d_1 = \frac{(r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \ln(\frac{S_t}{K})}{\sigma\sqrt{T-t}}$, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$, $\tilde{N}(\cdot)$ 为标准正态分布的累积概率分布函数、 K 为执行价格、 r 为无风险利率、 C 为看涨期权价格、和 P 为看跌期权价格.

2.3 混合次分数布朗运动模型及其性质

定义 2.4^[2,53]设 (Ω, F, P) 是一个完备概率空间, 则由布朗运动与次分数布朗运动线性组合后, 得到如下的混合次分数布朗运动模型

$$M_t^{H,a,b} = a\xi_t + b\xi_t^H, \forall t \geq 0,$$

式中: a, b 是常数; H 为 Hurst 指数; ξ_t 为布朗运动; ξ_t^H 为次分数布朗运动; ξ_t 和 ξ_t^H 相互独立.

混合次分数布朗运动模型 $M_t^{H,a,b}, \forall t \geq 0$ 具有以下性质:

(1) $M_t^{H,a,b}$ 是一个中心高斯过程;

(2) 由 Wick-Itô 公式, 得 $(d\xi_t^H)^2 = 2Ht^{2H-1}(2 - 2^{2H-1})dt, dt \cdot dt = 0,$

$$dt \cdot d\xi_t^H = 0, d\xi_t^H \cdot dt = 0;$$

混合次分数布朗运动模型 $M_t^{H,a,b}$ 满足下面的性质^[54]:

(1) 对于 $T > 0, H \in [\frac{3}{4}, 1], a \neq 0$, 混合次分数布朗运动模型 $M_t^{H,a,b}$ 是一个半鞅.

(2) 对于 $\forall t \in \mathbb{R}_+$, 混合次分数布朗运动模型 $M_t^{H,a,b}$ 平方的期望函数与二阶增量函数为:

$$E(M_t^{H,a,b})^2 = a^2 t + b^2((2 - 2^{2H-1})t^{2H}),$$

$$E(M_t^{H,a,b} - M_s^{H,a,b})^2 = a^2(t - s) + b^2(-2^{2H-1}(t^{2H} + s^{2H}) + (t + s)^{2H} + (t - s)^{2H}).$$

(3)对于 $\forall s \in R_+, \forall t \in R_+$,混合次分数布朗运动模型 $M_t^{H,a,b}$ 的协方差函数为:

$$\text{Cov}(M_t^{H,a,b}, M_s^{H,a,b}) = a^2(s \wedge t) + b^2\left(t^{2H} + s^{2H} - \frac{1}{2}((s + t)^{2H} + |t - s|^{2H})\right),$$

其中, $s \wedge t = \frac{1}{2}(s + t - |t - s|)$.

(4)对于 $\forall h > 0$,混合次分数布朗运动模型 $M_t^{H,a,b}$ 具有自相似性.

(5)对于 $\forall a \in R_+, \forall b \in R_+$,混合次分数布朗运动模型 $M_t^{H,a,b}$ 的分形特征:

i. 当 $0 < H < \frac{1}{2}$ 时,混合次分数布朗运动模型 $M_t^{H,a,b}$ 时间序列具均值回复性,即未来时间序列与过去时间序列具有相反变化情况的可能性较大;

ii. 当 $H = \frac{1}{2}$ 时,混合次分数布朗运动模型 $M_t^{H,a,b}$ 时间序列不相关,即未来时间序列与过去时间序列的变化情况无关;

iii. 当 $\frac{1}{2} < H < 1$ 时,混合次分数布朗运动模型 $M_t^{H,a,b}$ 时间序列具有长记忆性,即未来时间序列与过去时间序列具有相同变化情况的可能性较大.

前面是本论文期权定价模型要用到的一些引理和性质,下面将给出在跳环境和混合高斯过程下的欧式期权定价公式.

3 在跳环境和混合高斯过程下的欧式期权定价

本部分主要介绍在突发情况下的金融资产定价. 譬如金融大危机、战争爆发、和疫情蔓延等事件发生时, 会导致金融资产价格发生跳跃, 所以该部分考虑了跳环境和混合高斯过程, 通过金融市场建模, 得到了在跳环境下的欧式期权偏微分方程和欧式期权定价公式.

3.1 金融市场建模

本节用带跳环境下混合次分数布朗运动来替代模型的随机部分. 得到了带跳模型满足的偏微分方程, 期权定价公式以及相应的希腊字母.

需要对金融市场做出假设条件:

(1)考虑金融市场上可进行交易的两种资产. 一种是无风险资产, 比如债券; 另一种是有风险资产, 如股票. 假设这两种资产分别满足如下的微分方程

$$dZ_t = rZ_t dt, Z_0=1, t \in [0, T], \quad (3.1)$$

$$dS_t = S_t(\mu - \lambda\mu_{J(t)})dt + \sigma S_t d\xi_t^H + \sigma S_t d\xi_t + S_t(e^{J(t)} - 1)dN_t, S_0 > 0, t \in [0, T]. \quad (3.2)$$

(2)市场是完备的, 金融资产不支付红利, 交易无限可分割, 期望回报率 μ 和波动率 σ 为常数, 无风险利率 r 为常数, 到期日为 T , 执行价格为 K , $t \in [0, T]$.

(3)资产价格的跳跃次数 N_t 为服从参数是 λ 的泊松过程, $\{J(t)_i, i \geq 1\}$ 为独立同分布序列, $J(t)$ 为金融资产价格的跳跃幅度, 并且 $(e^{J(t)} - 1) \sim \tilde{N}(\mu_{J(t)}, \delta^2(t))$.

(4)次分数布朗运动 $\{\xi_t^H, t \geq 0\}$, 跳跃次数 $\{N_t, t \geq 0\}$, 和跳跃幅度 $\{J(t)_i, i \geq 1\}$ 之间相互独立. 次分数布朗运动 $\{\xi_t^H, t \geq 0\}$ 中的Hurst指数满足 $0.75 < H < 1$.

3.2 在跳环境下的偏微分方程

由带跳混合次分数布朗运动模型的相应假设, 通过Delta对冲原理, 可以得到欧式期权价格满足的偏微分方程, 接下来以定理的形式给出.

定理 3.1 关于式(3.2)的欧式期权价格 f_t 在 $t(t \in [0, T])$ 时刻满足的偏微分方程为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} + H\sigma^2(2 - 2^{2H-1})t^{2H-1}S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} \\ & + (r - \lambda\mu_{J(t)})S_t \frac{\partial f}{\partial S_t} - rf + \lambda E[f(e^{J(t)}S_t, t) - f(S_t, t)] = 0. \end{aligned}$$

证明 令 $f=f(S_t,t)$,通过自融资策略构建含有金融衍生品 $f(S_t,t)$ 和 Δ 份股票 S_t ,
则投资组合可表示为

$$\Pi_t = f(S_t,t) - \Delta S_t. \quad (3.3)$$

进一步可得到在 dt 时间内投资组合的变化为

$$d\Pi_t = df(S_t,t) - \Delta dS_t, \quad (3.4)$$

其中,

$$S_t = S_0 \exp\left((\mu - \lambda\mu_{J(t)})t + \sigma\xi_t^H + \sigma\xi_t - (1 - 2^{2H-2})\sigma^2 t^{2H} - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sum_{i=1}^{N_t} J(t)_i\right), \quad (3.5)$$

为式(3.2)的解.

由 Wick-Itô 公式,得

$$\begin{aligned} df(S_t, t) &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} + (2 - 2^{2H-1})H\sigma^2 t^{2H-1} S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} \\ &\quad + (\mu - \lambda\mu_{J(t)})S_t \frac{\partial f}{\partial S_t} + \sigma S_t \frac{\partial f}{\partial S_t} d\xi_t^H + \sigma S_t \frac{\partial f}{\partial S_t} d\xi_t \\ &\quad + [f(e^{J(t)}S_t, t) - f(S_t, t)] dN_t. \end{aligned} \quad (3.6)$$

将式(3.2)和(3.6)代入式(3.4),得

$$\begin{aligned} d\Pi_t &= \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} + (2 - 2^{2H-1})H\sigma^2 t^{2H-1} S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2}\right. \\ &\quad \left.+ (\mu - \lambda\mu_{J(t)})S_t \frac{\partial f}{\partial S_t} - \Delta S_t(\mu - \lambda\mu_{J(t)})\right] dt \\ &\quad + \left(\sigma S_t \frac{\partial f}{\partial S_t} - \Delta\sigma S_t\right) d\xi_t^H + \left(\sigma S_t \frac{\partial f}{\partial S_t} - \Delta\sigma S_t\right) d\xi_t \\ &\quad + [f(e^{J(t)}S_t, t) - f(S_t, t) - \Delta S_t(e^{J(t)} - 1)] dN_t. \end{aligned} \quad (3.7)$$

在式(3.7)中,令 $\Delta = \frac{\partial f}{\partial S_t}$,得

$$\begin{aligned} d\Pi_t &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} + (2 - 2^{2H-1})H\sigma^2 t^{2H-1} S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2}\right. \\ &\quad \left.+ \lambda E[f(e^{J(t)}S_t, t) - f(S_t, t) - \frac{\partial f}{\partial S_t} S_t(e^{J(t)} - 1)]\right) dt. \end{aligned} \quad (3.8)$$

由无风险条件假设,得

$$d\Pi_t = r\Pi_t dt. \quad (3.9)$$

由 $\Delta = \frac{\partial f}{\partial S_t}$,式(3.8)和(3.9)得欧式期权价格满足的偏微分方程.证毕.

通过期权价格满足的定理 3.1,下面给出欧式看涨期权定价公式以及证明.

3.3 在跳环境下的定价公式

定理 3.2 设执行价格为 K ,则基于式(3.5),欧式看涨期权在 t ($t \in [0, T]$)时刻的价格为

$$C(t, S_t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda(T-t)} \lambda^n (T-t)^n}{n!} \varepsilon_n \cdot \left[S_t e^{-\lambda \mu_{J(t)}(T-t) + \sum_{i=1}^n J(t)_i} \tilde{N}(d_1) - K e^{-r(T-t)} \tilde{N}(d_2) \right], \quad (3.10)$$

式中,

$$d_1 = \frac{(r - \lambda \mu_{J(t)})(T-t) + (1 - 2^{2H-2})\sigma^2(T^{2H} - t^{2H}) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) + \ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \sum_{i=1}^n J(t)_i}{\sqrt{\sigma^2(2 - 2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H}) + \sigma^2(T-t)}},$$

$$d_2 = \frac{-(1 - 2^{2H-2})\sigma^2(T^{2H} - t^{2H}) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) + \ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \sum_{i=1}^n J(t)_i + (r - \lambda \mu_{J(t)})(T-t)}{\sqrt{\sigma^2(2 - 2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H}) + \sigma^2(T-t)}},$$

ε_n 表示 $e^{\sum_{i=1}^n J(t)_i}$ 的期望算子, $\tilde{N}(\cdot)$ 是正态累积分布函数.

证明 由定理 2.1, 得

$$\begin{aligned} C(t, S_t) &= \tilde{E}[e^{-r(T-t)}(S_T - K)^+ | F_t^H] \\ &= e^{-r(T-t)} \tilde{E}[S_T 1_{S_T > K} | F_t^H] - K e^{-r(T-t)} \tilde{E}[1_{S_T > K} | F_t^H], \\ &= I_1 + I_2, \end{aligned} \quad (3.11)$$

式中: $1_{S_T > K}$ 为示性函数; I_1 为 $e^{-r(T-t)} \tilde{E}[S_T 1_{S_T > K} | F_t^H]$; I_2 为 $-K e^{-r(T-t)} \tilde{E}[1_{S_T > K} | F_t^H]$.

在概率测度 P^H 下的金融资产价格为

$$dS_t = S_t(\mu - \lambda \mu_{J(t)})dt + \sigma S_t d\xi_t^H + \sigma S_t d\xi_t + S_t(e^{J(t)} - 1)dN_t, S_0 > 0, t \in [0, T].$$

通过次分数 Girsanov 定理, 将 $\sigma \xi_t^H + \sigma \xi_t = \sigma \widehat{\xi}_t^H + \sigma \widehat{\xi}_t - \mu + r$, 代入式(3.2), 得在风险中性测度 \widehat{P}^H 下的金融资产价格为

$$dS_t = S_t(r - \lambda \mu_{J(t)})dt + \sigma S_t d\widehat{\xi}_t^H + \sigma S_t d\widehat{\xi}_t + S_t(e^{J(t)} - 1)dN_t, S_0 > 0, t \in [0, T]. \quad (3.12)$$

解式(3.12)得

$$S_t = S_0 \exp\left((r - \lambda \mu_{J(t)})t + \sigma \widehat{\xi}_t^H + \sigma \widehat{\xi}_t - (1 - 2^{2H-2})\sigma^2 t^{2H} - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sum_{i=1}^{N_t} J(t)_i\right), \quad (3.13)$$

其中,

$$\begin{aligned} S_T &= S_t \exp\left((r - \lambda \mu_{J(t)})(T-t) + \sigma(\widehat{\xi}_T^H - \widehat{\xi}_t^H) + \sigma(\widehat{\xi}_T - \widehat{\xi}_t)\right) \\ &\quad - (1 - 2^{2H-2})\sigma^2(T^{2H} - t^{2H}) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) + \sum_{i=1}^{N_{T-t}} J(t)_i, \end{aligned} \quad (3.14)$$

可得

$$\begin{aligned} S_T^n &= S_t \exp\left((r - \lambda \mu_{J(t)})(T-t) + \sigma(\widehat{\xi}_T^H - \widehat{\xi}_t^H) + \sigma(\widehat{\xi}_T - \widehat{\xi}_t)\right) \\ &\quad - (1 - 2^{2H-2})\sigma^2(T^{2H} - t^{2H}) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) + \sum_{i=1}^n J(t)_i. \end{aligned} \quad (3.15)$$

由 N_{T-t} 和 $J(t)_i$ 相互独立, 以及强度为 $\lambda(T-t)$ 的泊松过程, 得

$$S_T = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda(T-t)} \frac{\lambda^n (T-t)^n}{n!} S_T^n. \quad (3.16)$$

将式(3.16)代入到式(3.11)中的 I_2 , 则 I_2 为

$$-Ke^{-r(T-t)} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda(T-t)} \frac{\lambda^n (T-t)^n}{n!} \tilde{E}[1_{\{S_T^n > K\}} | F_t^H],$$

当 $S_T > K, t = 0$ 时,解式(3.14)得

$$\sigma \widehat{\xi}_T^H + \sigma \widehat{\xi}_T > \widehat{d}_2,$$

其中,

$$\widehat{d}_2 = (1 - 2^{2H-2})\sigma^2 T^{2H} + \frac{1}{2}\sigma^2 T + \ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - (r - \lambda\mu_{J(t)})T - \sum_{i=1}^{N_T} J(t)_i, \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}[1_{\{S_T^n > K\}} | F_t^H] &= \tilde{E}\left[1_{(\widehat{d}_2, \infty)}(\sigma \widehat{\xi}_T^H + \sigma \widehat{\xi}_T) \middle| F_t^H\right] \\ &= \int_{\widehat{d}_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2(2 - 2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H}) + \sigma^2(T-t))}} \\ &\quad \cdot \exp\left(-\frac{(x - \sigma \widehat{\xi}_t^H - \sigma \widehat{\xi}_t)^2}{2(\sigma^2(2 - 2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H}) + \sigma^2(T-t))}\right) dx \\ &= \tilde{N}(d_2), \end{aligned} \quad (3.18)$$

在式(3.18)中,

$$d_2 = \frac{\sigma \widehat{\xi}_t^H + \sigma \widehat{\xi}_t - \widehat{d}_2}{\sqrt{\sigma^2(2 - 2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H}) + \sigma^2(T-t)}}.$$

式(3.13)为

$$\sigma \widehat{\xi}_t^H + \sigma \widehat{\xi}_t = (1 - 2^{2H-2})\sigma^2 t^{2H} + \frac{1}{2}\sigma^2 t + \ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) - (r - \lambda\mu_{J(t)})t - \sum_{i=1}^{N_t} J(t)_i. \quad (3.19)$$

将式(3.17)和(3.19)代入 d_2 中,得

$$\begin{aligned} d_2 &= \frac{-(1-2^{2H-2})\sigma^2(T^{2H}-t^{2H})-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)+\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\sum_{i=1}^{N_{T-t}}J(t)_i+(r-\lambda\mu_{J(t)})(T-t)}{\sqrt{\sigma^2(2-2^{2H-1})(T^{2H}-t^{2H})+\sigma^2(T-t)}} \\ &= \frac{-(1-2^{2H-2})\sigma^2(T^{2H}-t^{2H})-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)+\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\sum_{i=1}^{N_t}J(t)_i+(r-\lambda\mu_{J(t)})(T-t)}{\sqrt{\sigma^2(2-2^{2H-1})(T^{2H}-t^{2H})+\sigma^2(T-t)}}. \end{aligned}$$

