

分类号 _____
U D C _____

密级 _____
编号 10741

兰州财经大学

LANZHOU UNIVERSITY OF FINANCE AND ECONOMICS

硕士学位论文

论文题目：多分形随机利率模型下的欧式期权定价研究

研究生姓名：马爱琴

指导教师姓名、职称：郭精军 教授

学科、专业名称：统计学 数理统计学

研究方向：金融统计与风险管理

提交日期：2019年6月10日

独创性声明

本人声明所呈交的论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果.尽我所知,除了文中特别加以标注和致谢的地方外,论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果.与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意.

学位论文作者签名:_____ 签字日期:_____

导师签名:_____ 签字日期:_____

关于论文使用授权的说明

本人完全了解学校关于保留、使用学位论文的各项规定,_____ (选择“同意”/“不同意”)以下事项:

1.学校有权保留本论文的复印件和磁盘,允许论文被查阅和借阅,可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文;

2.学校有权将本人的学位论文提交至清华大学“中国学术期刊(光盘版)电子杂志社”用于出版和编入 CNKI《中国知识资源总库》或其他同类数据库,传播本学位论文的全部或部分内容.

学位论文作者签名:_____ 签字日期:_____

导师签名:_____ 签字日期:_____

Research on European Option Pricing under Multifractional Stochastic Interest Rate Model

Candidate : Aiqin Ma

Supervisor: Jingjun Guo

摘 要

金融市场的迅速发展,使得金融衍生产品不断增加,而期权作为金融衍生产品的一种,因为其自身具备的杠杆性和套期保值特性而引起了广泛关注.在期权定价的研究过程中,研究人员运用布朗运动和分形布朗运动模型对期权进行了定价研究,但实证研究表明:经典布朗运动模型和分形布朗运动模型均不能准确刻画金融资产的自相似和长相依等特性,而多分形布朗运动模型能够更好的刻画金融市场尖峰后尾的特征.因此,对于多分形布朗运动模型下资产定价的研究是很有必要的.

本文基于金融随机分析和期权定价理论,采用多分形随机利率模型来描述金融资产标的的价格变化情况.主要研究内容有两部分.第一部分是对期权定价公式的推理证明.首先,构造投资组合并运用无风险对冲原理和随机微分方程理论推理得出期权所满足的随机微分方程.然后,通过热传导方程对偏微分方程进行求解,并推导得出期权在多分形布朗运动模型下具有交易费用和随机利率的欧式期权定价公式.

第二部分采用上证 50ETF 期权进行模拟分析.首先,对所研究数据进行描述统计分析得到数据的基本特征,并对其中的参数进行估计.然后,分别用经典 B-S 和多分形随机利率模型对标的资产价格进行模拟,并与标的资产的真实值进行比较.最后,将模拟得到的标的资产的价格带到相应期权定价公式中,计算出期权的价格,并与期权的真实值进行对比.研究表明:与经典的 B-S 模型相比,多分形随机利率模型下的期权定价结果更加接近期权的真实值.因此说明多分形随机利率模型对期权定价是有效并且可行的.

关键词: 多分形布朗运动 随机利率 期权定价 交易费用 Monte Carlo 模拟

Abstract

The rapid development of financial markets has led to the increasing number of financial derivatives. As a financial derivative, options are widely concerned with their leverage and hedging characteristics. On the research of option pricing, researchers use respectively Brownian motion and fractional Brownian motion model to study option pricing, but empirical studies show that both classical Brownian motion model and fractional Brownian motion model cannot accurately describe the self-similarity and long-term dependence characteristics of financial assets, while multifractional Brownian motion model can better describe the peak and tail characteristics of financial markets. Therefore, it is necessary to study the asset pricing under the multifractional Brownian motion model.

In this paper, based on the financial stochastic analysis and option pricing theory, uses the multifractional stochastic interest rate model to describe the price change of financial assets. There are two parts in this paper. The first part is the proof of reasoning of the option pricing formula. Firstly, The stochastic equations are verified by used constructing a portfolio and applying a risk-free hedging principle and stochastic differential equation theory. Then, the partial differential equations are solved by the heat conduction equation, and it is concluded that the

European option pricing formula with the transaction cost and random interest rate under the multifractional Brownian motion model.

In the second part, using the 50 ETF option is used for simulation analysis. Firstly, the basic characteristics of the data are obtained by descriptive statistical analysis of the obtained data, and the values of the parameters to be estimated are obtained. Then, the classic B-S model and the extended model are used to simulate the price of the asset and comparing with the real price change path. Finally, the price of the simulated underlying asset is brought to the corresponding option pricing formula, and the price of the option is calculated and compared with the true value of the option. Compared with the classic B-S model, the option pricing under the multifractional stochastic interest rate model is closer to the true value of the option. Therefore, the model of multifractional stochastic is effective and feasible for option pricing.

Keywords: Multifractional Brownian motion; Stochastic interest rate;
Option pricing; Transaction cost; Monte Carlo simulation

目 录

1 引 言	1
1.1 研究背景.....	1
1.2 研究意义.....	1
1.3 研究现状.....	2
1.4 研究内容及结构	6
1.4.1 研究内容	6
1.4.2 结构安排	7
2 基本理论知识	8
2.1 期权的基础知识	8
2.2 期权定价的相关定义.....	8
2.3 经典 B-S 定价模型	9
2.4 分形布朗运动及其性质	10
2.5 多分形布朗运动及其性质.....	11
2.6 随机利率模型	12
3 多分形布朗运动下欧式期权定价模型	13
3.1 金融市场基本假设条件.....	13
3.2 多分形布朗运动下带有交易费用的定价公式.....	13
3.3 多分形随机利率环境下的定价公式.....	16
3.4 多分形随机利率下具有交易费用的定价公式.....	25
4 模拟分析	31
4.1 数据的统计特征	31
4.2 参数估计	33
4.3 模拟结果分析	35
5 研究结论与展望	37
5.1 研究结论	37

5.2 研究展望	37
参考文献	38
致 谢	42

1 引言

1.1 研究背景

21 世纪以来,金融创新全球化的迅速发展,使得金融衍生产品的发展也越来越迅速,金融衍生产品的种类较多,而期权作为衍生产品的一种可以有效的控制风险.因此,对于其定价模型的研究成为了广大研究者们关注的焦点.

期权最早于 20 世纪 70 年代在美国出现,由于其自身具有风险控制性能,所以其发展速度相对较快.期权实际上是一种选择权,是指赋予期权购买者在规定时间内或者时间点,以协商价格向卖方购买或者出售一定数量的标的物的权利,但没有必须要买进或卖出的义务.然而,期权合约是一种权利不对等的合约,即期权的购买方有无限大的权利,而卖方的权利有限.具体表现为:到期权执行期时,持有期权者可以行使权利也可以不行使权利,当持有者行使权利时,期权的卖方务必履行义务,这时期权卖方的亏损可能无限大,当持有者不行使权利时,持有者的损失只是预先支付的费用,即期权的价格.

从 1900 年 Bachelier 博士论文《投机理论》到 21 世纪,关于期权定价模型的研究越来越多,也出现了各种类型的定价模型.其中,Black 和 Scholes^[1] (1973)提出的 B-S 定价模型对期权定价有深远影响,该模型提出后,得到了大多数研究者的认可,同时也有大量学者对其进行检验,并取得了较好的成果.经典定价模型的前提假设条件较为严格,例如,交易过程中没有交易费用,没有支付红利,利率为固定利率等.然而,相关研究表明金融市场资产价格收益率具有分形特征,其分布呈现出比较明显的尖峰后尾特性,并且在交易过程中会有交易费用和支付红利等的产生.即经典 B-S 定价模型的相关假设条件与金融市场的真实情况并不相符.因此,对经典定价模型进行进一步研究具有重要的意义.

1.2 研究意义

在金融市场不断发展的背景下,金融衍生品成了金融市场中的主要工具.作为主要的金融衍生产品,期权可以用来规避风险.因此,对于期权定价的研究具有十分重要的理论和现实意义.

经典 B-S 定价模型假设条件与金融市场的实际情况不相符,而多分形布朗运动模型能够更准确刻画金融资产价格呈现出的长记忆等分形特征.故本文采用多分形布朗运动模型来研究金融资产标的价格变化趋势,对于此模型下存在随机利率以及带有交易费用的欧式期权定价公式的研究,既可以丰富期权定价的理论知识,又能为以后的定价提供研究思路.

多分形布朗运动模型下存在随机利率并带有交易费用的欧式期权定价模型研究结果,可以应用到现实中.选择期权市场的数据,运用蒙特卡洛模拟法得到期权的价格并与期权的真实价格进行比较,分析模型的定价效果.定价模型给出的定价结果,不仅能给券商提供资产定价依据,还可以给投资者提供投资的依据,从而减少资本市场中投机事件的发生,这对衍生产品市场的有序发展具有重要的现实意义.

1.3 研究现状

自 Bachelier 在其博士论文中对期权定价模型的进行全面研究之后,关于期权定价模型的研究越来越多,同时出现了各种类型的定价模型.其中,Black^[1]等(1973)提出的 B-S 定价模型,对期权的研究具有深远的影响,但该模型的前提假设条件与金融市场的现实情况不相同,因此,国内外学者对 B-S 模型进行了大量的改进,主要从以下几方面进行研究.

(1) 分形布朗运动下的定价研究

对金融市场的大量研究表明金融市场具有分形特征,但是经典 B-S 模型在研究过程中假定标的资产收益率服从正态分布,这与市场情况存在一定的差异,因此研究者在分形布朗运动下对金融市场进行研究. Peter^[2] (1994)应用单分形分析方法对汇率和股票收益率进行分析,发现它们都具有分形的特征.徐龙炳^[32]等(1999)利用单分形模型研究了上证综指以及深圳成指的日收益率,研究结果表明两市的赫斯特指数 H 值都大于 1/2,即上证综指收益率和深圳成指收益率都具有分形的特征.史永东^[33] (2000)用重标极差分析法分析了上证综合指数的周收益率,实证研究发现上海证券市场也具有分形的特征. Necula^[3] (2008)也对分形布朗模型下的期权定价进行了研究.研究发现期权定价的研究过程中往往会产生套利,为了解决套利对定价结果的影响, Cheridito^[4] (2001)提出了构造鞅方法来解决分

形布朗运动模型定价过程中产生套利的问题. Cheridito^[5] (2003)研究发现, 利用定价模型在 Wick 积分理论下研究金融市场会产生套利机会或者在该模型下的自融资对冲策略不符合经济学理论. 后来, Bender^[6]等(2004)证明了当 $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ 时, 多分形布朗运动驱动下的金融市场是无套利的. 同时在分形理论的基础上, 一些学者对不同的期权也进行了研究, 刘目楼^[34] (2007)对分形布朗运动下的欧式外汇期权定价也进行了相关研究. 赵旭^[35] (2008)推导出了在分形条件下的 B-S 定价模型, 并和传统的 B-S 模型进行对比分析了认购权证价格变化的行为. Caldana^[7]等(2013)对交换期权进行了研究, 论文通过傅里叶变换给出了交换期权的闭式解, 并测试了新提出定价算法在不同模型中进行数值模拟试验的性能. 张卫国^[36] (2013)也研究了分形布朗运动环境下的期权定价问题. Gao^[8]等(2018)对分数布朗运动 Knight 不确定性下的期权进行了定价研究, 在 Knight 不确定情况下建立了欧式期权的动态定价模型和最小期权定价模型, 并通过鞅测度获得定价公式.

对于分形特征下期权定价的研究还有以下方面, 首先, Ayache^[9] (1999)将分数布朗运动中的常数赫斯特指数推广到非常数的情况下对非平稳连续过程也进行了建模研究. Cont^[10] (2001)运用一套新的方法分析金融市场的价格变化情况, 研究发现金融价格的波动呈现出聚类的特点. Leippold^[11]等(2016)运用多维二叉树模型对具有随机流动性的离散时间期权定价问题进行了研究. Sottinen^[12](2001)提出用随机游走逼近分形布朗运动的理论, 该理论推动了分形布朗运动在期权定价中的应用. Torres^[13]等(2016)对多分形随机游走模型进行了构造与仿真研究. 其次, 对跳跃过程的研究, d'Halluin^[14] (2004)假设金融资产的价格满足跳跃扩散过程, 并在该过程下对金融期权的定价公式进行了研究. 张卫国^[36]等(2008)探讨了跳跃分形过程环境下欧式汇率期权的定价问题, 文中利用分形 Girssnov 公式和自融资的交易策略, 对分形市场中欧式汇率的未定权益进行了定价研究. Baskshi^[15]等(2012)对金融期权的定价模型进行了实证研究, 研究发现随机波动率和跳跃性的结合对于期权的定价非常重要, 但单独对随机波动率建模对于套期保值的研究具有重要意义. 最后, 对不同分形模型进行研究. 张陶^[38] (2016)考虑了混合分形布朗运动模型下的期权定价问题, 并经过实证分析证实了混合分形布朗运动比经典定价模型的定价效果更靠近真实值. 郭精军^[39]等(2018)研究了混合高斯模型下具有红利的永久美式期权定价问题, 研究发现混合高斯模型能够更好的描述美式

期权标的资产价格的变化情况. 程志勇^[40]等(2018)对次分数布朗运动下具有支付红利的欧式期权定价进行了研究, 经实证分析发现次分数布朗运动模型下的期权定价结果比分形布朗运动模型和经典 B-S 定价模型下的结果更加接近期权的真实值. 史永东^[41]等(2017)对时变分数布朗运动下的 GARCH 族欧式期权定价问题进行了研究, 研究结果表明时变分数布朗运动能够更加精确刻画金融市场价格的变化特征. 之后, Ayache^[16]等(2018)对一种新的具有随机指数的多分形过程进行了研究. 李楚砚^[42] (2017)研究了多分形波动率预测模型及其在 B-S 模型中的应用, 论文引入了多分形波动率的预测方法并建立了 ARFIM 模型, 分析了不同分形波动率预测方法对金融产品定价的影响, 研究结果显示新引入的多分形波动率预测方法的预测效果最优.