将式(3.16)代入 I_1 ,得

$$e^{-r(T-t)} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda(T-t)} \frac{\lambda^n (T-t)^n}{n!} \tilde{E}[S_T^n 1_{\{S_T^n > K\}} | F_t^H].$$

令

$$X_t = \exp(\sigma \widehat{\xi}_t^H + \sigma \widehat{\xi}_t - (1 - 2^{2H-2})\sigma^2 t^{2H} - \frac{1}{2}\sigma^2 t), \quad (3.20)$$

则

$$\begin{aligned} &\tilde{E}[S_T^n 1_{\{S_T^n > K\}} | F_t^H] \\ &= \tilde{E}\left[S_0 e^{(r-\lambda\mu_{J(t)})T + \sigma \widehat{\xi}_T^H + \sigma \widehat{\xi}_T - (1-2^{2H-2})\sigma^2 T^{2H} - \frac{1}{2}\sigma^2 T + \sum_{i=1}^{N_T} J(t)_i} 1_{\{S_T^n > K\}} \middle| F_t^H\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= S_0 e^{(r-\lambda\mu_{J(t)})T + \sum_{i=1}^{N_T} J(t)_i} \tilde{E} \left[X_T 1_{\{\widehat{d}_2 < x < \infty\}} (\sigma \widehat{\xi}_T^H + \sigma \widehat{\xi}_T) \middle| F_t^H \right] \\
&= S_0 e^{(r-\lambda\mu_{J(t)})T + \sum_{i=1}^{N_T} J(t)_i} X_t \tilde{E}^* \left[1_{\{\widehat{d}_2 < x < \infty\}} (\sigma \widehat{\xi}_T^H + \sigma \widehat{\xi}_T) \middle| F_t^H \right] \\
&= S_0 e^{(r-\lambda\mu_{J(t)})T + \sum_{i=1}^{N_T} J(t)_i} X_t \tilde{E}^* \left[1_{\{S_T^n > K\}} \middle| F_t^H \right]. \tag{3.21}
\end{aligned}$$

由次分数 Girsanov 定理,得

$$\sigma \xi_t^{H*} + \sigma \xi_t^* = \sigma \widehat{\xi}_t^H + \sigma \widehat{\xi}_t - \sigma^2 (2 - 2^{2H-1}) t^{2H} - \sigma^2 t. \tag{3.22}$$

将式(3.22)代入式(3.13)中,得在概率测度 P^{H*} 下的金融资产价格为

$$\begin{aligned}
S_t &= S_0 \exp \left((r - \lambda\mu_{J(t)})t + \sigma \xi_t^{H*} + \sigma \xi_t^* + (1 - 2^{2H-2}) \sigma^2 t^{2H} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \sigma^2 t + \sum_{i=1}^{N_t} J(t)_i \right). \tag{3.23}
\end{aligned}$$

当 $t = T, S_T > K$ 时,解式(3.23),得

$$\sigma \xi_T^{H*} + \sigma \xi_T^* > \widehat{d}_1,$$

其中,

$$\widehat{d}_1 = -(r - \lambda\mu_{J(t)})t - (1 - 2^{2H-2}) \sigma^2 T^{2H} - \frac{1}{2} \sigma^2 T + \ln \left(\frac{K}{S_0} \right) - \sum_{i=1}^{N_T} J(t)_i. \tag{3.24}$$

计算式(3.21)中的拟条件期望为

$$\begin{aligned}
&\tilde{E}^* \left[1_{\{S_T^n > K\}} \middle| F_t^H \right] = \tilde{E}^* \left[1_{\{\widehat{d}_1 < x < \infty\}} (\sigma \xi_T^{H*} + \sigma \xi_T^*) \middle| F_t^H \right] \\
&= \int_{\widehat{d}_1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2(2 - 2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H}) + \sigma^2(T-t))}} \\
&\quad \cdot \exp \left(-\frac{(x - \sigma \xi_t^{H*} - \sigma \xi_t^*)^2}{2(\sigma^2(2 - 2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H}) + \sigma^2(T-t))} \right) dx \\
&= \tilde{N}(d_1), \tag{3.25}
\end{aligned}$$

其中, $d_1 = \frac{\sigma \xi_t^{H*} + \sigma \xi_t^* - \widehat{d}_1}{\sqrt{\sigma^2(2 - 2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H}) + \sigma^2(T-t)}}$, 于是式(3.23)为

$$\sigma \xi_t^{H*} + \sigma \xi_t^* = -(r - \lambda\mu_{J(t)})t - (1 - 2^{2H-2}) \sigma^2 t^{2H} - \frac{1}{2} \sigma^2 t + \ln \left(\frac{S_t}{S_0} \right) - \sum_{i=1}^{N_t} J(t)_i. \tag{3.26}$$

将式(3.24)和(3.26)代入 d_1 中,得

$$d_1 = \frac{(r - \lambda\mu_{J(t)})(T-t) + (1 - 2^{2H-2}) \sigma^2 (T^{2H} - t^{2H}) + \frac{1}{2} \sigma^2 (T-t) + \ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + \sum_{i=1}^{N_t} J(t)_i}{\sqrt{\sigma^2(2 - 2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H}) + \sigma^2(T-t)}}$$

将式(3.25)代入式(3.21)中,得

$$\begin{aligned}
&\tilde{E} \left[S_T^n 1_{\{S_T^n > K\}} \middle| F_t^H \right] \\
&= S_0 e^{(r-\lambda\mu_{J(t)})T + \sum_{i=1}^{N_T} J(t)_i} e^{\sigma \widehat{\xi}_t^H + \sigma \widehat{\xi}_t - (1-2^{2H-2}) \sigma^2 t^{2H} - \frac{1}{2} \sigma^2 t} \tilde{N}(d_1) \\
&= (S_0 e^{(r-\lambda\mu_{J(t)})t + \sum_{i=1}^{N_t} J(t)_i + \sigma \widehat{\xi}_t^H + \sigma \widehat{\xi}_t - (1-2^{2H-2}) \sigma^2 t^{2H} - \frac{1}{2} \sigma^2 t}) e^{(r-\lambda\mu_{J(t)})(T-t) + \sum_{i=1}^{N_T-t} J(t)_i} \tilde{N}(d_1)
\end{aligned}$$

$$= S_t e^{(r-\lambda\mu_{J(t)})(T-t)+\sum_{i=1}^n J(t)_i \tilde{N}(d_1)}. \quad (3.27)$$

综上所述,由式(3.11)、(3.18)、(3.21)、(3.25)和(3.27),得

$C(t, S_t) =$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda(T-t)} \lambda^n (T-t)^n}{n!} \varepsilon_n \cdot [S_t e^{-\lambda\mu_{J(t)}(T-t)+\sum_{i=1}^n J(t)_i \tilde{N}(d_1)} - K e^{-r(T-t)} \tilde{N}(d_2)].$$

证毕.

类似可得基于式(3.5),欧式看跌期权所满足定价公式,接下来以推论的形式给出.

推论 3.1 设执行价格为 K , 则基于式(3.5), 欧式看跌期权在 $t \in [0, T]$ 时刻的价格

$$P(t, S_t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda(T-t)} \lambda^n (T-t)^n}{n!} \varepsilon_n \cdot [-S_t e^{-\lambda\mu_{J(t)}(T-t)+\sum_{i=1}^n J(t)_i \tilde{N}(-d_1)} + K e^{-r(T-t)} \tilde{N}(-d_2)].$$

推论 3.1 与定理 3.2 的证明类似, 并且其中的 d_1 和 d_2 与定理 3.2 中的式子相同. 由定理 3.2 与推论 3.1 可以得到下面的推论.

推论 3.2 欧式看涨, 看跌期权价格满足

$$C(t, S_t) - P(t, S_t) = S_t e^{-\lambda\mu_{J(t)}(T-t)} - K e^{-r(T-t)}, \quad (3.28)$$

称其为看涨看跌平价公式.

前面已将经典期权定价推广到带跳跃情况, 下面将带跳欧式期权推广到更加一般的情况, 比如考虑实际的交易费用.

4 带交易费用的欧式期权定价

本部分主要介绍带交易费用的资产定价.随着我国金融市场的不断开放,期权的推出对提高金融市场效率和完善金融市场体系,促进金融市场的进一步健康发展发挥了积极作用.在我国,期权交易处于相对较高的投资门槛之下,期权交易活跃程度不够,而且期权交易费用高昂,更会挫伤期权交易的活跃度.期权定价研究在实际的金融市场中,不仅能够用于资产定价,而且还能够提高市场的流动性,降低交易成本,促进市场的完备性,对于投资者来说,券商对期权交易费用的合理收取会降低投资者的交易成本,能更好发挥期权的避险功能.对于券商而言,合理收取期权交易费用可能会提高期权交易量,同时,也会影响到标的资产的交易量,这种交易量的放大会增加券商收入.期权交易费用的合理收取能让期权的功能得到更好发挥.期权在经济上的重要功能是使市场更加完备,提高市场效率.合理收取期权费用能使得金融衍生品市场更加完善,促进投资者的理性投资和金融市场的变革,有助于以后推出更多的金融衍生品.并且在实际金融市场交易当中,投资者为了获利,会频繁改变交易策略,继而产生高额交易费用,因此该部分通过金融市场建模,得到了带交易费用的期权偏微分方程以及定价公式.

4.1 带交易费用的金融市场建模

本部分用跳环境下带交易费用的混合次分数布朗运动来代替模型的随机部分.得到了跳环境下带交易费用的混合 B-S 模型满足的偏微分方程,期权定价公式和看涨看跌平价公式.

对金融市场的假设如下:

(1)在金融市场上有两种可进行交易的资产.一种是有风险的资产,如股票 S_t ;另一种是无风险的资产,如债券 Z_t .两种资产分别满足如下方程

$$S_t = S_0 \exp(\mu t + \sigma \xi_t^H + \sigma \xi_t + N_t \ln J), \quad (4.1)$$

$$dZ_t = rZ_t dt, Z_0 = 1, t \in [0, T], \quad (4.2)$$

其中,标的资产中历史波动率 σ 为常数,无风险利率 r 为常数.

(2)市场为完备的,标的资产无红利支付,交易无限可分割,有交易费用.

(3) 标的资产价格的跳跃次数 N_t 为服从参数是 λ 的泊松过程, J 为标的资产价格的跳跃幅度并满足如下分布,

$$\ln(J) \sim \tilde{N}(\mu_J, \delta_J).$$

(4) 跳跃次数 $\{N_t, t \geq 0\}$, 跳跃幅度 J 和次分数布朗运动 $\{\xi_t^H, t \geq 0\}$ 之间相互独立.

在假设条件(1)-(4)下, 通过 Delta 对冲策略, 可以得到欧式看涨期权价格所满足的偏微分方程和对应的定价公式.

4.2 带交易费用的期权定价公式

在假设条件(1)-(4)下, 通过 Delta 对冲策略, 可以得到欧式看涨期权价格所满足的偏微分方程和对应的定价公式.

定理 4.1 设期望回报率 μ , 期权中的隐含波动率为 σ , 交易费用 k 为常数, 执行价格 K , 到期日 $T, t \in [0, T]$. 欧式看涨期权价格 f_t 在 $t(t \in [0, T])$ 时刻满足的偏微分方程为

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} + r S_t \frac{\partial f}{\partial S_t} - r f + \lambda E\{f(J_t S_t, t) - f(S_t, t)\} - \lambda E\{J - 1\} S_t \frac{\partial f}{\partial S_t} = 0,$$

式中: $\tilde{\sigma}^2 = \sqrt{2 \left(\log \left(\frac{M}{dt} \vee e \right) + \ln(\ln M) \right) \sigma^2 (dt)^{2H-1}}$

$$+ k \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} \sqrt{\frac{2}{\pi} \left(\frac{\sigma^2}{dt} + 2 \left(\log \left(\frac{M}{dt} \vee e \right) + \ln(\ln M) \right) \sigma^2 (dt)^{2H-2} \right)} + \sigma^2,$$

与 $E\{J - 1\} = e^{\mu_j + \frac{\sigma_j^2}{2}} - 1$. 进一步, 给出欧式看涨期权价格 f_t 为

$$f(S_t, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda'(T-t)} (\lambda'(T-t))^n}{n!} \{S_t \tilde{N}(d_1) - K e^{-r(T-t)} \tilde{N}(d_2)\},$$

式中: $d_1 = \frac{r_n(T-t) + \frac{\sigma_n^2}{2}(T-t) + \ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{\sigma_n \sqrt{T-t}}, d_2 = d_1 - \sigma_n \sqrt{T-t}, \tilde{N}(\cdot)$ 是正态累积分布函数,

$$\sigma_n^2 = \sqrt{2 \left(\log \left(\frac{M}{dt} \vee e \right) + \ln(\ln M) \right) \sigma^2 (dt)^{2H-1}}$$

$$+ k \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} \sqrt{\frac{2}{\pi} \left(\frac{\sigma^2}{dt} + 2 \left(\log \left(\frac{M}{dt} \vee e \right) + \ln(\ln M) \right) \sigma^2 (dt)^{2H-2} \right)} + \sigma^2 + \frac{n \sigma_j^2}{T-t},$$

$$r_n = r - \lambda E\{J - 1\} + \frac{n \ln E\{J\}}{T-t} = r + \lambda \left(e^{\mu_j + \frac{\sigma_j^2}{2}} - 1 \right) + \frac{n(\mu_j + \frac{\sigma_j^2}{2})}{T-t},$$

$\lambda' = \lambda E\{J\} = \lambda e^{\mu_j + \frac{\sigma_j^2}{2}}$, 这里 k 是交易费用.

证明 令 $f = f(S_t, t)$, 通过自融资策略构建出含有 $\Delta(t)$ 份股票 S_t 和金融衍生品 $f(S_t, t)$ 的投资组合, 则可以表示为

$$\Pi_t = \Delta(t) S_t - f(S_t, t), \quad (4.3)$$

进一步, 由文献[45]可得在离散时间区间 dt 中带交易费用的投资组合变化为

$$d[\Pi]_t = \Delta(t) dS_t - d f(S_t, t) - \frac{k}{2} |d\Delta(t)| S_t. \quad (4.4)$$

若离散时间区间 dt 与资产变化都很小, 当 $dN_t = 0$, 且概率为 $1 - \lambda dt$ 时, 由泰勒公式可得到关于混合次分数布朗运动的金融资产价格满足的方程为

$$\begin{aligned} dS_t = & S_t \mu dt + S_t \sigma d\xi_t^H + S_t \sigma d\xi_t + \frac{S_t}{2} (\mu dt + \sigma d\xi_t^H + \sigma d\xi_t)^2 \\ & + \frac{S_t}{6} e^{\theta(\mu dt + \sigma d\xi_t^H + \sigma d\xi_t)} (\mu dt + \sigma d\xi_t^H + \sigma d\xi_t)^3, \end{aligned} \quad (4.5)$$

式中: $\theta = \theta(t, w)$, $w \in \Omega$, 和 $0 < \theta < 1$.

由引理 2.1 得,

$$(dt) d\xi_t^H = O\left((dt)^{1+H} \sqrt{2\left(\log\left(\frac{M}{dt} \vee e\right) + \ln(\ln M)\right)}\right), \quad (4.6)$$

$$(dt) d\xi_t = O\left((dt)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\left(\log\left(\frac{M}{dt} \vee e\right) + \ln(\ln M)\right)}\right), \quad (4.7)$$

则,

$$\begin{aligned} & e^{\theta(\mu dt + \sigma d\xi_t^H + \sigma d\xi_t)} (\mu dt + \sigma d\xi_t^H + \sigma d\xi_t)^3 \\ = & O((dt)^3) + O((dt)^{\frac{5}{2}} \sqrt{2\left(\log\left(\frac{M}{dt} \vee e\right) + \ln(\ln M)\right)}) + O\left(2(dt)^2 \left(\log\left(\frac{M}{dt} \vee e\right) + \ln(\ln M)\right)\right) \\ & + O\left((dt)^{\frac{3}{2}} \left(2\left(\log\left(\frac{M}{dt} \vee e\right) + \ln(\ln M)\right)\right)^{\frac{3}{2}}\right) = O\left((dt)^{\frac{3}{2}} \left(2\left(\log\left(\frac{M}{dt} \vee e\right) + \ln(\ln M)\right)\right)^{\frac{3}{2}}\right), \end{aligned} \quad (4.8)$$

式中: 当 $dt \rightarrow 0$ 时, $\frac{d\xi_t^H}{d\xi_t} \rightarrow 0$.