(2) 带有交易费用的定价研究

对于具有交易费用的定价研究, Leland^[17] (1985)最早在期权定价模型的研究中加入了交易费用, 探讨了期权交易过程中产生的交易费用对期权定价结果的影响, 并得到了带有交易费用情况下的定价模型. Amster^[18] (2005)在经典 B-S 模型的基础上考虑了交易费用, 研究得到了带交易费用的期权定价公式. Mastinsek^[19] (2006)将交易费用引入到了离散时间的期权定价研究中, 利用风险中性套期保值策略对冲风险, 得到了离散时间下具有交易费用的 B-S 定价模型. Wang^[20] (2012)利用具有交易成本的多分形 B-S 模型研究了离散时间期权的定价问题. Gu^[21]等(2012)对具有时间变换特性的几何分式布朗运动以及带有交易费用的期权定价问题进行了研究. 肖炜麟^[43] (2014)对次分数布朗运动下具有交易费用的权证进行定价研究. 孙娇娇^[44] (2015)研究了体制转换模型下具有交易费用的期权定价问题, 并使用 Matlab 软件进行数值分析, 探讨了市场参数对期权价格的影响. Li^[22]等(2017)研究了基于惩罚法和有限体积法的比例交易成本和随机波动率的欧式期权定价问题, 论文中提出了一种新的惩罚方法和有限体积方法相结合的 HJB 方程, 并用数值模拟的方法证明了新提出方法的有效性. Najafi^[23]等(2017)对带有交易费用的分数 CIR 模型下零息债券美式看跌期权定价进行了研究. Bouchard^[24]等(2018)研究了交易成本下的均衡收益问题. 郭志东^[45] (2017)对次扩散机制下具有交易成本的 Merton 期权定价模型进行了研究. Radulescu^[25] (2018)对带有交易费用的多阶段投资组合优化的多目标方法进行了研究.

(3) 随机利率下的定价研究

随机了利率模型下的期权定价研究主要有两种方法,第一种方法是一般均衡模型,第二种方法是无套利定价模型,自 Harrison^[26] (1979)之后该方法得到了广泛的应用. Merton^[27] (1973)将随机利率引入了 B-S 定价模型中,研究了随机利率下的期权定价模型,但是由于各种原因的影响该模型在实际应用中并未被广泛应用. Duffie^[28] (1988)对随机利率下的期权定价问题也进行了相关研究,但其在研究过程中只是假定利率是标的资产和时间的函数,并没有给出封闭解. 夏雪丽^[46] (2014)基于分数布朗运动模型对随机利率下的几何平均亚式期权进行定价研究,论文在分数布朗运动下对亚式期权进行了定价,并利用无套利率模型对具有固定和浮动执行价格的两类亚式期权进行了定价,同时推导出了在此条件下的定价公式. 韩松^[47] (2016)研究了分数布朗运动环境下 Vasicek 利率的亚式期权定价问题,得到了 Vasicek 利率模型下带跳的几何平均亚式期权定价的定价公式,但此模型中并没有考虑到交易费用对期权价格的影响. 郭志东^[48] (2017)对 Merton 随机利率下的欧式期权定价进行了研究,但其研究主要是基于 B-S 模型进行的,因此也不能精确刻画金融市场标的价格的变化情况. 郭精军^[49]等(2017)对次分数 Vasicek 随机利率模型下的欧式期权定价问题也做了相应研究. 曹雯雯^[50]等(2017)探讨了 Hull-White 利率下具有支付红利的 O-U 过程的幂型期权定价问题. Zhang^[29]等(2018)研究了基于随机利率投资策略的看涨期权定价,论文基于线性投资策略对股票期权进行了评估,并在随机利率模型下对股票市场中的风险进行规避,基于设计的随机利率线性投资策略得到了一种新的期权定价方法. He^[30]等(2018)在随机利率模型下对欧式期权的闭式定价公式进行研究. Guo^[31]等(2016)在次分数布朗运动机制下对具有短期利率的期权进行定价研究,论文主要分析了短期利率为次分数 Merton 模型时的定价问题,并给出了此模型下欧式看涨和看跌期权的定价公式.

综上所述,现阶段对于期权定价的研究大多是基于经典 B-S 模型进行的,研究发现利率、支付红利、波动率、交易费用等对金融资产的定价结果都有重要影响,因此大多数学者们在经典 B-S 模型中引入了相关影响因素,但是目前对于交易费用以及随机利率等对期权定价影响的研究大多是在 B-S 模型下进行的,而研究发现经典 B-S 模型并不能精确刻画金融市场的性质,也有一部分研究是在分形布朗运动模型下进行的,虽然相关研究表明相对于经典 B-S 模型而言分形布朗运动的定价结果更接近期权的真实值,但是分形布朗运动在定价过程中的分形指数

是一个定值,这对于金融市场分形特征的描述不够精确,在此模型下的研究各个因素对定价结果的影响也具有一定的缺陷,而多分形布朗运动在每个时间内的分形指数也不相同,因此能更精确的刻画金融市场的分形特征,基于此,本文在多分形布朗运动的基础上研究交易费用和随机利率对期权定价模型结果的影响,首先在多分形布朗运动模型下分别对存在交易费用的和随机利率的欧式期权满足的偏微分方程和定价公式进行推导,随后在将交易费用与随机利率同时引入到多分形布朗运动模型中对欧式期权的定价模型进行研究.

1.4 研究内容及结构

1.4.1 研究内容

论文拟采用多分形布朗运动模型来描述金融资产标的的价格变化情况,在该模型的基础上主要研究了以下内容:

(1)在期权定价的过程中考虑交易费用对定价结果的影响,得到多分形模型下有交易费用的期权定价公式.具体过程中,先考虑一个无风险资产和有风险资产的复制投资组合,给出无风险和有风险资产分别满足的方程,再考虑离散时间区间 δt 内风险资产和投资组合的变化值,然后根据自融资交易策略等得到标的资产所满足的偏微分方程,最后通过求解偏微分方程得到相应的定价公式.

(2)对多分形布朗运动环境下存在随机利率时的期权进行定价,研究随机利率对多分形布朗运动定价模型的影响.在此过程中,将多分形模型中的常数利率用随机利率代替,得到无风险资产价格满足的方程,然后构造投资组合进行推理得到随机利率下的定价公式,最后根据所得的定价公式得到随机利率对定价模型的影响.

(3)在随机利率的条件下再引入交易费用,研究模型中同时存在交易费用和随机利率时金融资产的定价模型.即在随机利率的基础上加入交易费用,再考虑投资组合并进行推理证明得到标的资产所满足的偏微分方程,最后通过求解偏微分方程得到多分形布朗运动模型下的金融资产定价公式.

(4)论文利用上证 50ETF 的数据对所得结果进行模拟分析,验证多分形布朗运动模型刻画资产价格变化情况的有效性.首先在 Wind 数据库收集实证所需

要的数据, 然后对所得数据进行简单的描述统计分析得到数据的基本特征, 并对其中的参数变量进行估计, 最后, 以多分形随机利率模型为基础用 Monte Carlo 模拟法模拟期权的价格, 并与经典 B-S 期权定价模型的定价结果进行比较。

1.4.2 结构安排

论文的结构安排如下:

第一部分内容是引言. 主要对期权的研究背景做了详细的阐述, 同时还对文章的研究目的、研究意义以及文章所参考的相关文献做了简单的介绍和总结, 为论文的研究提供相关依据.

第二部分内容是基本的理论知识. 主要对金融市场以及期权的相关理论进行了阐述, 并给出了经典定价模型、分形布朗运动模型、多分形布朗运动模型的理论知识和相关性质.

第三部分内容是多分形布朗运动下的欧式期权定价模型. 主要对各种条件下的定价公式进行推理, 得到多分形布朗运动下具有交易费用、随机利率的期权定价模型.

第四部分内容是模拟分析. 利用蒙特卡洛模拟法, 对不同模型下的标的资产价格进行模拟, 并将多分形随机利率模型与经典定价模型以的定价结果进行比较, 得到多分形随机利率模型的定价结果更有效.