因此, 得

$$\begin{aligned} dS_t = & S_t \mu dt + S_t \sigma d\xi_t^H + S_t \sigma d\xi_t + \frac{S_t}{2} (\mu dt + \sigma d\xi_t^H + \sigma d\xi_t)^2 + \\ & O\left((dt)^{\frac{3}{2}} \left(2\left(\log\left(\frac{M}{dt} \vee e\right) + \ln(\ln M)\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right), \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$(dS_t)^2 = (S_t \sigma d\xi_t^H + S_t \sigma d\xi_t)^2 + O\left((dt)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\left(\log\left(\frac{M}{dt} \vee e\right) + \ln(\ln M)\right)}\right), \quad (4.10)$$

$$df(S_t, t) = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial S_t} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} (dS_t)^2 + O\left((dt)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\left(\log\left(\frac{M}{dt} \vee e\right) + \ln(\ln M)\right)}\right), \quad (4.11)$$

$$\text{和 } d\Delta(t) = \frac{\partial \Delta}{\partial t} dt + \frac{\partial \Delta}{\partial S_t} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Delta}{\partial S_t^2} (dS_t)^2 + O\left((dt)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\left(\log\left(\frac{M}{dt} \vee e\right) + \ln(\ln M)\right)}\right). \quad (4.12)$$

当 $dN_t = 1$, 且概率为 λdt 时, 若在区间 $[t, t + \Delta t]$ 中的 t 时刻发生跳跃, 则在跳环境和混合次分数布朗运动下的金融资产价格为

$$S_{t+} = S_0 e^{\mu t + \sigma \xi_t^H + \sigma \xi_t + \ln J}, \quad (4.13)$$

$$S_{t+\Delta t} = S_0 e^{\mu(t+\Delta t) + \sigma \xi_{t+\Delta t}^H + \sigma \xi_{t+\Delta t} + \ln J}, \quad (4.14)$$

$$dS_{t+} = S_{t+} (e^{\mu dt + \sigma d\xi_t^H + \sigma d\xi_t} - 1), \quad (4.15)$$

$$dS_t = S_{t^+} \left(e^{\mu dt + \sigma d\xi_t^H + \sigma d\tilde{\xi}_t} - 1 \right) + (S_{t^+} - S_t), \quad (4.16)$$

$$df(S_t, t) = f(S_{t^+}, t) - f(S_t, t) + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial S_{t^+}} dS_{t^+} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_{t^+}^2} (dS_{t^+})^2 + o \left((dt)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2 \left(\log \left(\frac{M}{dt} \vee e \right) + \ln(\ln M) \right)} \right), \quad (4.17)$$

$$d\Delta(S_t, t) = \Delta(S_{t^+}, t) - \Delta(S_t, t) + \frac{\partial \Delta(S_{t^+}, t)}{\partial t} dt + \frac{\partial \Delta(S_{t^+}, t)}{\partial S_{t^+}} dS_{t^+} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Delta(S_{t^+}, t)}{\partial S_{t^+}^2} (dS_{t^+})^2 + o \left((dt)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2 \left(\log \left(\frac{M}{dt} \vee e \right) + \ln(\ln M) \right)} \right), \quad (4.18)$$

其中 $dS_{t^+} = S_{t+dt} - S_{t^+}$.

由假设条件,可得

$$E \left(\frac{d\Pi_t}{\Pi_t} \right) = \frac{dZ_t}{Z_t}, \quad E(d\Pi_t) = r\Pi_t dt + O((dt)^2).$$

则,

$$\begin{aligned} & (1 - \lambda dt) E \left\{ \Delta(t) dS_t - df(S_t, t) - \frac{kS_t}{2} |d\Delta(t)| \right\} \\ & + \lambda dt E \left\{ S_{t^+} \left(e^{\mu dt + \sigma d\xi_t^H + \sigma d\tilde{\xi}_t} - 1 \right) \Delta(t) + (S_{t^+} - S_t) \Delta(t) - \left(f(S_{t^+}, t) - f(S_t, t) + \frac{\partial f}{\partial t} dt \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{\partial f}{\partial S_{t^+}} dS_{t^+} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_{t^+}^2} (dS_{t^+})^2 + o \left((dt)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2 \left(\log \left(\frac{M}{dt} \vee e \right) + \ln(\ln M) \right)} \right) \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{kS_t}{2} |\Delta(S_{t^+}, t) - \Delta(S_t, t) + \frac{\partial \Delta(S_{t^+}, t)}{\partial t} dt + \frac{\partial \Delta(S_{t^+}, t)}{\partial S_{t^+}} dS_{t^+} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Delta(S_{t^+}, t)}{\partial S_{t^+}^2} (dS_{t^+})^2 \right. \\ & \quad \left. + o \left((dt)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2 \left(\log \left(\frac{M}{dt} \vee e \right) + \ln(\ln M) \right)} \right) \right\} = r\Pi_t dt, \end{aligned}$$

进一步整理,得

$$\begin{aligned} & (1 - \lambda dt) E \{ \Delta(t) dS_t - df(S_t, t) \} \\ & + \lambda dt E \left\{ S_{t^+} \left(e^{\mu dt + \sigma d\xi_t^H + \sigma d\tilde{\xi}_t} - 1 \right) \Delta(t) + (S_{t^+} - S_t) \Delta(t) - \left(f(S_{t^+}, t) - f(S_t, t) + \frac{\partial f(S_{t^+}, t)}{\partial t} dt \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{\partial f(S_{t^+}, t)}{\partial S_{t^+}} dS_{t^+} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(S_{t^+}, t)}{\partial S_{t^+}^2} (dS_{t^+})^2 + o \left((dt)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2 \left(\log \left(\frac{M}{dt} \vee e \right) + \ln(\ln M) \right)} \right) \right) \right\} \\ & \quad - (1 - \lambda dt) E \left\{ \frac{kS_t}{2} |d\Delta(t)| \right\} \\ & \quad - \lambda dt E \left\{ \frac{kS_t}{2} |\Delta(S_{t^+}, t) - \Delta(S_t, t) + \frac{\partial \Delta(S_{t^+}, t)}{\partial t} dt + \frac{\partial \Delta(S_{t^+}, t)}{\partial S_{t^+}} dS_{t^+} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Delta(S_{t^+}, t)}{\partial S_{t^+}^2} (dS_{t^+})^2 + o \left((dt)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2 \left(\log \left(\frac{M}{dt} \vee e \right) + \ln(\ln M) \right)} \right) \right\} = r\Pi_t dt + O((dt)^2). \end{aligned}$$

则,交易费用为

$$\begin{aligned}
& E\left\{\frac{kS_t}{2}|d\Delta(t)|\right\} = \frac{(1-\lambda dt)kS_t}{2} E|d\Delta(t)| \\
& + \frac{(\lambda dt)kS_t}{2} \left| \Delta(S_{t^+}, t) - \Delta(S_t, t) + \frac{\partial\Delta(S_{t^+}, t)}{\partial t} dt + \frac{\partial\Delta(S_{t^+}, t)}{\partial S_{t^+}} dS_{t^+} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\Delta(S_{t^+}, t)}{\partial S_{t^+}^2} (dS_{t^+})^2 \right. \\
& \quad \left. + O\left((dt)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\left(\log\left(\frac{M}{dt} \vee e\right) + \ln(\ln M)\right)} \right) \right| \\
& = \frac{(1-\lambda dt)kS_t}{2} E \left| \frac{\partial\Delta(S_t, t)}{\partial t} dt + \frac{\partial\Delta(S_t, t)}{\partial S_t} dS_t \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\Delta(S_t, t)}{\partial S_t^2} (dS_t)^2 + O\left((dt)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\left(\log\left(\frac{M}{dt} \vee e\right) + \ln(\ln M)\right)} \right) \right| \\
& \quad + \frac{(\lambda dt)kS_t}{2} \left| \Delta(S_{t^+}, t) - \Delta(S_t, t) + \frac{\partial\Delta(S_{t^+}, t)}{\partial t} dt + \frac{\partial\Delta(S_{t^+}, t)}{\partial S_{t^+}} dS_{t^+} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\Delta(S_{t^+}, t)}{\partial S_{t^+}^2} (dS_{t^+})^2 + O\left((dt)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\left(\log\left(\frac{M}{dt} \vee e\right) + \ln(\ln M)\right)} \right) \right| \\
& \approx \frac{kS_t^2}{2} \left| \frac{\partial\Delta(S_{t^+}, t)}{\partial S_{t^+}} \right| E|\sigma d\xi_t^H + \sigma d\xi_t| + \frac{k\lambda S_t dt}{2} |\Delta(S_{t^+}, t) - \Delta(S_t, t)| + O(dt) \\
& = \frac{kS_t^2}{2} \left| \frac{\partial\Delta(S_t, t)}{\partial S_t} \right| \sqrt{\frac{2}{\pi} \left(\sigma^2 dt + 2\left(\log\left(\frac{M}{dt} \vee e\right) + \ln(\ln M)\right) \sigma^2 (dt)^{2H} \right)} \\
& \quad + \frac{k\lambda S_t dt}{2} |\Delta(S_{t^+}, t) - \Delta(S_t, t)| + O(dt), \tag{4.19}
\end{aligned}$$

式中: $\Delta(S_t, t) = \frac{\partial f}{\partial S_t}$.

综上所述,可得

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + rS_t \frac{\partial f}{\partial S_t} + \frac{S_t^2}{2} \left(\sigma^2 + \sqrt{2\left(\log\left(\frac{M}{dt} \vee e\right) + \ln(\ln M)\right)} \sigma^2 (dt)^{2H-1} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} \right. \\
& \quad \left. - rf + \lambda E\{f(J_t S_t, t) - f(S_t, t)\} - \lambda E\{J-1\} S_t \frac{\partial f}{\partial S_t} \right. \\
& \quad \left. + \frac{kS_t^2}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi} \left(\frac{\sigma^2}{dt} + 2\left(\log\left(\frac{M}{dt} \vee e\right) + \ln(\ln M)\right) \sigma^2 (dt)^{2H-2} \right)} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} \right| \right\} dt + O(dt) = 0. \tag{4.20}
\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial f}{\partial t} + rS_t \frac{\partial f}{\partial S_t} + \frac{S_t^2}{2} \left(\sigma^2 + \sqrt{2\left(\log\left(\frac{M}{dt} \vee e\right) + \ln(\ln M)\right)} \sigma^2 (dt)^{2H-1} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} \\
& \quad - rf + \lambda E\{f(J_t S_t, t) - f(S_t, t)\} - \lambda E\{J-1\} S_t \frac{\partial f}{\partial S_t} \\
& \quad + \frac{kS_t^2}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi} \left(\frac{\sigma^2}{dt} + 2\left(\log\left(\frac{M}{dt} \vee e\right) + \ln(\ln M)\right) \sigma^2 (dt)^{2H-2} \right)} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} \right| = 0. \tag{4.21}
\end{aligned}$$

这里取 $\frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2}$ 的正数部分用来量化风险的希腊字母 Γ . 整理得欧式看涨期权价格 f_t 在 $t(t \in [0, T])$

时刻满足的偏微分方程为

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} + rS_t \frac{\partial f}{\partial S_t} - rf + \lambda E\{f(J_t S_t, t) - f(S_t, t)\} - \lambda E\{J - 1\} S_t \frac{\partial f}{\partial S_t} = 0, \quad (4.22)$$

其中,

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^2 = & \sqrt{2 \left(\log \left(\frac{M}{dt} \vee e \right) + \ln(\ln M) \right) \sigma^2 (dt)^{2H-1}} \\ & + k \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} \sqrt{\frac{2}{\pi} \left(\frac{\sigma^2}{dt} + 2 \left(\log \left(\frac{M}{dt} \vee e \right) + \ln(\ln M) \right) \sigma^2 (dt)^{2H-2} \right)} + \sigma^2, \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$E\{J - 1\} = e^{\mu_J + \frac{\sigma_J^2}{2}} - 1, \text{ 与 } \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} \text{ 始终大于 } 0.$$

基于式子(4.22),可解得欧式看涨期权价格 f_t 为

$$f(S_t, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda'(T-t)} (\lambda'(T-t))^n}{n!} \{S_t \tilde{N}(d_1) - Ke^{-r(T-t)} \tilde{N}(d_2)\}, \quad (4.24)$$

其中, $d_1 = \frac{r_n(T-t) + \frac{\sigma_n^2}{2}(T-t) + \ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}{\sigma_n \sqrt{T-t}}$, $d_2 = d_1 - \sigma_n \sqrt{T-t}$, $\tilde{N}(\cdot)$ 是正态累积分布函数,

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 = & \sqrt{2 \left(\log \left(\frac{M}{dt} \vee e \right) + \ln(\ln M) \right) \sigma^2 (dt)^{2H-1}} \\ & + k \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} \sqrt{\frac{2}{\pi} \left(\frac{\sigma^2}{dt} + 2 \left(\log \left(\frac{M}{dt} \vee e \right) + \ln(\ln M) \right) \sigma^2 (dt)^{2H-2} \right)} + \sigma^2 + \frac{n\sigma_J^2}{T-t}, \\ r_n = & r - \lambda E\{J - 1\} + \frac{n \ln E\{J\}}{T-t} = r + \lambda \left(e^{\mu_J + \frac{\sigma_J^2}{2}} - 1 \right) + \frac{n(\mu_J + \frac{\sigma_J^2}{2})}{T-t}, \end{aligned}$$

$\lambda' = \lambda E\{J\} = \lambda e^{\mu_J + \frac{\sigma_J^2}{2}}$, 与 k 是交易费用. 证毕.

类似可得欧式看跌期权所满足的定价公式.

推论 4.1 欧式看跌期权在 $t(t \in [0, T])$ 时刻的价格为

$$P(S_t, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda'(T-t)} (\lambda'(T-t))^n}{n!} \{Ke^{-r(T-t)} \tilde{N}(-d_2) - S_t \tilde{N}(-d_1)\}$$

由定理 4.1 与推论 4.1 可以得到下面的推论.

推论 4.2 欧式看涨,看跌期权价格满足

$$f(S_t, t) - P(S_t, t) = S_t - Ke^{-r(T-t)}, \quad (4.25)$$

称其为看涨看跌平价公式.

前面已将期权定价中的期权定价公式和随机偏微分方程给出,下面介绍用来量化金融市场风险的希腊字母.

5 混合高斯过程下欧式期权的风险管理

本部分主要介绍在资产定价过程中用来管理风险的希腊字母.在实际金融市场中,收益与风险共存,对于投资者来说,希望将金融风险控制在一定范围内,避免造成较大投资损失,继而赢得更多收益,这部分考虑了用来量化风险的希腊字母和模拟分析.

5.1 量化风险的希腊字母

欧式期权价格风险受多种参数的影响.其中参数有资产价格 S_t 、执行价格 K 、无风险利率 r 、到期时间 T 、资产波动率 σ 和 Hurst 指数 H ,因此金融投资者可以通过量化风险来管理风险,其中希腊字母是常见的量化工具之一.