第五部分内容是研究结论与展望. 首先对论文研究的主要内容以及论文研究过程中所用方法进行简单的总结, 然后对未来的研究方向和研究内容做简单的展望.

2 基本理论知识

2.1 期权的基础知识

期权^[36]又称作选择权,是指赋予期权购买者在规定时间内或者时间点,以事前协商好的价格向卖方购买或者出售一定数量的标的物的权利,但是没有必须要买进或卖出的义务.根据交易方式的不同期权可以分为看涨期权和看跌期权,所谓看涨期权是指期权的持有者具有在合约的有效期内购买标的资产的权利,看跌期权指期权的持有者具有在合约期内出售标的资产的权利.依据期权行使时间的不同又可以将其分为美式期权和欧式期权,美式期权是指期权在到期日以前随时都可以行使权利的合约,而欧式期权则是指持有者只能在到期日时才能行使权利的合约.

2.2 期权定价的相关定义

论文是在完备的金融市场和无套利的假设条件下进行研究的,下面将给出相关定义.

定义 2.1^[36] 自融资交易策略:自融资交易策略是指在一个融资过程中,既没有新资金的进入又没有原有资金的抽离,并且组合价值保持不变的过程.即对一个交易策略 ϕ ,如果它满足 $u = 1, 2, \dots, T$ 都有

$$\phi_{u-1} \cdot S_u = \phi_u \cdot S_u,$$

成立,则称其为自融资策略.其中, $S_u (u = 1, 2, \dots, T)$ 为 u 时刻资产价格, $\phi_u (u = 1, 2, \dots, T)$ 为 u 时刻资产持有量.

定义 2.2^[36] 套利策略:如果已知 ϕ 是一个自融资交易策略,并且对于任意一个最后时刻 t 该投资组合的价值 $V_t(\phi) \geq 0$,而该投资组合在初始时刻的价值为 $V_0(\phi) = 0$,则称自融资交易策略 ϕ 为一个套利策略.

定义 2.3^[36] 无套利市场:如果自融资策略集合 Φ 中不存在任何的套利机会.则称市场 $M = (S, \Phi)$ 是无套利的,其中 Φ 是自融资交易策略的集合, S 是与 \mathcal{F} 相适应的随机过程.

定义 2.4^[36] 复制策略: 如果一个交割时间为 T 的未定权益 X 和一个自融资策略 ϕ , 使得 $V_t(\phi) = X$, 则称该自融资交易策略为复制策略.

定义 2.5^[36] 完备市场: 如果每一个未定权益 X 在市场 M 中都可以被某一交易策略复制, 则称市场 M 为完备市场.

2.3 经典 B-S 定价模型

模型的基本假设^[1]

- (1) 金融市场是完全的, 不存在套利, 并且所有未定权益是可以复制的.
- (2) 市场无摩擦性, 即在交易过程中, 不支付交易费用和税费.
- (3) 期权交易过程中, 交易是连续的, 并且允许卖空.
- (4) 期权标的资产价格服从几何布朗运动, 即

$$dS_t = uS_t dt + \sigma S_t dB_t,$$

其中, B_t 是标准布朗运动, 期望回报率 u 和波动率 σ 均为常数.

- (5) 期权在有效期内的无风险利率 r 为常数.
- (6) 期权为欧式期权, 并且在交易过程中不支付红利, 无股息或其他分配.

定价公式^[1]

B-S 微分方程

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS_t \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

求解上述微分方程得到经典 B-S 模型的定价公式,

$$\begin{aligned} C(S_t, t) &= S_t \Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)} \Phi(d_2), \\ P(S_t, t) &= Ke^{-r(T-t)} \Phi(-d_2) - S_t \Phi(-d_1), \end{aligned}$$

其中,

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t},$$

$\Phi(\cdot)$ 为标准正态分布的累积分布函数, S_t 为 t 时刻标的资产价格, K 为执行价格, r 为无风险利率, σ 为股票价格的波动率, $C(S_t, t)$ 和 $P(S_t, t)$ 分别为看涨和看跌期权的价格.

2.4 分形布朗运动及其性质

定义 2.6^[36] 对于赫斯特参数 $0 < H < 1$ 且任意的 $s, t \in \mathbb{R}$, 若随机过程 $B_t^H = \{B^H(t), -\infty < t < +\infty\}$ 是具有平稳增量的自相似过程, 则称 B_t^H 是赫斯特参数为 H 的分形布朗运动, 分形布朗运动的协方差函数满足如下等式

$$\text{Cov}(B^H(t), B^H(s)) = \frac{1}{2} (|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}).$$

当 $H = \frac{1}{2}$ 时, B_t^H 为标准布朗运动, $E(B^H(t)) = 0, \text{Var}(B^H(1)) = 1$ 时, B_t^H 为标准分形布朗运动.

分形布朗运动的性质^[36]:

- (1) 对于任意的 $t > 0$, 有 $EB_t^H = 0$ 成立.
- (2) 分形布朗运动 B_t^H 具有平稳增量.
- (3) 对任意的 $H \in (0, 1), t \geq 0, E[B_t^H]^2 = t^{2H}$.
- (4) 对任意的 $H \in (0, 1), s \geq 0$, 随机过程 $B_{t+s}^H - B_s^H$ 也是分形布朗运动.
- (5) 对于任意的 $\alpha > 0, B_{\alpha t}^H$ 与 $\alpha^H B_t^H$ 有相同的分布.
- (6) 当 $H \in (0, 1)$ 时, B_t^H 具有长相依性.
- (7) 当 $H = \frac{1}{2}$ 时, B_t^H 既不是马尔科夫过程也不是半鞅.

分形布朗运动的几种表示方法^[36]:

(1) 谱表示

$$B_t^H = \frac{1}{c_H} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itu} - 1}{|u|^{H-1/2}} \tilde{W}(du),$$

其中, $c_H = \sqrt{\frac{2 \cos(\pi x) \Gamma(2-2x)}{x(1-2x)}} = \sqrt{\frac{2\pi}{\Gamma(2x+1) \sin(\pi x)}}$, \tilde{W} 是 \mathbb{R} 的一个复布朗测度.

(2) Volterra 表示:

$$B_t^H = \int_0^t K^H(t, s) dW_s,$$

其中, $K^H(t, s) = d_H (t-s)^{H-\frac{1}{2}} + d_H \left(\frac{1}{2} - H\right) \int_s^t (u-s)^{H-\frac{3}{2}} \left(1 - \left(\frac{s}{u}\right)^{\frac{1}{2}-H}\right) du,$

$$d_H = \sqrt{\frac{2H\Gamma\left(\frac{3}{2}-H\right)}{\Gamma\left(H+\frac{1}{2}\right)\Gamma(2-2H)}}, W_s \text{ 是标准布朗运动.}$$

(3) 移动平均表示

$$B_t^H = \kappa(H) \int_{-\infty}^{+\infty} ((t-s)_+^{H-1/2} - (-s)_+^{H-1/2}) dW_s,$$

其中, $\kappa(H) = 1/\Gamma(H + 1/2)$.

2.5 多分形布朗运动及其性质

定义 2.7^[20] 对于任意的 $t_1, t_2 \in [0, +\infty)$, 满足 $|t_1 - t_2| < 1$, 即 $H_t = H(t): [0, +\infty) \rightarrow (0, 1)$ 是指数为 $\beta > 0$ 的 Hölder 函数, 若存在常数 $c_0 > 0$ 使得 $|H(t_1) - H(t_2)| \leq c_0 |t_1 - t_2|^\beta$ 成立, 则称

$$W_{H_t}(t) = \frac{1}{\Gamma(H_t + 1/2)} \left[\int_{-\infty}^0 ((t-\tau)^{H_t-1/2} - (-\tau)^{H_t-1/2}) dW(\tau) + \int_0^t (t-\tau)^{H_t-1/2} dW(\tau) \right],$$

为多分形布朗运动, 其中 $W(t)$ 是一个布朗运动.