定理 5.1 设参数为 S_t, K, r, T, σ 和 H , 则基于式(3.5), 欧式看涨期权价格对应的希腊字母 $\Delta, \nabla, \rho, \Theta, \Gamma, \nu$ 以及关于 Hurst 指数 H 的公式为

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial C}{\partial S_t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda(T-t)} \lambda^n (T-t)^n}{n!} \varepsilon_n \cdot [e^{-\lambda \mu_{J(t)}(T-t) + \sum_{i=1}^n J(t)_i} \tilde{N}(d_1)], \\ \nabla &= \frac{\partial C}{\partial K} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda(T-t)} \lambda^n (T-t)^n}{n!} \varepsilon_n \cdot [-e^{-r(T-t)} \tilde{N}(d_2)], \\ \rho &= \frac{\partial C}{\partial r} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda(T-t)} \lambda^n (T-t)^n}{n!} \varepsilon_n \cdot [K(T-t) e^{-r(T-t)} \tilde{N}(d_2)], \\ \Theta &= \frac{\partial C}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-e^{-\lambda(T-t)} \lambda^{n+1} (T-t)^n - n e^{-\lambda(T-t)} \lambda^n (T-t)^{n-1}) (n!)^{-1} \varepsilon_n \cdot \\ & [S_t e^{-\lambda \mu_{J(t)}(T-t) + \sum_{i=1}^n J(t)_i} \tilde{N}(d_1) - K e^{-r(T-t)} \tilde{N}(d_2)] + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda(T-t)} \lambda^n (T-t)^n}{n!} \varepsilon_n \\ & \cdot [\lambda \mu_{J(t)} S_t e^{-\lambda \mu_{J(t)}(T-t) + \sum_{i=1}^n J(t)_i} \tilde{N}(d_1) - r K e^{-r(T-t)} \tilde{N}(d_2) \\ & - \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 + (4 - 4^H) H \sigma^2 t^{2H-1}}{\sqrt{\sigma^2(T-t) + \sigma^2(2 - 2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})}} \\ & \cdot S_t e^{-\lambda \mu_{J(t)}(T-t) + \sum_{i=1}^n J(t)_i} \tilde{N}'(d_1)], \\ \Gamma &= \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda(T-t)} \lambda^n (T-t)^n}{n!} \varepsilon_n \cdot \left[\frac{e^{-\lambda \mu_{J(t)}(T-t) + \sum_{i=1}^n J(t)_i} \tilde{N}'(d_1)}{S_t \sqrt{\sigma^2(T-t) + \sigma^2(2 - 2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})}} \right], \\ \nu &= \frac{\partial C}{\partial \sigma} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda(T-t)} \lambda^n (T-t)^n}{n!} \varepsilon_n \\ & \cdot [S_t e^{-\lambda \mu_{J(t)}(T-t) + \sum_{i=1}^n J(t)_i} \frac{\sigma(T-t) + \sigma(2 - 2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})}{\sqrt{\sigma^2(T-t) + \sigma^2(2 - 2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})}} \tilde{N}'(d_1)], \\ \frac{\partial C}{\partial H} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda(T-t)} \lambda^n (T-t)^n}{n!} \\ & \cdot \varepsilon_n \left[\frac{S_t e^{-\lambda \mu_{J(t)}(T-t) + \sum_{i=1}^n J(t)_i} \tilde{N}'(d_1) \sigma^2 (-2^{2H-1}(T^{2H} - t^{2H}) \ln 2 + (2 - 2^{2H-1})(T^{2H} \ln T - t^{2H} \ln t))}{\sqrt{\sigma^2(T-t) + \sigma^2(2 - 2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})}} \right]. \end{aligned}$$

证明 为方便证明,先取 $C(t, S_t)$ 中部分 $C_1(t, S_t)$, 得

$$C_1(t, S_t) = S_t e^{-\lambda \mu_{J(t)}(T-t) + \sum_{i=1}^n J(t)_i} \tilde{N}(d_1) - K e^{-r(T-t)} \tilde{N}(d_2). \quad (5.1)$$

考虑对 $C_1(t, S_t)$ 有影响的参数为 x , 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_1}{\partial x} &= \frac{\partial (S_t e^{-\lambda \mu_{J(t)}(T-t) + \sum_{i=1}^n J(t)_i})}{\partial x} \tilde{N}(d_1) + S_t e^{-\lambda \mu_{J(t)}(T-t) + \sum_{i=1}^n J(t)_i} \frac{\partial \tilde{N}(d_1)}{\partial x} \\ &\quad - \frac{\partial K e^{-r(T-t)}}{\partial x} \tilde{N}(d_2) - K e^{-r(T-t)} \frac{\partial \tilde{N}(d_2)}{\partial x}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \text{其中, } \frac{\partial \tilde{N}(d_2)}{\partial x} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_2^2}{2}} \exp[d_1 \sqrt{\sigma^2(T-t) + \sigma^2(2-2^{2H-1})(T^{2H}-t^{2H})}] \\ &\quad \cdot \exp\left[-\frac{\sigma^2(T-t) + \sigma^2(2-2^{2H-1})(T^{2H}-t^{2H})}{2}\right] \frac{\partial d_2}{\partial x} \\ &= \tilde{N}'(d_1) \frac{S_t e^{\sum_{i=1}^n J(t)_i}}{K} \exp[(r - \lambda \mu_{J(t)})(T-t)] \frac{\partial d_2}{\partial x}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

将式(5.3)代入式(5.2)中,得

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_1}{\partial x} &= \frac{\partial (S_t e^{-\lambda \mu_{J(t)}(T-t) + \sum_{i=1}^n J(t)_i})}{\partial x} \tilde{N}(d_1) - \frac{\partial K e^{-r(T-t)}}{\partial x} \tilde{N}(d_2) \\ &\quad + S_t e^{-\lambda \mu_{J(t)}(T-t) + \sum_{i=1}^n J(t)_i} \tilde{N}'(d_1) \frac{\partial \sqrt{\sigma^2(T-t) + \sigma^2(2-2^{2H-1})(T^{2H}-t^{2H})}}{\partial x}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

将相应参数 S_t, K, r, t, σ 和 H 代入式(5.4)中 x , 得对应的希腊字母以及关于 Hurst 指数 H 的公式. 证毕.

5.2 模拟分析

进行数值模拟实验. 结合定理 5.1, 运用 R 语言编程, 讨论各个参数对于期权价格变化的影响. 考虑一只基于式(3.5)的欧式期权, 假设股票的价格为 $S_0 = 4.3300$, 跳跃幅度 $J(t)_i$ 相同, 执行价格为 $K = 4.0000$, 资产价格跳跃幅度均值为 $\mu_{J(t)} = 0.5000$ 与标准差为 $\delta(t) = 0.0010$, 即

$$C = S_t e^{-\lambda \mu_{J(t)}(T-t) + N_t J(t)} \tilde{N}(d_1) - K e^{-r(T-t)} \tilde{N}(d_2),$$

$$P = -S_t e^{-\lambda \mu_{J(t)}(T-t) + N_t J(t)} \tilde{N}(-d_1) + K e^{-r(T-t)} \tilde{N}(-d_2),$$

$$\frac{\partial C}{\partial r} = K(T-t) e^{-r(T-t)} \tilde{N}(d_2) > 0,$$

$$\frac{\partial C}{\partial \sigma} = S_t e^{-\lambda \mu_{J(t)}(T-t) + N_t J(t)} \frac{\sigma(T-t) + \sigma(2-2^{2H-1})(T^{2H}-t^{2H})}{\sqrt{\sigma^2(T-t) + \sigma^2(2-2^{2H-1})(T^{2H}-t^{2H})}} \tilde{N}'(d_1) > 0,$$

$$S_0 = 4.3300, K = 4.0000, \mu_{J(t)} = 0.5000, \delta(t) = 0.0010.$$

考虑在其他定价参数不变的情况下, 期权价格受以下参数的影响发生的变化. 图 5.1 给出了欧式看涨期权价值 C 随无风险利率 r , Hurst 指数 H 以及跳跃强度 λ 的变化情况, 由图 5.1 可知, 随着无风险利率 r 的增大, 期权价值不断增大, 与实际情况相同.

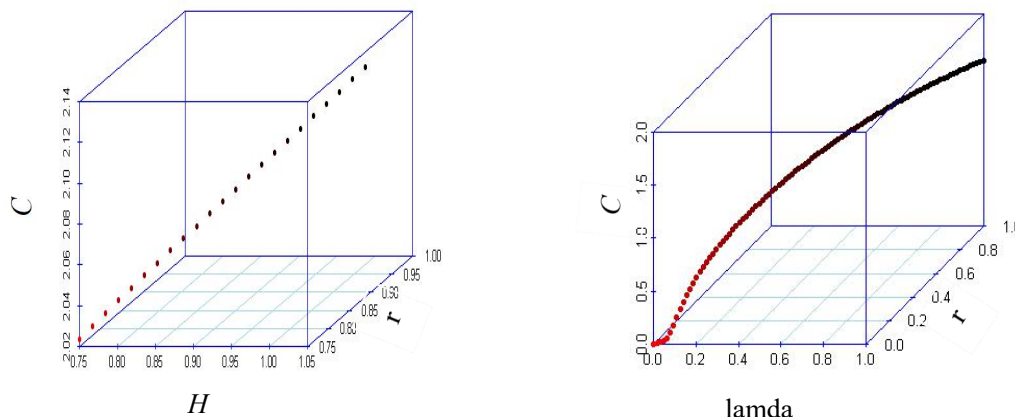


图 5.1 Hurst 指数 H , 跳跃强度 λ 和欧式看涨期权价值 C 的关系

图 5.2 给出了欧式看跌期权价值 P 随波动率 σ , Hurst 指数 H 以及跳跃强度 λ 的变化情况, 图 5.3 给出了欧式看涨期权价值 C 随波动率 σ , Hurst 指数 H 以及跳跃强度 λ 的变化情况. 由图 5.2, 图 5.3 可知, 随着波动率 σ 的增大, 期权价值不断增大, 与实际情况相同.

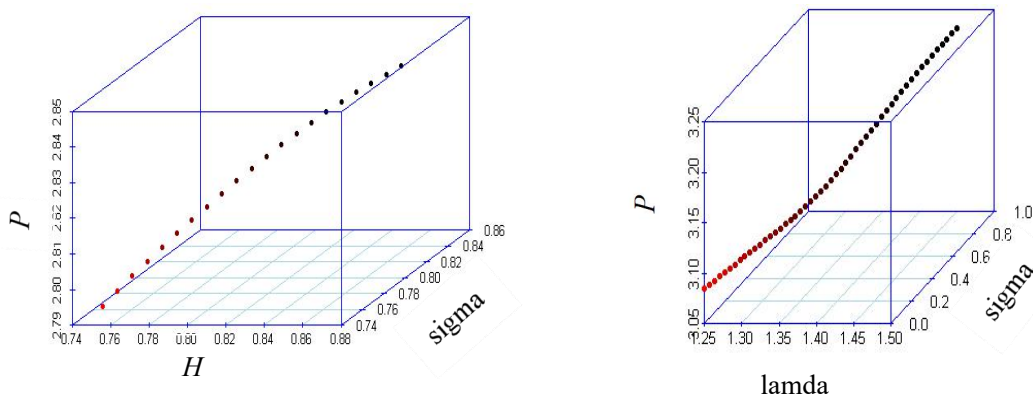


图 5.2 Hurst 指数 H , 跳跃强度 λ 和欧式看跌期权价值 P 的关系

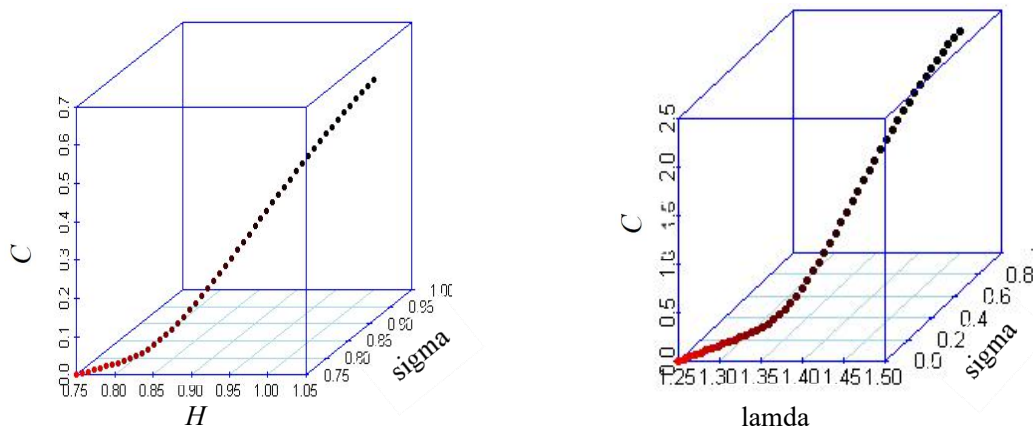


图 5.3 Hurst 指数 H , 跳跃强度 λ 和欧式看涨期权价值 C 的关系

本部分主要介绍了关于希腊字母的理论和数值模拟. 用跳环境下混合次分数布朗运动

来刻画金融资产价格的变化,得到欧式期权定价公式对应的希腊字母和关于 Hurst 指数 H 的公式,通过数值模拟实验分析了定价参数 Hurst 指数 H 和跳跃强度 λ 对期权价值有显著的影响.

前面已经考虑了参数对资产定价模型具有显著影响,接着进一步通过金融市场实际数据,来实证研究本文模型构建的合理性.

6 实证研究

这部分考虑通过金融市场中的实际数据来验证模型构建的合理性.包括研究数据的选取,期权标的统计特征以及正态性检验、参数估计、模拟结果和拟合效果分析.

6.1 研究数据的选取

所采用的股票数据全部来源于"大智慧 365"平台.分别以 2018 年 9 月 4 日-2019 年 7 月 30 日期间的"上证指数"股票, 2020 年 2 月 3 日-2020 年 11 月 13 日期间的"市北 B 股"股票, 2019 年 8 月 22 日-2020 年 4 月 23 日期间的"耀皮 B 股"股票, 2018 年 11 月 7 日-2020 年 12 月 17 日期间的"工业指数"股票, 2018 年 9 月 21 日-2020 年 11 月 13 日期间的"万科 A"股票, 2019 年 12 月 2 日-2020 年 12 月 17 日期间的"商业指数"股票, 2020 年 4 月 13 日-2020 年 11 月 13 日期间的"南方航空"股票, 2020 年 4 月 22 日-2020 年 11 月 13 日期间的"大名城 B"股票, 2020 年 4 月 28 日-2020 年 11 月 13 日期间的"华谊 B 股"股票,和在 2020 年 3 月 24 日-2020 年 11 月 13 日期间的"老凤祥 B"股票数据为样本.

6.2 标的统计特征以及正态性检验

表 6.1 标的资产收益率的统计特征

	峰度	偏度	标准差
上证指数	155.7933	5.3005	2.2796
市北 B 股	2.2216	0.6551	1.9546
耀皮 B 股	4.1976	-0.5970	2.0272
工业指数	5.5156	-0.9519	1.2704
万科 A	2.4527	0.0260	0.0260
商业指数	4.5955	-0.5593	1.5263
南方航空	0.9215	0.2838	1.8660
大名城 B	5.2602	0.5681	1.8358
华谊 B 股	5.5483	-0.2121	2.0229
老凤祥 B	2.7252	0.4809	1.2646