多分形布朗运动的性质^[20]:

(1) 假设 $B_{H_t}(t)$ 和 $B_{H_s}(s)$ 是两个多分形布朗运动, 则其协方差函数满足如下方程

$$\text{cov}(B_{H_t}(t), B_{H_s}(s)) = \frac{g(H_t, H_s)}{2} \{|t|^{H_t+H_s} + |s|^{H_t+H_s} - |t-s|^{H_t+H_s}\},$$

其中,

$$g(H_t, H_s) = \{I(H_t)I(H_s)\}^{-1/2} I\{(H_t + H_s)/2\},$$

$$I(H) = \begin{cases} \frac{\Gamma(1-2H)}{H} \sin\left\{\frac{\pi}{2}(1-2H)\right\} & H \in (0, 1/2) \\ \pi & H = 1/2 \\ \frac{\Gamma\{2(1-H)\}}{H(2H-1)} \sin\left\{\frac{\pi}{2}(2H-1)\right\} & H \in (1/2, 1). \end{cases}$$

当 $t = s$ 时, $H_t = H_s$, $g(H_t, H_s) = 1$.

(2) W_{H_t} 是一个关于 t 的连续函数.

(3) 假设 $X \sim N(0, \sigma^2)$ 是一个随机变量, 则对于任意 $r > 0$, 有

$$E[|X|^r] = \frac{2^{r/2} \Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \sigma^r.$$

(4) Kolmogorov 准则

假设 $X_t, t \in T$ 是一个可分离过程, T 是一个有限区间, 存在常数 $\alpha > 0, B > 0, C > 0$ 使得 $E|X_{t+h} - X_t|^\alpha \leq Ch^{1+B}$, 则

$$\sup_{\substack{t, s \in T \\ |t-s| < h}} |X_t - X_s| \xrightarrow[h \rightarrow 0]{a.s.} 0.$$

(5) 假设 $B_{H_t}(t)$ 是一个多分形布朗运动, 则 $E[B_{H_t}(t)]^2 = t^{2H_t}$.

2.6 随机利率模型

对于随机利率模型的研究主要有一般均衡模型和无套利模型两种, 根据文章需要, 下面给出一般均衡模型中几种常见的利率模型.

一般均衡模型的随机微分方程如下^[51]:

$$dr = m(r)dt + s(r)dz.$$

其中, r 为短期利率. 式中 $m(r)$ 和 $s(r)$ 表示形式的不同, 可以得到不同的模型结构.

当 $m(r) = ur, s(r) = \sigma r$ 时, 模型为 Rendleman and Bartter 模型;

当 $m(r) = a(b - r), s(r) = \sigma$ 时, 模型为 Vasicek 模型;

当 $m(r) = a(b - r), s(r) = \sigma\sqrt{r}$ 时, 为 CIR 模型.

3 多分形布朗运动下欧式期权定价模型

3.1 金融市场基本假设条件

(1) 假设在 t 时刻股票价格 S_t 满足多分形 B-S 模型:

$$S_t = S_0 \exp\left(ut + \sigma B_{H_t}(t)\right),$$

其中, $u, H_t > \frac{1}{3}$, σ 和 $S_0 > 0$ 是常数.

(2) 投资组合在每个有限时间步长 δt 上修正一次.

(3) 交易成本与基础交易的价值成正比, 即若股票以 v_t 进行买卖 ($v_t > 0$ 买进, $v_t < 0$ 卖出), 则在下一买卖时期股票的交易成本为 $\frac{k}{2}|v|S_t$. 其中 k 为常数, 其取值主要依赖个人投资者.

(4) 对冲投资组合的预期收益与期权的收益相等.

(5) 假定投资组合的投资者都是理性的.

3.2 多分形布朗运动下带有交易费用的定价公式

对于多分形布朗运动模型定价公式的推导, 首先要得到其满足的偏微分方程, 然后再对偏微分方程求解便可得其定价公式, 因此, 在风险中性测度下给出其所满足的偏微分方程.

引理 1 在风险中性测度下, 具有交易费用的多分形布朗运动环境下的欧式看涨期权的价格 V_t 在 $t(t \in [0, T])$ 时刻满足如下所示的微分方程:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} - rV = 0, \quad (1)$$

其中,

$$\hat{\sigma}^2 = \sigma^2[(\delta t)^{2H_t-1} + Le(H_t)], Le(H_t) = \frac{k}{\sigma(\delta t)^{1-H_t}} \sqrt{\frac{2}{\pi}}, k \text{ 为常数.}$$

证明详见参考文献^[20].

定理 1 在多分形布朗运动环境下, 执行价格为 K , 到期日为 T 的带有交易费用的欧式看涨期权在 $t \in [0, T]$ 时刻的价格 V_t 为

$$V(S_t, t) = S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2).$$

其中,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\tilde{\sigma}^2}{2}\right)(T-t)}{\tilde{\sigma}\sqrt{T-t}}, d_2 = d_1 - \tilde{\sigma}\sqrt{T-t}, \tilde{\sigma}^2 = \sigma^2[(\delta t)^{2H_t-1} + Le(H_t)].$$

$$Le(H_t) = \frac{k}{\sigma(\delta t)^{1-H_t}} \sqrt{\frac{2}{\pi}}, k \text{ 为常数.}$$

证明 由引理 1 可得欧式看涨期权满足微分方程(1), 即

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + rS_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} - rV = 0 \\ V(S_T, T) = (S_T - K)^+. \end{cases}$$

假设

$$S_t = S = e^x, V(S_t, t) = C(t, x), x = \ln S,$$

则

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial C}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{\partial C}{\partial x} \frac{1}{S}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \frac{1}{S^2} - \frac{\partial C}{\partial x} \frac{1}{S^2} = \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \frac{\partial C}{\partial x} \right) \frac{1}{S^2}, \quad (4)$$

将(2)、(3)、(4)式以及假设条件代入(1)式进行整理:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS \frac{\partial C}{\partial x} \frac{1}{S} + \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} S^2 \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \frac{\partial C}{\partial x} \right) \frac{1}{S^2} - rC = 0,$$

即

$$\frac{\partial C}{\partial t} + r \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \frac{\partial C}{\partial x} \right) - rC = 0, \quad (5)$$

令

$$u(s, z) = C(t, x)e^{r(T-t)}, s = \frac{\tilde{\sigma}^2}{2}(T-t), z = x + r(T-t) - \frac{\tilde{\sigma}^2}{2}(T-t).$$

则

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} &= ure^{-r(T-t)} + e^{-r(T-t)} \left(\frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \right) \\ &= ure^{-r(T-t)} + e^{-r(T-t)} \left(-\frac{\partial u}{\partial s} \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} - r \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ &= e^{-r(T-t)} \left(ur - \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \frac{\partial u}{\partial s} - r \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \frac{\partial u}{\partial z} \right) = e^{-r(T-t)} \left(ur + \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial s} \right) - r \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad (6) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial C}{\partial x} = e^{-r(T-t)} \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = e^{-r(T-t)} \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = e^{-r(T-t)} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (8)$$

将(6)、(7)、(8)代入(5)式得

$$e^{-r(T-t)} \left[\left(ur + \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial s} \right) - r \frac{\partial u}{\partial z} \right) + r \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] - rC = 0,$$

整理得

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial s} \\ u(0, z) = (e^z - K)^+ \end{cases},$$

根据热传导方程理论得

$$u(s, z) = e^{s+z} N \left(\frac{z + 2s - \ln K}{\sqrt{2s}} \right) - KN \left(\frac{2 - \ln K}{\sqrt{2s}} \right),$$

因此

$$C(t, S_t) = e^{-r(T-t)} e^{s+z} N \left(\frac{z + 2s - \ln K}{\sqrt{2s}} \right) - Ke^{-r(T-t)} N \left(\frac{z - \ln K}{\sqrt{2s}} \right),$$

将

$$s = \frac{\tilde{\sigma}^2}{2}(T-t), \quad z = x + r(T-t) - \frac{\tilde{\sigma}^2}{2}(T-t), \quad S_t = S = e^x, \text{代入上式可得}$$

$$\begin{aligned} C(t, S_t) &= e^{-r(T-t)} e^{s+z} N \left(\frac{z+2s-\ln K}{\sqrt{2s}} \right) - Ke^{-r(T-t)} N \left(\frac{z-\ln K}{\sqrt{2s}} \right) = \\ &= e^{-r(T-t)} e^{\frac{\tilde{\sigma}^2}{2}(T-t) + x + r(T-t) - \frac{\tilde{\sigma}^2}{2}(T-t)} N \left(\frac{x+r(T-t) - \frac{\tilde{\sigma}^2}{2}(T-t) + \tilde{\sigma}^2(T-t) - \ln K}{\sqrt{\tilde{\sigma}^2(T-t)}} \right) - \\ &= Ke^{-r(T-t)} N \left(\frac{x+r(T-t) - \frac{\tilde{\sigma}^2}{2}(T-t) - \ln K}{\sqrt{\tilde{\sigma}^2(T-t)}} \right) = e^{-r(T-t)} e^{x+r(T-t)} N \left(\frac{x + \left(r + \frac{\tilde{\sigma}^2}{2}\right)(T-t) - \ln K}{\tilde{\sigma}\sqrt{(T-t)}} \right) - \\ &= Ke^{-r(T-t)} N \left(\frac{x + \left(r + \frac{\tilde{\sigma}^2}{2}\right)(T-t) - \ln K}{\tilde{\sigma}\sqrt{(T-t)}} \right) = e^{\ln S_t} N \left(\frac{\ln \frac{S_t}{K} + \left(r + \frac{\tilde{\sigma}^2}{2}\right)(T-t)}{\tilde{\sigma}\sqrt{(T-t)}} \right) \\ &= Ke^{-r(T-t)} N \left(\frac{\ln \frac{S_t}{K} + \left(r + \frac{\tilde{\sigma}^2}{2}\right)(T-t)}{\tilde{\sigma}\sqrt{(T-t)}} \right), \end{aligned}$$

记

$$d_1 = \frac{\ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + \left(r + \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \right) (T-t)}{\tilde{\sigma}\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \tilde{\sigma}\sqrt{T-t},$$

则上式等价于

$$C(t, S_t) = S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2),$$

即

$$V(S_t, t) = S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2),$$

因此定理得证.

3.3 多分形随机利率环境下的定价公式

假定零息票债券 $P(r_T, T, T) = 1$, 即到期日为 T 时 1 张零息票债券能够换取 1 元现金, 利率 r_t 满足如下多分形 B-S 方程

$$dr(t) = \theta(u - r_t)dt + \sigma_r dB_{H_t}(t), \quad (9)$$

其中, θ 为利率调节速度, u 为均值回复系数, σ_r 为短期利率的波动率, $B_{H_t}(t)$ 为多分形布朗运动.

下面将运用风险对冲策略计算 t 时刻零息票债券 $P(r_T, t, T)$ 的价格.

引理 2 在多分形随机利率环境下, 到期日为 T 的零息票债券在 t 时刻的价格满足如下偏微分方程

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} + \theta(\hat{u} - r_t) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_r^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0 \\ P(r_T, T, T) = 1 \end{cases}$$

证明 假设 $P_1(t, r_t, T_1)$ 是到期日为 T_1 的零息票债券, $P_2(t, r_t, T_2)$ 是到期日为 T_2 的零息票债券, 在 $[t, t + \delta t]$ 内构造由 1 份多头零息票债券 P_1 和 Δ 份空头零息票债券 P_2 构成的投资组合 Π , 即

$$\Pi_t = P_1 - \Delta P_2,$$

用 $It\hat{o}$ 公式对 $P_1(r_t, t, T_1)$ 和 $P_2(r_t, t, T_2)$ 进行展开可得

$$\delta P_1 = \frac{\partial P_1}{\partial t} (\delta t) + \frac{\partial P_1}{\partial r} (\delta r) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} (\delta t)^2 + \frac{\partial^2 P_1}{\partial r \partial t} (\delta r)(\delta t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_1}{\partial r^2} (\delta r)^2, \quad (10)$$

$$\delta P_2 = \frac{\partial P_2}{\partial t} (\delta t) + \frac{\partial P_2}{\partial r} (\delta r) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_2}{\partial t^2} (\delta t)^2 + \frac{\partial^2 P_2}{\partial r \partial t} (\delta r)(\delta t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_2}{\partial r^2} (\delta r)^2, \quad (11)$$

则

$$E(\delta \Pi_t) = E(\delta P_1 - \Delta \delta P_2),$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial P_1}{\partial t} E(\delta t) + \frac{\partial P_1}{\partial r} E(\delta r) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} E(\delta t)^2 + \frac{\partial^2 P_1}{\partial r \partial t} E((\delta r)(\delta t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_1}{\partial r^2} E(\delta r)^2 \\
&\quad - \Delta \left(\frac{\partial P_2}{\partial t} E(\delta t) + \frac{\partial P_2}{\partial r} E(\delta r) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_2}{\partial t^2} E(\delta t)^2 + \frac{\partial^2 P_2}{\partial r \partial t} E((\delta r)(\delta t)) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_2}{\partial r^2} E(\delta r)^2 \right),
\end{aligned}$$

又因为

$$E(\delta t)^2 = o(\delta t),$$

$$E((\delta r)(\delta t)) = o(\delta t),$$

$$E(\delta r)^2 = E(\theta(u - r_t)\delta t + \sigma_r \delta B_{H_t}(t)) = \sigma_r^2 (\delta t)^{2H_t},$$

即

$$\begin{aligned}
E(\delta \Pi_t) &= \frac{\partial P_1}{\partial t} (\delta t) + \frac{\partial P_1}{\partial r} (\delta r) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_1}{\partial r^2} \sigma_r^2 (\delta t)^{2H_t} \\
&\quad - \Delta \left(\frac{\partial P_2}{\partial t} (\delta t) + \frac{\partial P_2}{\partial r} (\delta r) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_2}{\partial r^2} \sigma_r^2 (\delta t)^{2H_t} \right),
\end{aligned}$$

令

$$\Delta = \frac{\partial P_1 / \partial r}{\partial P_2 / \partial r},$$

则

$$E(\delta \Pi_t) = \left(\frac{\partial P_1}{\partial t} - \frac{\partial P_1 / \partial r}{\partial P_2 / \partial r} \frac{\partial P_2}{\partial t} \right) (\delta t) + \frac{1}{2} \sigma_r^2 \left(\frac{\partial^2 P_1}{\partial r^2} - \frac{\partial P_1 / \partial r}{\partial P_2 / \partial r} \frac{\partial^2 P_2}{\partial r^2} \right) (\delta t)^{2H_t},$$