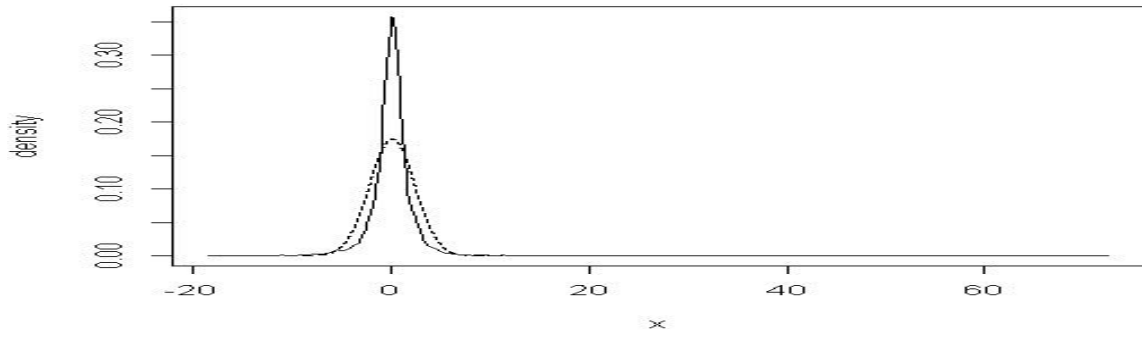


图 6.1 上证指数收益率的分布特征及密度函数曲线

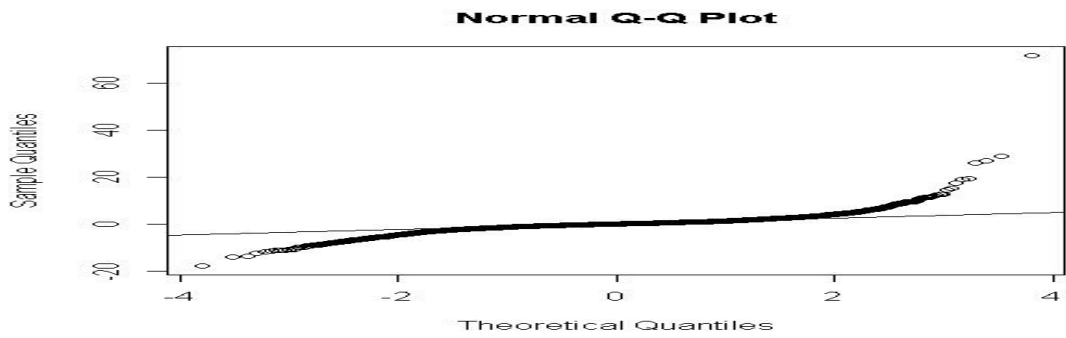


图 6.2 上证指数收益率的正态 QQ 图

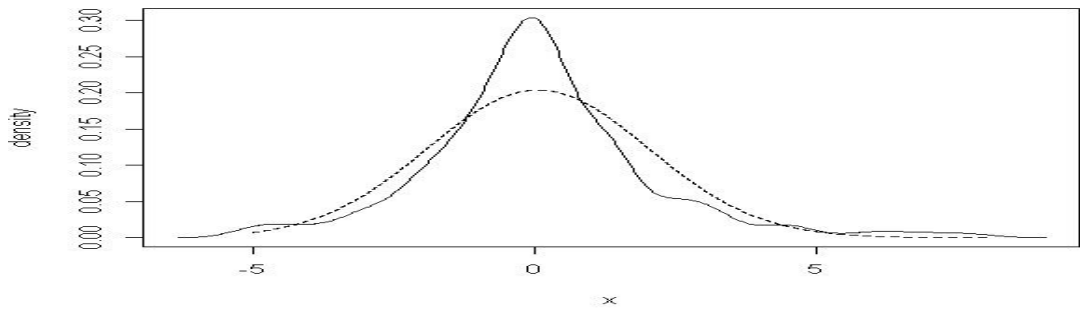


图 6.3 市北 B 股收益率的分布特征及密度函数曲线

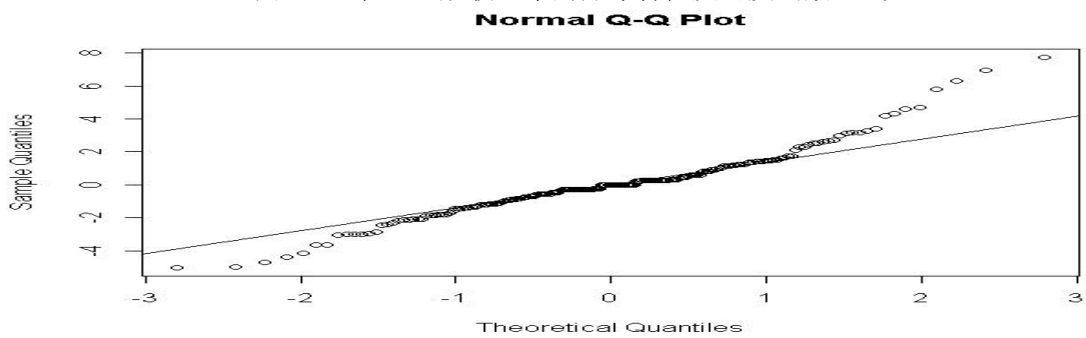


图 6.4 市北 B 股收益率的正态 QQ 图

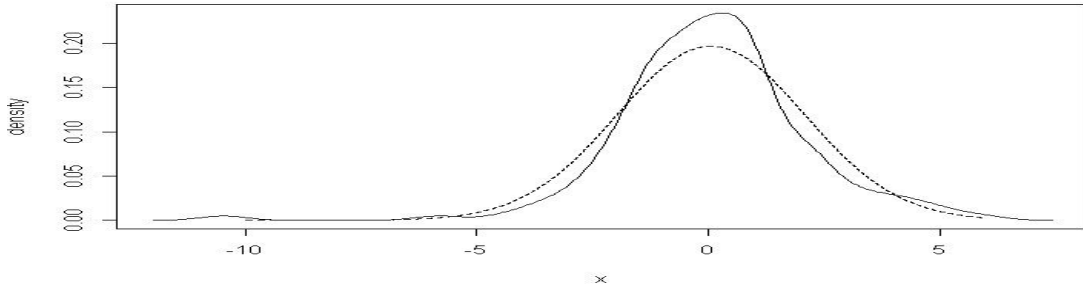


图 6.5 耀皮 B 股收益率的分布特征及密度函数曲线

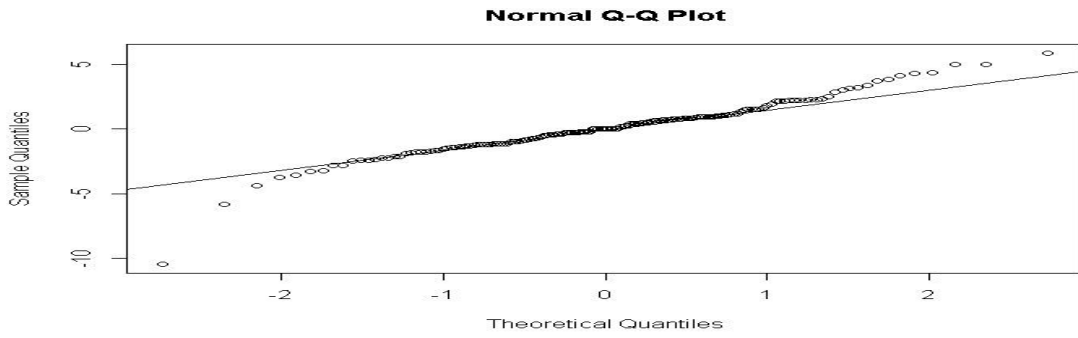


图 6.6 耀皮 B 股收益率的正态 QQ 图

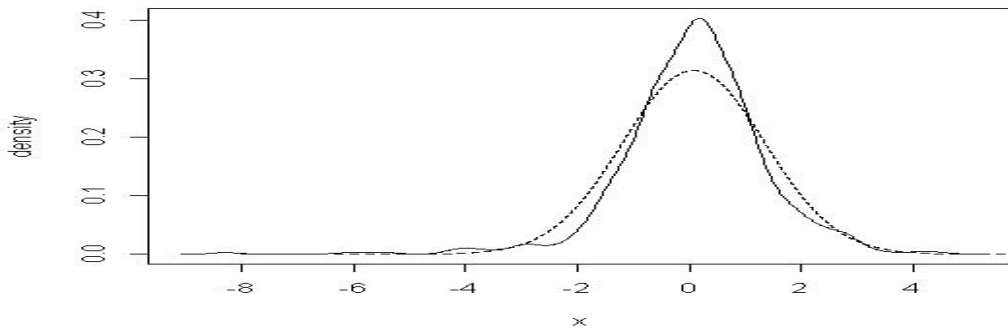


图 6.7 工业指数收益率的分布特征及密度函数曲线

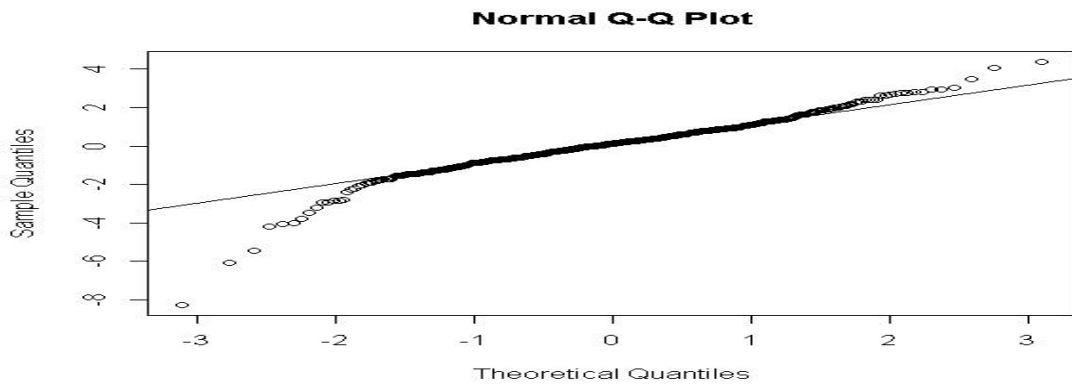


图 6.8 工业指数收益率的正态 QQ 图

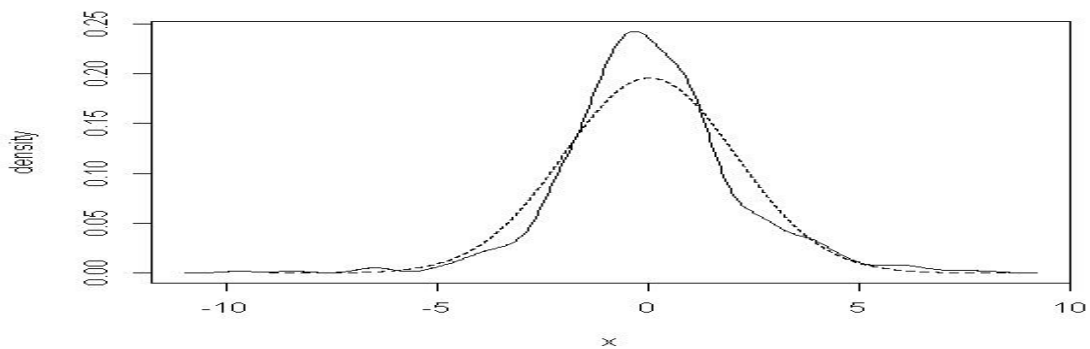


图 6.9 万科 A 收益率的分布特征及密度函数曲线

Normal Q-Q Plot

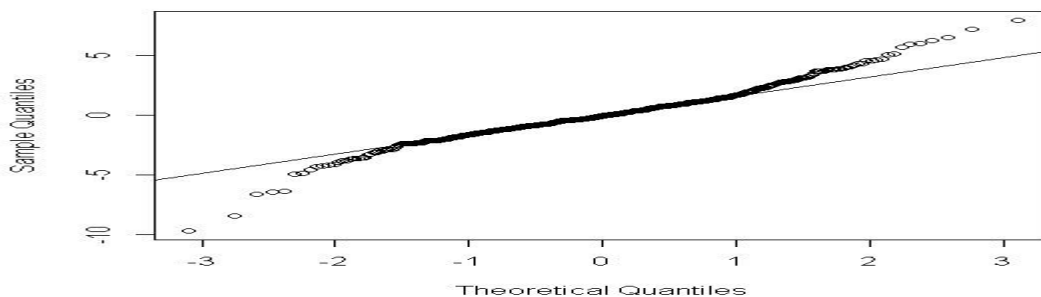


图 6.10 万科 A 收益率的正态 QQ 图

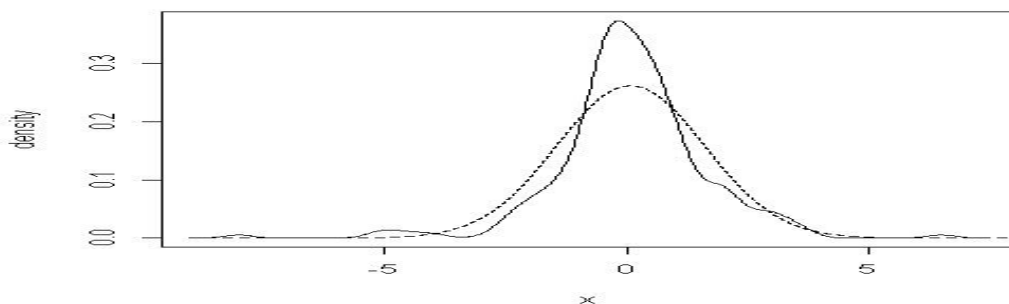


图 6.11 商业指数收益率的分布特征及密度函数曲线

Normal Q-Q Plot

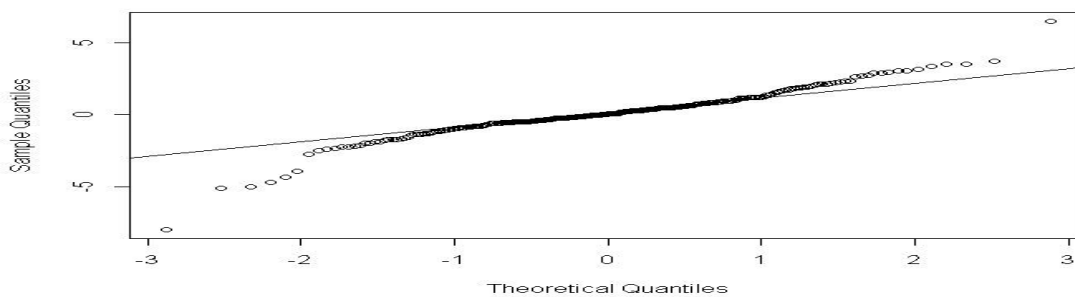


图 6.12 商业指数收益率的正态 QQ 图

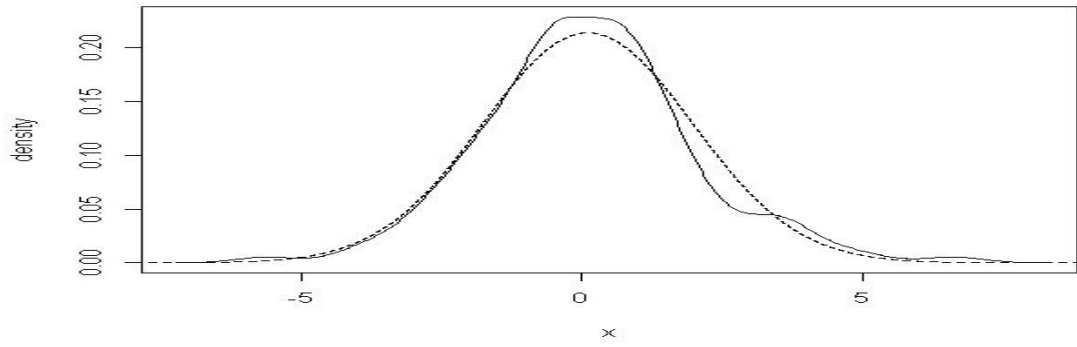


图 6.13 南方航空收益率的分布特征及密度函数曲线

Normal Q-Q Plot

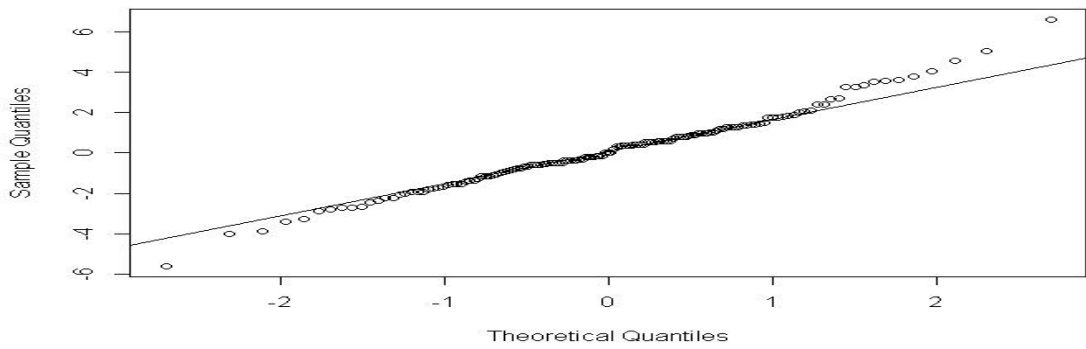


图 6.14 南方航空收益率的正态 QQ 图

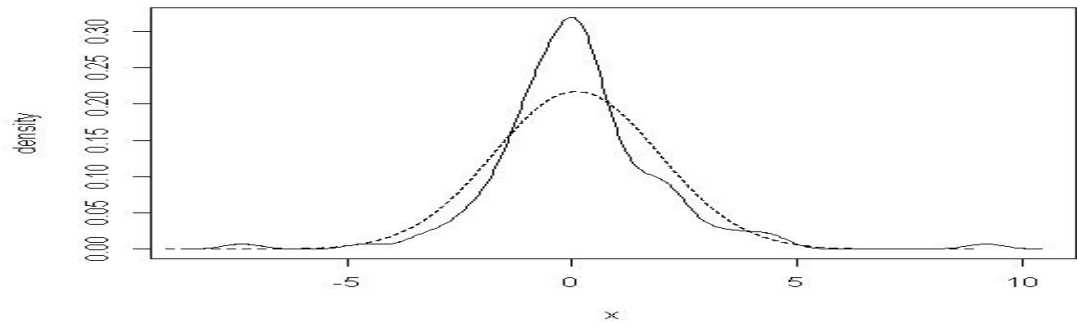


图 6.15 大名城 B 收益率的分布特征及密度函数曲线

Normal Q-Q Plot

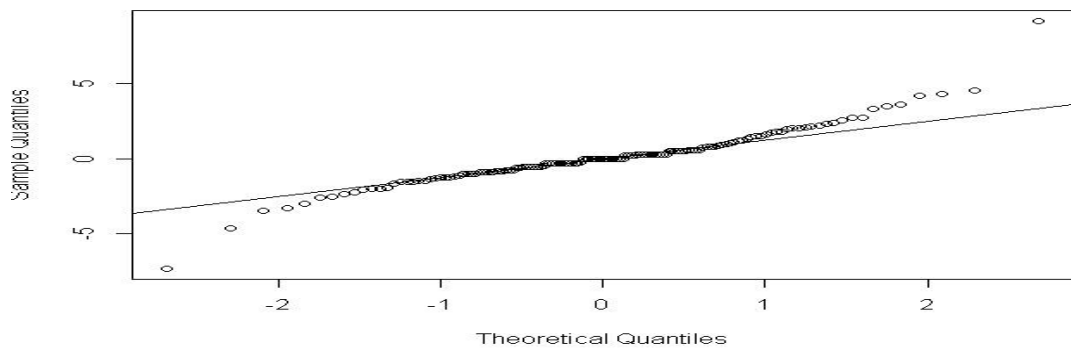


图 6.16 大名城 B 收益率的正态 QQ 图

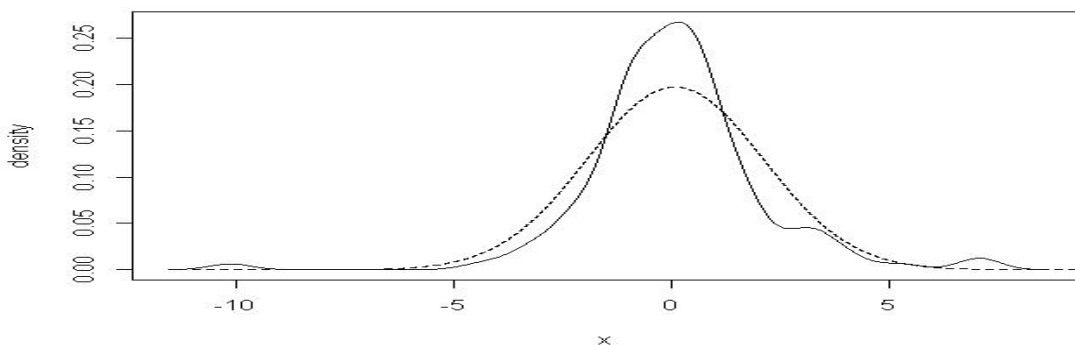


图 6.17 华谊 B 股收益率的分布特征及密度函数曲线

Normal Q-Q Plot

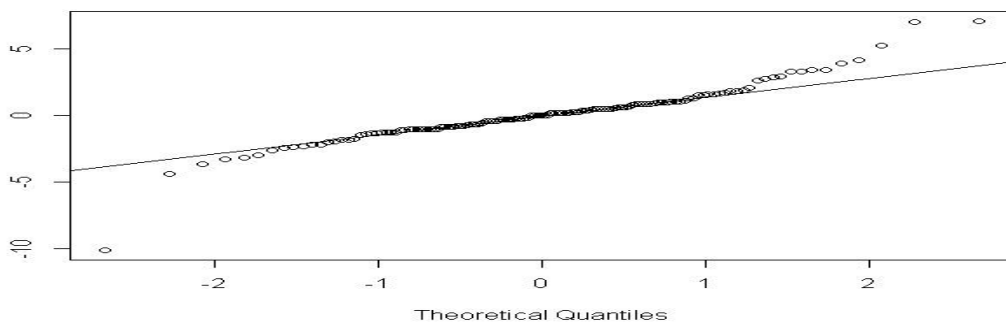


图 6.18 华谊 B 股收益率的正态 QQ 图

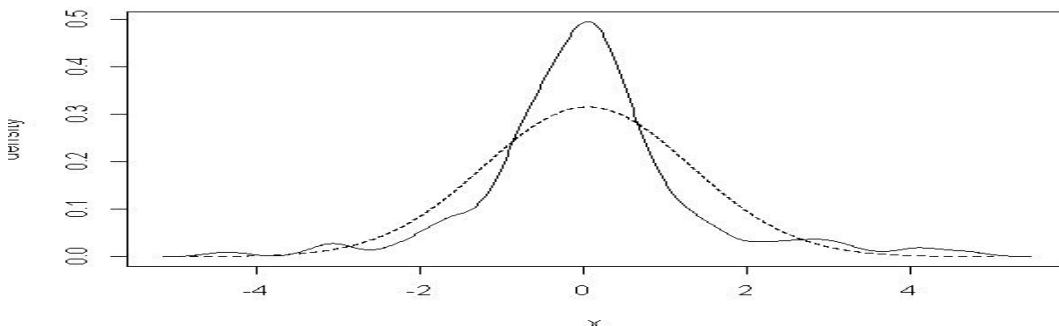


图 6.19 老凤祥 B 收益率的分布特征及密度函数曲线

Normal Q-Q Plot

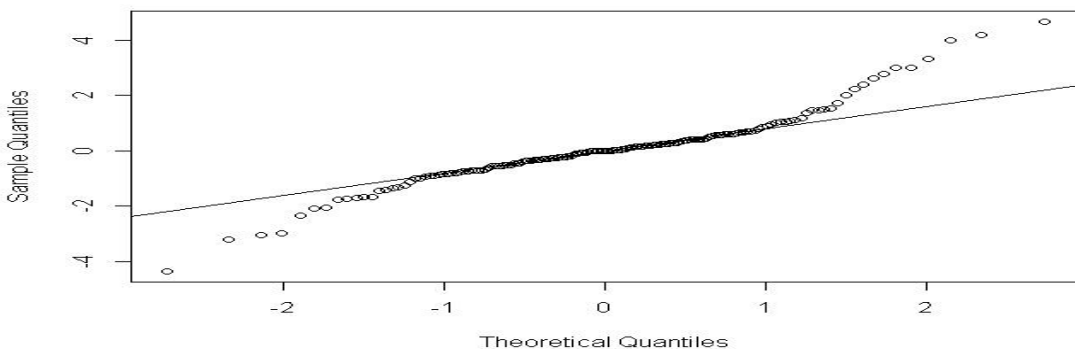


图 6.20 老凤祥 B 收益率的正态 QQ 图

如图所示期权标的资产的正态性检验.收益率密度函数图为图中的实线部分,虚线为与收益率均值和标准差一致的正态分布函数曲线,由表 6.1 和图 6.1-图 6.20 可得,"上证指

数","市北 B 股","耀皮 B 股","工业指数","万科 A","商业指数","南方航空","大名城 B","华谊 B 股","老凤祥 B"收益率呈现出明显的"尖峰厚尾",进一步表明本论文模型构建的合理性.利用 R 软件进行编程,对本论文跳环境模型和经典 B-S 模型与股票真实值的接近程度进行模拟比较.

6.3 参数估计

以"上证指数"股票为对象,使用重标极差(R/S)分析方法.重标极差(R/S)分析方法是定量描述时间序列信息长期依赖性的有效方法之一,通过其基本原理^[55],最后计算得到参数 H 的估计值为 0.8073.根据文献^[56],对 Hurst 指数 H 的性质进行分析,满足 $0.5 < 0.8073 < 1$,则该序列存在长期记忆性,因此本论文模型构建具备合理性.本文采用带交易费用的跳环境下混合次分数布朗运动来描述该时间序列数据.

对于波动率 σ 和期望回报率 μ 的参数估计.设股价为 S_0, S_1, \dots, S_n , 收益率为 $\frac{S_1-S_0}{S_0}, \frac{S_2-S_1}{S_1}, \dots, \frac{S_n-S_{n-1}}{S_{n-1}}$, 计算对数收益率的方差及平均值,得到波动率参数 σ 为 0.0139,与期望回报率 μ 的估计值为 0.0003.

6.4 模拟结果