又因为

$$E(\delta \Pi_t) = r(t) \Pi_t \delta t,$$

则

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial P_1}{\partial t} - \frac{\partial P_1 / \partial r}{\partial P_2 / \partial r} \frac{\partial P_2}{\partial t} \right) (\delta t) + \frac{1}{2} \sigma_r^2 \left(\frac{\partial^2 P_1}{\partial r^2} - \frac{\partial P_1 / \partial r}{\partial P_2 / \partial r} \frac{\partial^2 P_2}{\partial r^2} \right) (\delta t)^{2H_t} \\
&= r \left(P_1 - \frac{\partial P_1 / \partial r}{\partial P_2 / \partial r} P_2 \right) (\delta t),
\end{aligned}$$

整理得

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial P_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_r^2 (\delta t)^{2H_t-1} \frac{\partial^2 P_1}{\partial r^2} - rP_1 \right) / \frac{\partial P_1}{\partial r} \\ & = \left(\frac{\partial P_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_r^2 (\delta t)^{2H_t-1} \frac{\partial^2 P_2}{\partial r^2} - rP_2 \right) / \frac{\partial P_2}{\partial r}, \end{aligned}$$

令

$$\tilde{\sigma}_r^2(t) = \sigma_r^2 (\delta t)^{2H_t-1}, \lambda = \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \tilde{\sigma}_r^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP \right) / \frac{\partial P}{\partial r} = -\theta(\hat{u} - r),$$

又因为

$$\hat{u} = u - \frac{\lambda}{\theta} \sigma_r,$$

因此

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_r^2(t) \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \theta(\hat{u} - r) \frac{\partial P}{\partial r} - rP = 0.$$

从而零息票债券 $P(r, t, T)$ 满足如下偏微分方程

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} + \theta(\hat{u} - r) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_r^2(t) \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0, \\ P(r_T, T, T) = 1 \end{cases} \quad (12)$$

引理得证.

求解引理 2 给出的偏微分方程可得零息票债券的定价公式.

定理 2 多分形随机利率环境下, 到期日为 T 的零息票债券 $P(r, t, T)$ 在 $t \in [0, T]$ 时的价格为

$$P(r, t, T) = e^{f_1(\tau) - r f_2(\tau)},$$

其中,

$$f_1(\tau) = \hat{u}(T - t) + \hat{u} f_2(\tau) - \frac{1}{2} \int_t^T \tilde{\sigma}_r^2(s) f_2^2(\tau) ds, \quad f_2(\tau) = \frac{1 - e^{\theta(T-t)}}{\theta}.$$

证明 令 $\tau = T - t$, 由零息票债券所满足的偏微分方程 (12) 可知, 零息票债券的价格满足如下形式的解,

$$P(r, t, T) = e^{f_1(\tau) - r f_2(\tau)} = e^{f_1(T-t) - r f_2(T-t)},$$

则可得

$$\frac{\partial P}{\partial t} = P \left(-\frac{\partial f_1(\tau)}{\partial t} + r \frac{\partial f_2(\tau)}{\partial t} \right), \quad (13)$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -P f_2(\tau), \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = P f_2^2(\tau), \quad (15)$$

将 (13) (14) (15) 式代入 (12) 式

$$P \left(-\frac{\partial f_1(\tau)}{\partial t} + r \frac{\partial f_2(\tau)}{\partial t} \right) + \theta(\hat{u} - r)(-P f_2(\tau)) + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_r^2(t) P f_2^2(\tau) - rP = 0,$$

整理得

$$P \left(-\frac{\partial f_1(\tau)}{\partial t} + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_r^2(t) f_2^2(\tau) - \theta \hat{u} f_2(\tau) + r \left(\theta f_2(\tau) - 1 + \frac{\partial f_2(\tau)}{\partial t} \right) \right) = 0,$$

即

$$\begin{cases} \frac{\partial f_2(\tau)}{\partial t} + \theta f_2(\tau) - 1 = 0 \\ -\frac{\partial f_1(\tau)}{\partial t} + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_r^2(t) f_2^2(\tau) - \theta \hat{u} f_2(\tau) \end{cases},$$

解以上方程可得

$$\begin{cases} f_1(\tau) = \hat{u}(T - t) + \hat{u} f_2(\tau) - \frac{1}{2} \int_t^T \tilde{\sigma}_r^2(s) f_2^2(\tau) ds \\ f_2(\tau) = \frac{1 - e^{\theta(T-t)}}{\theta} \end{cases},$$

定理得证.

在对利率载体零息票债券的定价研究的基础上, 进一步给出多分形随机利率模型满足的偏微分方程.

引理 3 在风险中性测度下, 多分形随机利率模型下的欧式看涨期权的价格 $C_t = C(S_t, r_t, t)$ 在 $t(t \in [0, T])$ 时刻所满足的微分方程如下

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_s^2(t) S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} + \rho \tilde{\sigma}_s(t) \tilde{\sigma}_r(t) S_t \frac{\partial^2 C}{\partial S_t \partial r} + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_r^2(t) \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \theta(\hat{u} - r) \frac{\partial C}{\partial r} + r S_t \frac{\partial C}{\partial S_t} \\ - rC = 0, \end{aligned}$$

其中, σ_s 为股票价格的波动率, σ_r 为随机利率的波动率, ρ 为两个多分形布朗运动的相关系数, θ 为利率调节速度且 $\sigma_s, \sigma_r, \rho, \theta$ 均为常数, \hat{u} 的表达式如引理 2 所示.

证明 考虑由 Δ_{1t} 份股票, Δ_{2t} 份零息债券和 1 份期权构成的投资组合, 则在 t 时刻该投资组合的价格为

$$\Pi_t = C_t - \Delta_{1t} S_t - \Delta_{2t} P_t,$$

则其在 $[t, t + \delta t]$ 内的变化值为

$$\delta\Pi_t = \delta C - \Delta_{1t}\delta S_t - \Delta_{2t}\delta P_t, \quad (16)$$

利用 Vick-Itô 积分对期权价值展开得

$$\delta C = \frac{\partial C}{\partial t}\delta t + \frac{\partial C}{\partial S_t}\delta S_t + \frac{\partial C}{\partial r}\delta r + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2}(\delta S_t)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial r^2}(\delta r)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial r\partial S_t}(\delta r)(\delta S_t),$$

又零息票债券满足如(12)式所示的偏微分方程, 将上式及(12)代入(16)得

$$\begin{aligned} \delta\Pi_t = & \frac{\partial C}{\partial t}\delta t + \frac{\partial C}{\partial S_t}\delta S_t + \frac{\partial C}{\partial r}\delta r + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2}(\delta S_t)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial r^2}(\delta r)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial r\partial S_t}(\delta r)(\delta S_t) \\ & - \Delta_{1t}\delta S_t - \Delta_{2t}\left(\frac{\partial P}{\partial t}\delta t + \frac{\partial P}{\partial r}\delta r + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}(\delta r)^2\right), \end{aligned}$$