将具体的参数值代入式(4.1),并假设 $\lambda=0.0010, \mu_j=0.0500$,和 $\delta_j=0.0400$.取"上证指数"股票在 2018 年 9 月 4 日的收盘价格 2750.5800 为初始值 S_0 ,利用 R 软件由 S_0 得到 S_{0+dt} ,再由 S_{0+dt} 得到 S_{0+2dt}, \dots ,直到 $S_{0+ndt} = S_T$,跳环境模型和经典 B-S 模型模拟值与股票真实值如图 6.21 所示:

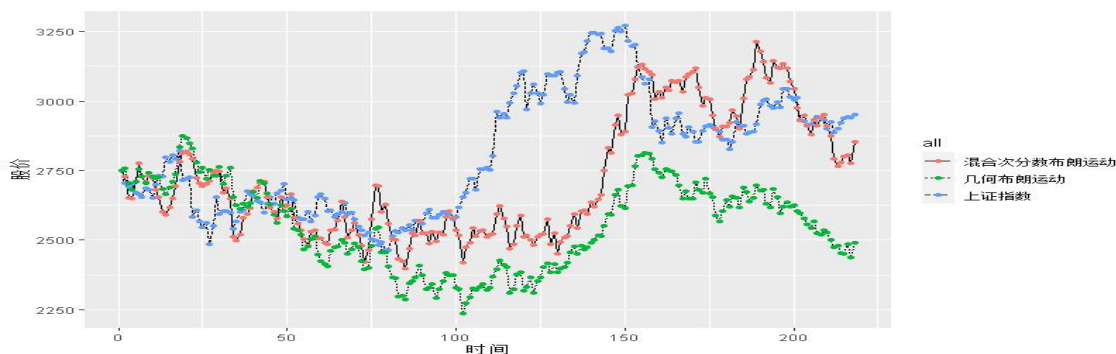


图 6.21 跳环境模型股价,经典 B-S 模型股价与股票真实值对比

由图 6.21 可得,在前期股票价格没有大幅波动的时候,跳环境模型与经典模型基本上都可以被用来模拟股票价格变动.但在中后期,股票价格出现大幅波动的时候,跳环境模型比经典 B-S 模型更加接近股票真实值,跳环境模型比经典模型能够更好的刻画股票价格

变动,更能够接近"上证指数"股票的真实值.对模拟结果的具体统计分析如表 6.2 所示:

表 6.2 模型模拟值与真实值情况统计

	带跳模型模拟值	经典 B-S 模型模拟值	股票真实值
最大值	3214.0000	2874.0000	3271.0000
最小值	2398.0000	2235.0000	2464.0000
均值	2726.0000	2555.0000	2810.0000
方差	47246.4900	23716.4300	45854.4700
中位数	2655.0000	2568.0000	2806.0000

由表 6.2 可得,跳环境模型模拟股票价格的最大值,最小值,均值,方差和中位数都比经典 B-S 模型更加接近股票真实值.总的来说,跳环境模型模拟效果更好.

以"市北 B 股"股票为对象,得到参数 H 的估计值为 0.8250, 波动率参数 σ 为 0.0195, 期望回报率 μ 的估计值为 0.0005. 将具体的参数值代入式(4.1),并假设 $\lambda=0.0003$, $\mu_j=0.0001$, 和 $\delta_j=0.0004$. 取"市北 B 股"股票在 2020 年 2 月 3 日的收盘价格 0.3250 为初始值 S_0 ,跳环境模型和经典 B-S 模型模拟值与股票真实值如图 6.22 所示:

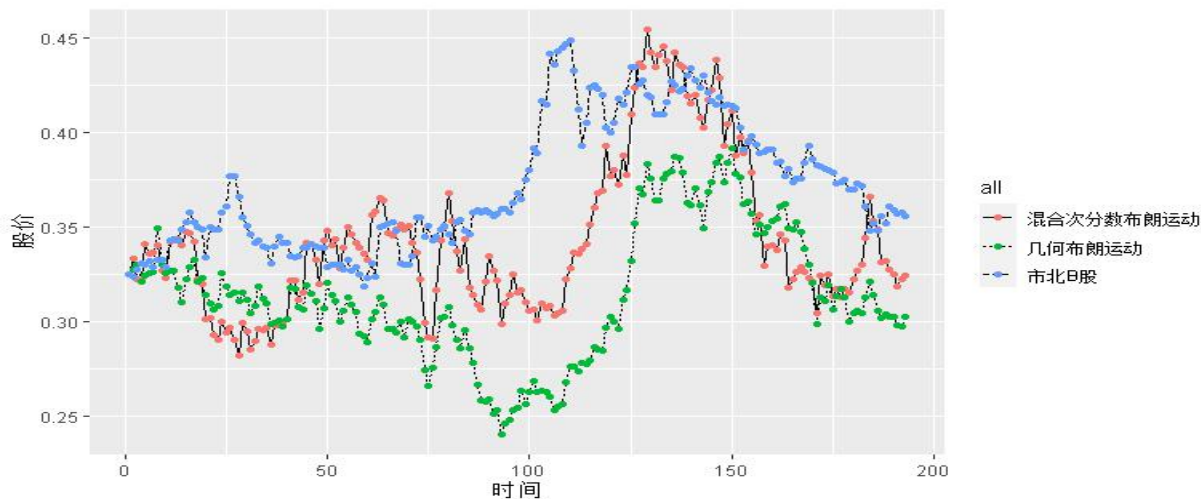


图 6.22 跳环境模型股价,经典 B-S 模型股价与股票真实值对比

由图 6.22 可得,由于模拟股票价格时间跨度较长,而且股票初始价格较小,因此,总的来说,跳环境模型与经典模型在模拟实际股票价格的效果相近,但在部分时间段内,跳环境模型模拟的效果更好,更能够接近"市北 B 股"股票的真实值.对模拟结果的具体统计分析如表 6.3 所示:

表 6.3 模型模拟值与真实值情况统计

	带跳模型模拟值	经典 B-S 模型模拟值	股票真实值
最大值	0.4543	0.3918	0.4490
最小值	0.2824	0.2403	0.3190
均值	0.3430	0.3138	0.3715
方差	0.0016	0.0012	0.0012
中位数	0.3359	0.3097	0.3590

由表 6.3 可得,跳环境模型模拟股票价格的最大值,最小值,均值和中位数都比经典 B-S 模型更加接近股票真实值.总的来说,跳环境模型优于经典 B-S 模型.

以"耀皮 B 股"股票为对象,得到参数 H 的估计值为 0.7955,波动率参数 σ 为 0.0203,期望回报率 μ 的估计值为 0.0006.将具体的参数值代入式(4.1),并假设 $\lambda=0.0020$, $\mu_j=0.0040$,和 $\delta_j=0.0030$.取"耀皮 B 股"股票在 2019 年 8 月 22 日的收盘价格 0.4130 为初始值 S_0 ,跳环境模型和经典 B-S 模型模拟值与股票真实值如图 6.23 所示:

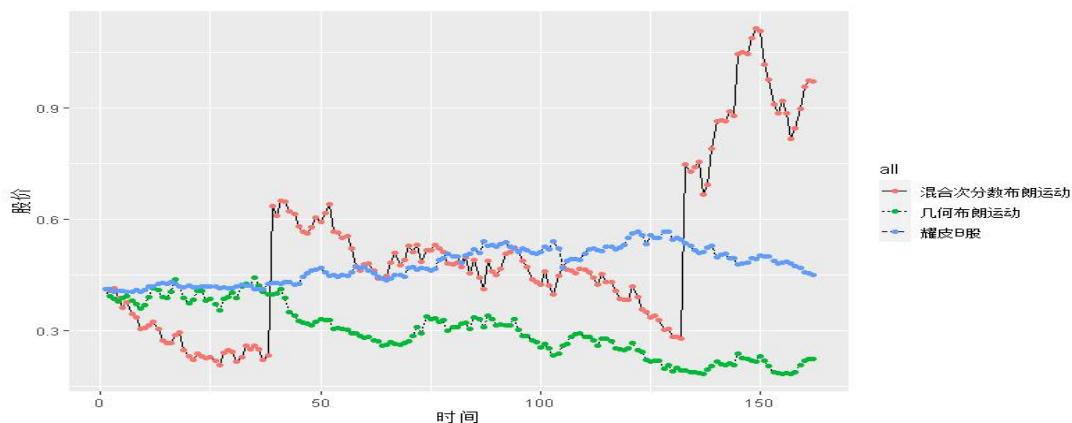


图 6.23 跳环境模型股价,经典 B-S 模型股价与股票真实值对比

由图 6.23 可得,跳环境模型比经典模型模拟效果更好,更能够接近"耀皮 B 股"股票的真实值.在 $t=150$ 时,跳环境模型模拟股价达到最大值,此时,经典模型模拟效果更好,说明跳环境模型偶尔也会出现模拟不准确的现象.对模拟结果的具体统计分析如表 6.4 所示:

表 6.4 模型模拟值与真实值情况统计

	带跳模型模拟值	经典 B-S 模型模拟值	股票真实值
最大值	1.1146	0.4431	0.5680
最小值	0.2080	0.1832	0.4050
均值	0.5091	0.2995	0.4767
方差	0.0490	0.0052	0.0021
中位数	0.4663	0.2934	0.4735

由表 6.4 可得,跳环境模型模拟股票价格的最小值,均值和中位数都比经典 B-S 模型更加接近股票真实值.从总体来看,跳环境模型存在不连续,出现跳跃情况,因此在方差这个角度,经典 B-S 模型优于跳环境模型.

以"工业指数"股票为对象,得到参数 H 的估计值为 0.8554,波动率参数 σ 为 0.0127,期望回报率 μ 的估计值为 0.0007. 将具体的参数值代入式(4.1),并假设 $\lambda=0.0009$, $\mu_j=0.00001$,和 $\delta_j=0.00004$.取"工业指数"股票在 2018 年 11 月 7 日的收盘价 2060.0300 为初始值 S_0 ,跳环境模型和经典 B-S 模型模拟值与股票真实值如图 6.24 所示:

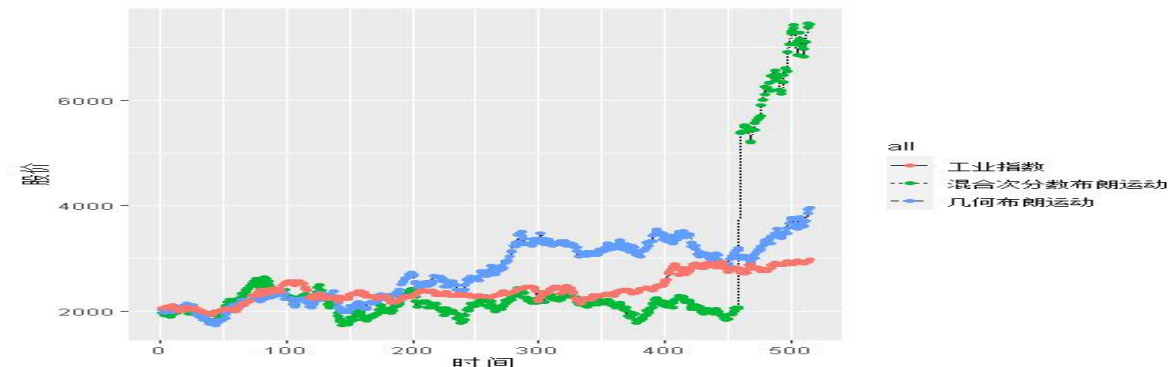


图 6.24 跳环境模型股价,经典 B-S 模型股价与股票真实值对比

由图 6.24 可得,在 $t=0$ 到 $t=400$ 时,跳环境模型比经典模型模拟效果更好,更能够接近"工业指数"股票的真实值.在 $t=400$ 到 $t=500$ 时,跳环境模型发生跳跃,此时,经典模型模拟效果更好,说明跳环境模型也存在模拟不准确的现象.对模拟结果的具体统计分析如表 6.5 所示:

表 6.5 模型模拟值与真实值情况统计

	带跳模型模拟值	经典 B-S 模型模拟值	股票真实值
最大值	7453.0000	3960.0000	2970.0000
最小值	1736.0000	1727.0000	1924.0000
均值	2577.0000	2738.0000	2410.0000
方差	1808066.0000	297717.8000	69904.0100
中位数	2150.0000	2718.0000	2343.0000

由表 6.5 可得,跳环境模型模拟股票价格的最小值,均值和中位数都比经典 B-S 模型更加接近股票真实值.从方差的角度来看,跳环境模型正是由于存在一次跳跃的情况,继而导致经典 B-S 模型优于跳环境模型.

以"万科 A"股票为对象,得到参数 H 的估计值为 0.7829,波动率参数 σ 为 0.0204,期望回报率 μ 的估计值为 0.0002.将具体的参数值代入式(4.1),并假设 $\lambda=0.0007$, $\mu_j=0.0005$,和 $\delta_j=0.0003$.取"万科 A"股票在 2018 年 9 月 21 日的收盘价格 25.8000 为初始值 S_0 ,跳环境模型和经典 B-S 模型模拟值与股票真实值如图 6.25 所示:

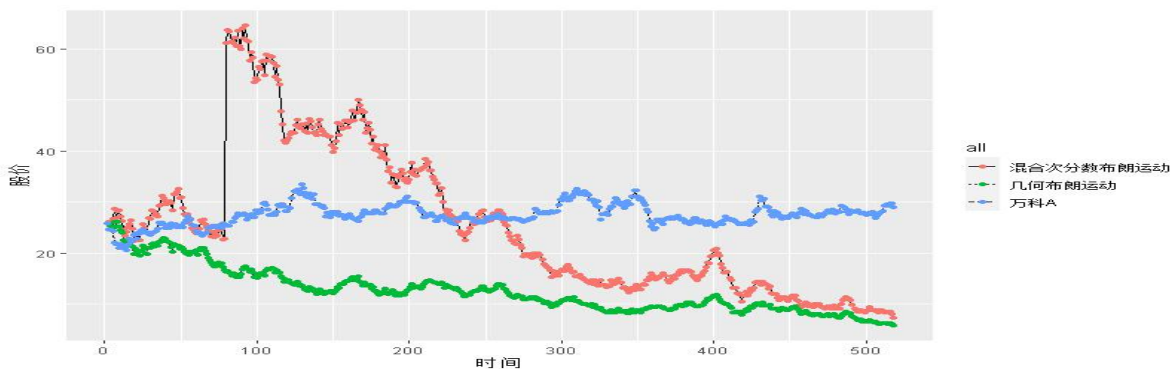


图 6.25 跳环境模型股价,经典 B-S 模型股价与股票真实值对比

由图 6.25 可得,在 $t=200$ 到 $t=500$ 时,跳环境模型比经典模型模拟效果更好,更能够接近"万科 A"股票的真实值.在 $t=0$ 到 $t=200$ 时,跳环境模型股价波动比较大,此时,经典模型模拟效果更好.对模拟结果的具体统计分析如表 6.6 所示:

表 6.6 模型模拟值与真实值情况统计

	带跳模型模拟值	经典 B-S 模型模拟值	股票真实值
最大值	64.6040	26.1650	33.4800
最小值	7.3060	5.7310	20.5900
均值	25.5140	12.6460	27.4400
方差	206.1828	20.0280	4.4678
中位数	23.3230	11.8360	27.3600

由表 6.6 可得,跳环境模型模拟股票价格的最小值,均值和中位数都比经典 B-S 模型更加接近股票真实值.可以看出,尽管跳环境模型有一个明显的波动,但从总的平均水平来说,跳环境模型优于经典 B-S 模型.

以"商业指数"股票为对象,得到参数 H 的估计值为 0.8430,波动率参数 σ 为 0.0153,期望回报率 μ 的估计值为 0.0008.将具体的参数值代入式(4.1),并假设 $\lambda=0.000009$, $\mu_j=0.0000008$, 和 $\delta_j=0.0011$.取"商业指数"股票在 2019 年 12 月 2 日的收盘价格 2620.4600 为初始值 S_0 ,跳环境模型和经典 B-S 模型模拟值与股票真实值如图 6.26 所示:

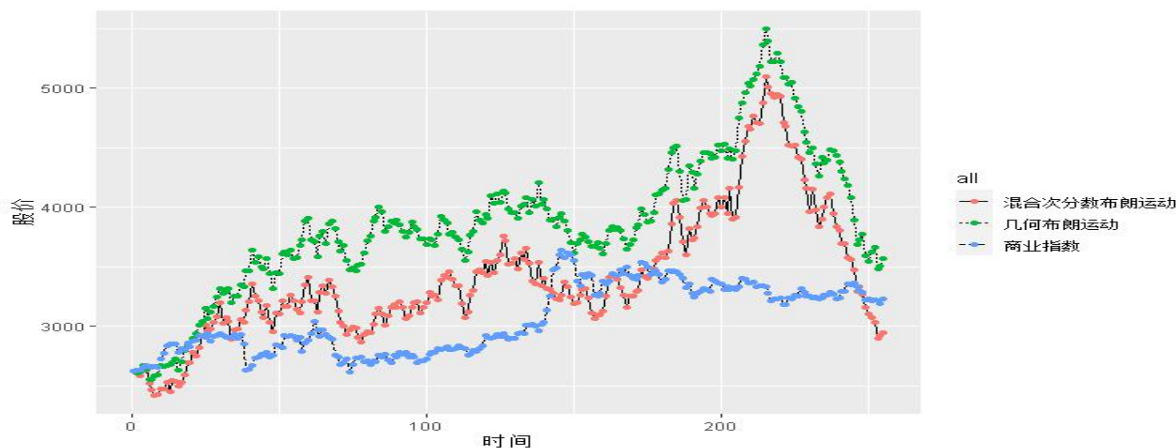


图 6.26 跳环境模型股价,经典 B-S 模型股价与股票真实值对比

由图 6.26 得,经典模型模拟股价基本都远大于"商业指数"股价,总的来看,跳环境模型比经典模型模拟效果更好.对模拟结果的具体统计分析如表 6.7 所示:

表 6.7 模型模拟值与真实值情况统计

	带跳模型模拟值	经典 B-S 模型模拟值	股票真实值
最大值	5091.0000	5494.0000	3636.0000
最小值	2416.0000	2551.0000	2619.0000
均值	3413.0000	3859.0000	3058.0000
方差	298976.9000	352292.7000	80169.8400
中位数	3285.0000	3813.0000	2942.0000

由表 6.7 可得,跳环境模型模拟股票价格的最大值,均值,方差和中位数都比经典 B-S 模型更加接近股票真实值.除了最小值外,跳环境模型都优于经典 B-S 模型,从该角度来看,跳环境模型模拟效果更佳.

以"南方航空"股票为对象,得到参数 H 的估计值为 0.8192,波动率参数 σ 为 0.0187,期望回报率 μ 的估计值为 0.0010.将具体的参数值代入式(4.1),并假设 $\lambda = 0.0000005$, $\mu_j = 0.0000003$,和 $\delta_j = 0.0001$.取"南方航空"股票在 2020 年 4 月 13 日的收盘价格 5.1400 为初始值 S_0 ,跳环境模型和经典 B-S 模型模拟值与股票真实值如图 6.27 所示:

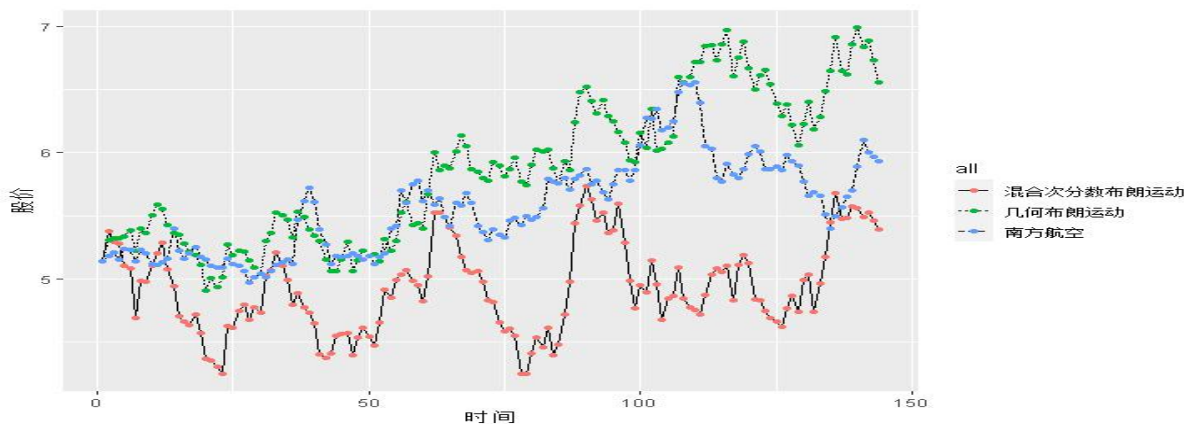


图 6.27 跳环境模型股价,经典 B-S 模型股价与股票真实值对比

由图 6.27 可知,尽管经典模型模拟股价基本都远大于"南方航空"或跳环境模型股价,但经典模型更加接近真实值,总的来看,经典模型模拟效果更好.对模拟结果的具体统计分析如表 6.8 所示:

表 6.8 模型模拟值与真实值情况统计

	带跳模型模拟值	经典 B-S 模型模拟值	股票真实值
最大值	5.7330	6.9930	6.5600
最小值	4.2420	4.9090	4.9700
均值	4.9300	5.8700	5.5690
方差	0.1249	0.3407	0.1456
中位数	4.9020	5.8720	5.5850

由表 6.8 可得,跳环境模型模拟股票价格的方差比经典 B-S 模型更加接近股票真实值.表明此时,跳环境模型与"南方航空"的离散程度更加接近.

以"大名城 B"股票为对象,得到参数 H 的估计值为 0.8034,波动率参数 σ 为 0.0184,期望回报率 μ 的估计值为 0.0009.将具体的参数值代入式(4.1),并假设 $\lambda = 0.0001$, $\mu_j = 0.00003$, 和 $\delta_j = 0.0065$.取"大名城 B"股票在 2020 年 4 月 22 日的收盘价格 0.3400 为初始值 S_0 ,跳环境模型和经典 B-S 模型模拟值与股票真实值如图 6.28 所示:

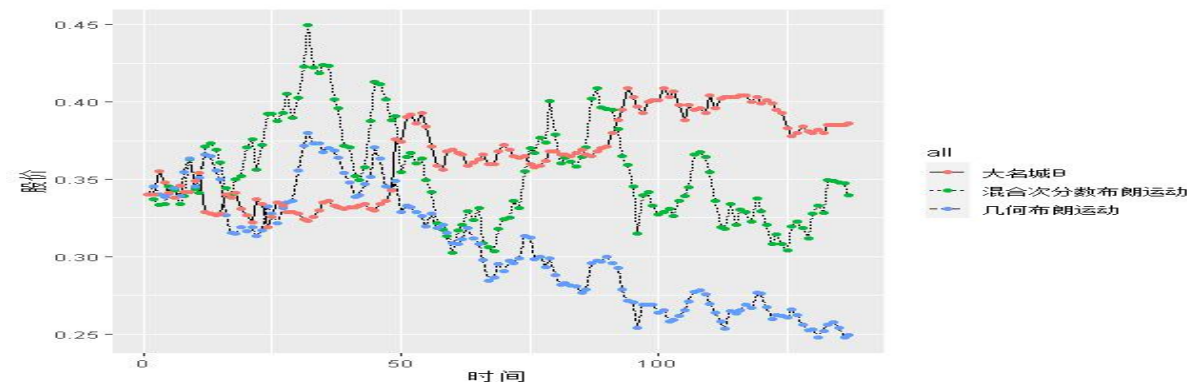


图 6.28 跳环境模型股价,经典 B-S 模型股价与股票真实值对比

由图 6.28 可得,在中后期,经典模型模拟股价在右下方,跳环境模型股价位于"大名城 B"与经典模型股价之间,跳环境模型模拟效果更好.对模拟结果的具体统计分析如表 6.9 所示:

表 6.9 模型模拟值与真实值情况统计

	带跳模型模拟值	经典 B-S 模型模拟值	股票真实值
最大值	0.4494	0.3800	0.4090
最小值	0.3028	0.2477	0.3190
均值	0.3542	0.3053	0.3654

方差	0.0010	0.0014	0.0007
中位数	0.3494	0.3000	0.3660

由表 6.9 可得,跳环境模型模拟股票价格的最小值,均值,方差和中位数比经典 B-S 模型更加接近股票真实值.在统计情况表中,跳环境模型的最大值不如经典 B-S 模型最大值接近"大名城 B"股票,表明跳环境模型偶尔也会出现模拟不准确的情况.

以"华谊 B 股"股票为对象,得到参数 H 的估计值为 0.9920,波动率参数 σ 为 0.0202,期望回报率 μ 的估计值为 0.0008.将具体的参数值代入式(4.1),并假设 $\lambda = 0.0001$, $\mu_j = 0.00004$, 和 $\delta_j = 0.0050$.取"华谊 B 股"股票在 2020 年 4 月 28 日的收盘价格 0.4420 为初始值 S_0 ,跳环境模型和经典 B-S 模型模拟值与股票真实值如图 6.29 所示:

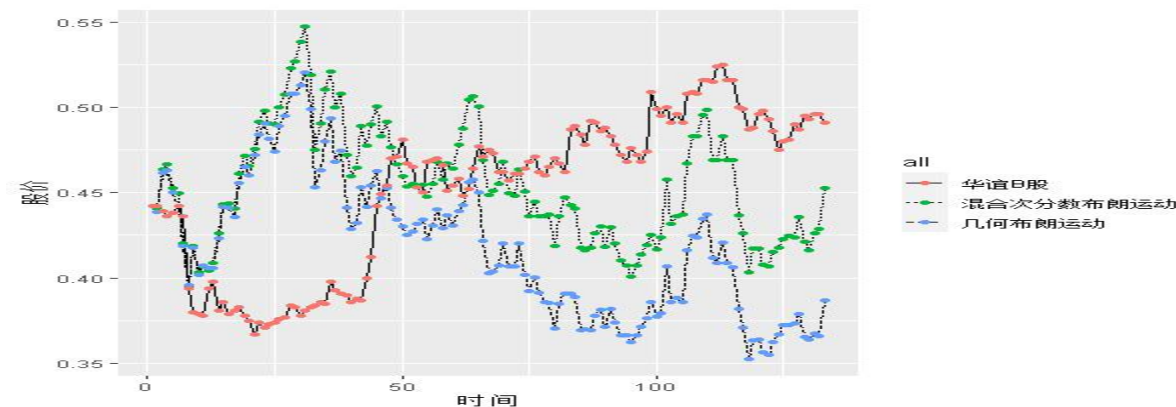


图 6.29 跳环境模型股价,经典 B-S 模型股价与股票真实值对比

由图 6.29 得,前期经典模型与跳环境模型,距离"华谊 B 股"价格较远,模拟效果一般.在中后期,"华谊 B 股"位于上方,跳环境模型位于中间,和经典模型位于下方,跳环境模型模拟效果更好.对模拟结果的具体统计分析如表 6.10 所示:

表 6.10 模型模拟值与真实值情况统计

	带跳模型模拟值	经典 B-S 模型模拟值	股票真实值
最大值	0.5475	0.5206	0.5250
最小值	0.3944	0.3521	0.3670
均值	0.4539	0.4181	0.4513
方差	0.0011	0.0017	0.0021
中位数	0.4510	0.4188	0.4660

由表 6.10 可得,跳环境模型模拟股票价格的均值和中位数比经典 B-S 模型更加接近股票真实值.从统计情况表来看,带跳模型有时候会出现跳跃幅度过大的情况,继而发生带

跳模型最大值不如经典 B-S 模型最大值接近"华谊 B 股"的情况.

以"老凤祥 B"股票为对象,得到参数 H 的估计值为 0.8413,波动率参数 σ 为 0.0126,期望回报率 μ 的估计值为 0.0005.将具体的参数值代入式(4.1),并假设 $\lambda = 0.0008$, $\mu_j = 0.0009$, 和 $\delta_j = 0.0009$.取"老凤祥 B"股票在 2020 年 3 月 24 日的收盘价格 2.7710 为初始值 S_0 ,跳环境模型和经典 B-S 模型模拟值与股票真实值如图 6.30 所示:

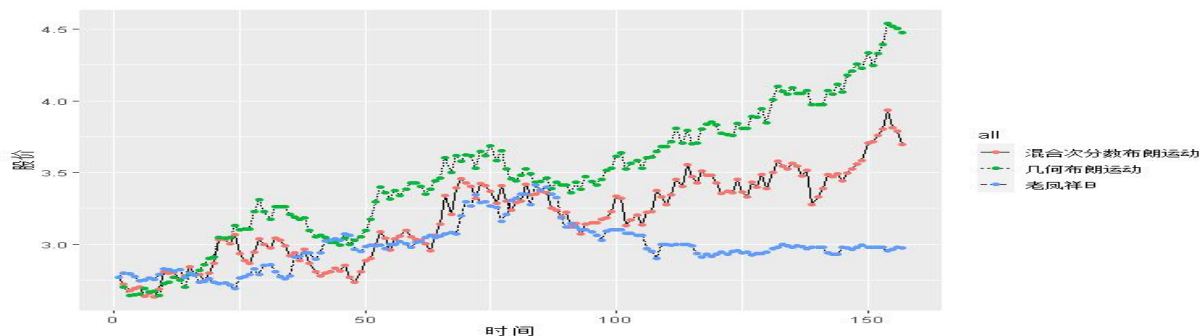


图 6.30 跳环境模型股价,经典 B-S 模型股价与股票真实值对比

由图 6.30 可知,无论前期中期,还是后期,跳环境模型比经典模型更加接近"老凤祥 B"价格,表明跳环境模型模拟效果更好.中后期经典模型股价位于上方,跳环境模型股价位于中间,"老凤祥 B"位于下方,跳环境模型较经典模型更贴近股价真实值.对模拟结果的具体统计分析如表 6.11 所示:

表 6.11 模型模拟值与真实值情况统计

	带跳模型模拟值	经典 B-S 模型模拟值	股票真实值
最大值	3.9340	4.5370	3.4140
最小值	2.6310	2.6430	2.6930
均值	3.1850	3.4820	2.9880
方差	0.0875	0.2068	0.0259
中位数	3.2100	3.4610	2.9800

由表 6.11 可得,跳环境模型模拟股票价格的最大值,均值,方差和中位数比经典 B-S 模型更加接近股票真实值.起初,经典 B-S 模型与带跳模型都可以很好的模拟"老凤祥 B"股票,但在后期,带跳模型明显能够更好的逼近股票,而经典 B-S 模型偏离比较大.

进行拟合效果分析.由图 6.21-图 6.30 和表 6.2-表 6.11 可得,采用跳环境下带交易费用的混合次分数布朗运动来模拟股票价格的结果比经典 B-S 模型更加接近股票真实值.因为股票是欧式期权的重要组成部分,所以对股价模拟越准确,则对应欧式期权价值的模拟

也就越准确.总的来说,跳环境模型比经典 B - S 模型能较好地反映股票的整体走势,因而其对应的期权值也更加的准确.

前面已将本论文的期权定价理论与统计模拟分析一一进行了介绍,接下来对本论文进行总结与展望.

7 研究总结与展望

这部分对论文的工作进行概括与未来研究工作的展望.

7.1 研究总结

经典 B-S 模型是在理想假设条件下得到的,这与现实情况存在偏差.后来许多学者通过实验证明,标的资产价格并不满足几何布朗运动,而是具备自相似性,长相关性以及"尖峰厚尾"等特征,由于次分数布朗运动恰好具备以上特征.因此,本论文引入次分数布朗运动,假设标的资产服从带跳混合次分数布朗运动,利用随机过程等分析理论对有交易费用和无交易费用的欧式期权进行定价.

我们研究了混合次分数布朗运动下的欧式期权定价.因为标的资产价格也可能由于一些突发情况而产生较大波动,所以我们研究了在跳环境和混合高斯过程下的欧式期权定价问题.使用拟条件期望以及自融资策略分别得到欧式看涨、看跌期权定价公式和平价公式.为了刻画交易费用,我们研究了基于跳环境和混合高斯过程下带交易费用的欧式期权定价问题.在研究该问题时,利用 Delta 对冲原理,获得了欧式期权所满足的随机偏微分方程.我们研究混合高斯过程下欧式期权的风险管理.通过希腊字母量化了资产风险.运用真实数据进行实证研究.进一步将模型与真实数据进行拟合,得到混合模型的优越性.

7.2 研究展望

未来可以研究一些新型期权,比如障碍期权、回望期权和亚式期权,丰富期权定价模型的理论和应用.也可以从模型创新,提高期权定价精度来进行研究.考虑参数估计方法以及考虑其它情况下的期权定价问题等方面进行研究,继而提升定价模型的实际效用和推广价值.

参考文献

- [1]Black F,Scholes M.The pricing of options and corporate liabilities[J].Journal of Political Economy,1973, 81(3):637-654.
- [2]Leland H.Option pricing and replication with transactions costs[J].The Journal of Finance,1985,40: 1283-1301.
- [3]Merton R.Option pricing when underlying stock returns are discontinuous[J].Journal of Financial Economics,1976,3:125-144.
- [4]Wang X.Scaling and long-range dependence in option pricing I:Pricing European option with transaction costs under the fractional Black–Scholes model[J].Physica A,2010,389(3):438-444.
- [5]Wang X.Scaling and long-range dependence in option pricing V:Multiscaling hedging and implied volatility smiles under the fractional Black–Scholes model with transaction costs[J].Physica A Statistical Mechanics & Its Applications,2011,390(9):1623-1634.
- [6]郑小迎,陈金贤.有交易成本的期权定价研究[J].管理工程学报,2001,15(3):35-37.
- [7]吴一玲,陶祥兴.有交易费和连续红利时的期权定价公式[J].宁波大学学报(理工版),2009,22(2):230-234.
- [8]袁国军,杜雪樵.跳-扩散价格过程下有交易成本的期权定价研究[J].数学的实践与认识,2007,37(21):11-16.
- [9]Davis M,Panas V.European option pricing with transactions costs[J]. Decision and Control,1991:1299-1304.
- [10]Mariani M,Sengupta I,Bezdek P.Numerical solutions for option pricing models including transaction costs and stochastic volatility[J].Acta Applicandae Mathematicae,2012,118:203-220.
- [11]孙琳.分数布朗运动下带交易费用的期权定价[J].系统工程,2009,27(9):36-40.
- [12]Amster P,Averbuj C,Mariani M,et al.A Black-Scholes option pricing model with transaction costs[J].Journal of Mathematical Analysis and Applications,2005,303:688-695.
- [13]Wang X,Yan H,Tang M,et al.Scaling and long-range dependence in option pricing III:A fractional version of the Merton model with transaction costs[J].Physica A,2010,389(3):452-458.

- [14]Stettner L.Option pricing in discrete-time incomplete market models[J].Mathematical Finance,2000,10(2):305-321.
- [15]Cai N,Chen N,Wan X.Pricing double-barrier options under a flexible jump diffusion model[J].Operations Research Letters,2009,37:163-167.
- [16]Hsu Y,Lin S,Hung M,et al.Empirical analysis of stock indices under a regime-switching model with dependent jump size risks[J]. Economic Modelling, 2016, 54: 260-275.
- [17]Tian L,Wang G,Wang X,et al.Pricing vulnerable options with correlated credit risk under jump-diffusion processes[J]. The Journal of Futures Markets, 2014,34(10): 957-979.
- [18]钱晓松.跳扩散模型中亚式期权的定价[J].应用数学,2003,16(4):161-164.
- [19]钱晓松.跳扩散模型中的测度变换与期权定价[J].应用概率统计,2004,20(1):91-99.
- [20]周圣武.基于跳扩散过程的欧式股票期权定价与风险度量研究[D].中国矿业大学,2009.
- [21]Xu W,Xu W,Li H,et al.A jump-diffusion approach to modelling vulnerable option pricing[J].Finance Research Letters,2012,9:48-56.
- [22]董迎辉.跳扩散模型在寿险合同与信用衍生品定价中的应用[D].苏州大学,2012.
- [23]Chang C,Fuh C,Lin S.A tale of two regimes:Theory and empirical evidence for a markov-modulated jump diffusion model of equity returns and derivative pricing implications[J].Journal of Banking and Finance,2013,37:3204-3217.
- [24]Fu M,Li B,Li G,et al.Option pricing for a jump-diffusion model with general discrete jump-size distributions[J]. Management Science, 2017,63(11):3961-3977.
- [25]Martin M.A two-asset jump diffusion model with correlation[D].University of Oxford,2007.
- [26]胡素华,张世英,张彤.双指数跳跃扩散模型的 MCMC 估计[J].系统工程学报,2006,21(2):113-118.
- [27]Li C,Chen S,Lin S.Pricing derivatives with modeling CO₂ emission allowance using a regime-switching jump diffusion model: with regime-switching risk premium[J].The European Journal of Finance,2016,22(10):887-908.
- [28]陈超.标的资产价格服从跳-扩散过程的脆弱期权定价模型[J].工程数学学报,2008,25(6):1129-1132.
- [29]魏正元,高红霞.多跳-扩散模型与脆弱欧式期权定价[J].应用概率统计,2011,27(3):

232-240.

[30]连颖颖,张铁.期权定价新型二叉树参数模型的构造[J].数学的实践与认识,2010,40(2):15-19.

[31]石广平,周圣武.基于跳扩散模型欧式期权定价条件的二叉树方法[J].数学理论与应用,2012,32(1):19-26.

[32]陈超,邹捷中,刘国买,等.股票价格服从跳-扩散过程的下降敲出买入期权定价模型[J].经济数学,2000,18(2):15-19.

[33]王峰,徐小平,赵炜.布朗运动和泊松过程共同驱动下的欧式期权定价[J].纯粹数学与应用数学,2004,20(1):79-83.

[34]Peters E.Fractal structure in the capital markets[J].Financial Analysts Journal,1989,45(4):32-37.

[35]Necula C.Option pricing in a fractional Brownian motion environment[J].Mathematical Reports,2002,2(3):259-273.

[36]Zhang X,Xiao W.Arbitrage with fractional Gaussian processes[J].Physica A: Statistical Mechanics and its Applications,2017,471:620-628.

[37]Shokrollahi F.Mixed fractional merton model to evaluate European options with transaction costs[J].Journal of Mathematical Finance,2018,8:623-639.

[38]Wang X,Zhu E,Tang M,et al.Scaling and long-range dependence in option pricing II:Pricing European option with transaction costs under the mixed Brownian-fractional Brownian model[J].Physica A,2010,389:445-451.

[39]彭波,郭精军.在跳环境和混合高斯过程下的资产定价及模拟[J].山东大学学报(理学版),2020,55(5):105-113.

[40]Hu Y,Øksendal B.Fractional white noise calculus and application to finance[J]. Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics,2003,6(1):1-32.

[41]程志勇,郭精军,张亚芳.次分数布朗运动下支付红利的欧式期权定价[J].应用概率统计,2018,34(1):37-48.

[42]Jost C.Transformation formulas for fractional Brownian motion [J].Stochastic Processes and their Applications,2006,116:1341-1357.

[43]刘韶跃,杨向群.分数布朗运动环境中标的资产有红利支付的欧式期权定价[J].经济数学,2002,19(4):35-39.

- [44]刘韶跃,杨向群.分数布朗运动环境中混合期权定价[J].工程数学学报,2006,23(1):153-157.
- [45]郭精军,张亚芳.次分数 Vasicek 随机利率模型下的欧式期权定价[J].应用数学,2017,30(3):503-511.
- [46]肖艳清.分数布朗运动驱动的随机方程及其在期权定价中的应用[D].中南大学,2012.
- [47]王爱银,于文明.CEV 模型和 B-P 混合驱动模型下亚式期权 Monte Carlo 模拟[J].数学的实践与认识,2021,51(2):20-27.
- [48]奚欢,邓国和.双跳跃仿射扩散模型的几何平均型水平重置期权定价[J].系统科学与数学,2021,41(1):59-74.
- [49]Xu F,Li R.The pricing formulas of compound option based on the sub - fractional Brownian motion model[J]. Journal of Physics: Conference Series, 2018(1053):012027.
- [50]El-Nouty C.The increments of a sub-fractional Brownian motion[J].The International Conference on Information and Digital Technologies,2016:95-100.
- [51]孙玉东,师义民.混合分数布朗运动下亚式期权定价[J].经济数学,2011,28(1):49-51.
- [52]Zili M.On the mixed fractional Brownian motion[J].Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis,2006,2006:1-9.
- [53]Tudor C.Some properties of the sub-fractional Brownian motion[J]. Stochastics:An International Journal of Probability and Stochastic Processes,2007,79(5):431-448.
- [54]程志勇.混合高斯模型下美式期权定价及风险度量[D].兰州财经大学,2018.
- [55]叶中行,杨利平.上证指数的混沌特性分析[J].上海交通大学学报,1998,32(3):129-132.
- [56]Mandelbrot B.The fractal geometry of nature[M].New York:W. H. Freeman and Company,1977.

致谢

时光荏苒,岁月如梭,校园生活总是转瞬即逝,转眼间已经在兰州财经大学学习生活三年的时间了,走在这温暖的校园中,面对培育我的母校,心中无限感慨.

在此,我要特别感谢我的导师郭精军教授,从小论文到毕业论文的书写,倾注了郭精军老师大量的心血,在您的耐心指导下,我才能完成论文.在这里,我衷心向我的导师说一声,"谢谢老师,您辛苦了! 祝愿恩师身体健康,事业顺利!"

其次,我要感谢统计学院的全体领导和老师们.您们的谆谆教诲和耐心的指导,让我们得到了提升.

同时,我要感谢我的同门,同学和舍友,感谢您们的陪伴,让我克服困难,顺利完成学业.

同样,我要感谢我的家人,在我求学的道路上,一直是我求学道路上最坚强有力的后盾.

最后,感谢各位评审本文的老师,感谢您们利用宝贵的时间审阅并提出意见.

彭波

2021年3月22日

作者在硕士期间的科研成果

1. 彭波,郭精军.在跳环境和混合高斯过程下的资产定价及模拟[J].山东大学学报(理学版),2020,55(5):105-113.
2. 郭精军,彭波.基于混合高斯过程和跳环境下带交易费用的资产定价及模拟分析[J].应用数学学报.(已录用)
3. 参与完成国家自然科学基金项目《次分数布朗运动视角下的欧式期权定价及其在风险管理中的应用》,批准号 71561017.