同引理 2 的证明得

$$\begin{aligned} \delta\Pi_t = & \frac{\partial C}{\partial t}\delta t + \frac{\partial C}{\partial S_t}\delta S_t + \frac{\partial C}{\partial r}\delta r + \frac{1}{2}\sigma_s^2 S_t^2 (\delta t)^{2H_t} \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} + \frac{1}{2}\sigma_r^2 (\delta t)^{2H_t} \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} \\ & + \frac{1}{2}\rho\sigma_s\sigma_r (\delta t)^{2H_t} \frac{\partial^2 C}{\partial r\partial S_t} - \Delta_{1t}\delta S_t \\ & - \Delta_{2t}\left(\frac{\partial P}{\partial t}\delta t + \frac{\partial P}{\partial r}\delta r + \frac{1}{2}\sigma_r^2 (\delta t)^{2H_t} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\right), \end{aligned}$$

整理得

$$\begin{aligned} \delta\Pi_t = & \frac{\partial C}{\partial t}\delta t + \frac{1}{2}\left(\sigma_s^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} + \sigma_r^2 \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \rho\sigma_s\sigma_r \frac{\partial^2 C}{\partial r\partial S_t}\right)(\delta t)^{2H_t} + \left(\frac{\partial C}{\partial S_t} - \Delta_{1t}\right)\delta S_t \\ & + \left(\frac{\partial C}{\partial r} - \Delta_{2t}\frac{\partial P}{\partial r}\right)\delta r - \Delta_{2t}\left(\frac{\partial P}{\partial t}\delta t + \frac{1}{2}\sigma_r^2 (\delta t)^{2H_t} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\right), \quad (17) \end{aligned}$$

又因为 $P = P(r_t, t, T)$ 满足(12)式, 则

$$-\Delta_{2t}\left(\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_r^2 (\delta t)^{2H_t-1} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\right)\delta t = -\Delta_{2t}\left(rP - \theta(\hat{u} - r)\frac{\partial P}{\partial r}\right)\delta t,$$

根据无风险策略可知 $\delta\Pi_t = r\Pi_t\delta t$, 为了消除风险令 $\Delta_{1t} = \frac{\partial C}{\partial S_t}$, $\Delta_{2t} = \frac{\partial C}{\partial r} / \frac{\partial P}{\partial r}$, 代入

(17)得

$$\begin{aligned} & \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\sigma_s^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} + \sigma_r^2 \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \rho\sigma_s\sigma_r \frac{\partial^2 C}{\partial r\partial S_t}\right)(\delta t)^{2H_t-1} \\ & - \frac{\partial C}{\partial r} / \frac{\partial P}{\partial r}\left(rP - \theta(\hat{u} - r)\frac{\partial P}{\partial r}\right) = r\left(C_t - \frac{\partial C}{\partial S_t}S_t - \frac{\partial C}{\partial r} / \frac{\partial P}{\partial r}P_t\right), \end{aligned}$$

整理得

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_s^2(t) S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} + \frac{1}{2} \rho \tilde{\sigma}_s(t) \tilde{\sigma}_r(t) S_t \frac{\partial^2 C}{\partial S_t \partial r} + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_r^2(t) \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} \\ + \theta(\hat{u} - r) \frac{\partial C}{\partial r} + r S_t \frac{\partial C}{\partial S_t} - rC = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

其中,

$$\tilde{\sigma}_s^2(t) = \sigma_s^2(\delta t)^{2H_t-1}, \tilde{\sigma}_r^2(t) = \sigma_r^2(\delta t)^{2H_t-1},$$

引理得证.

引理 3 给出了多分形随机利率模型下的欧式看涨期权的价格所满足的偏微分方程, 求解该偏微分方程可得相应的欧式期权定价公式.

定理 3 多分形随机利率模型下, 到期日为 T , 执行价格为 K 的欧式看涨期权在 $t(t \in [0, T])$ 时刻的价格 $C_t = C(S_t, r_t, t)$, 满足如下方程

$$C(S_t, r_t, t) = S_t N(d_1) - KP(r_t, t, T) N(d_2),$$

其中,

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + \frac{1}{2} \int_t^T \hat{\sigma}^2(s) ds - \ln P}{\sqrt{\int_t^T \hat{\sigma}^2(s) ds}}, \quad d_2 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} - \frac{1}{2} \int_t^T \hat{\sigma}^2(s) ds - \ln P}{\sqrt{\int_t^T \hat{\sigma}^2(s) ds}},$$

$$\hat{\sigma}^2(t) = \tilde{\sigma}_s^2(t) + \tilde{\sigma}_r^2(t) f_2^2(\tau) + \rho \tilde{\sigma}_s(t) \tilde{\sigma}_r(t) f_2(\tau), \quad f_2(\tau) = \frac{1 - e^{\theta(T-t)}}{\theta}.$$

证明 将(18)式转化为 *Cauchy* 问题讨论

令

$$x = \frac{S_t}{P(r, t, T)}, V(x, t) = \frac{C(S_t, r, t)}{P(r, t, T)},$$

则

$$\frac{\partial C}{\partial t} = V \frac{\partial P}{\partial t} + P \frac{\partial V}{\partial t} - x \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial t},$$

$$\frac{\partial C}{\partial r} = V \frac{\partial P}{\partial r} - x \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial r},$$

$$\frac{\partial C}{\partial S_t} = \frac{\partial V}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} = \frac{1}{P} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} = V \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - x \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + x^2 \frac{1}{P} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial r \partial S_t} = -x \frac{1}{P} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \frac{\partial P}{\partial r},$$

将上式代入(18)式得

$$\begin{aligned} V \frac{\partial P}{\partial t} + P \frac{\partial V}{\partial t} - x \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_s^2(t) S_t^2 \frac{1}{P} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{1}{2} x \rho \tilde{\sigma}_s(t) \tilde{\sigma}_r(t) S_t \frac{1}{P} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \frac{\partial P}{\partial r} \\ + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_r^2(t) \left(V \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - x \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + x^2 \frac{1}{P} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right)^2 \right) \\ + \theta(\hat{u} - r) \left(V \frac{\partial P}{\partial r} - x \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial r} \right) + r S_t \frac{\partial V}{\partial x} - r V P = 0, \end{aligned}$$

化简得

$$\begin{aligned} V \frac{\partial P}{\partial t} + P \frac{\partial V}{\partial t} - x \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_s^2(t) S_t^2 \frac{1}{P} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{1}{2} x \rho \tilde{\sigma}_s(t) \tilde{\sigma}_r(t) S_t \frac{1}{P} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \frac{\partial P}{\partial r} \\ + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_r^2(t) V \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_r^2(t) x \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_r^2(t) x^2 \frac{1}{P} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right)^2 \\ + \theta(\hat{u} - r) V \frac{\partial P}{\partial r} - \theta(\hat{u} - r) x \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial r} + r P x \frac{\partial V}{\partial x} - r V P = 0, \end{aligned}$$

整理得

$$\begin{aligned} P \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2P} x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \left(\tilde{\sigma}_s^2(t) P^2 - P \rho \tilde{\sigma}_s(t) \tilde{\sigma}_r(t) \frac{\partial P}{\partial r} + \tilde{\sigma}_r^2(t) \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right)^2 \right) \\ + \left(V - x \frac{\partial V}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \theta(\hat{u} - r) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_r^2(t) \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - r P \right) = 0. \end{aligned}$$

根据(12)式可知

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \theta(\hat{u} - r) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_r^2(t) \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - r P = 0,$$

从而

$$P \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2P} x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \left(\tilde{\sigma}_s^2(t) P^2 - P \rho \tilde{\sigma}_s(t) \tilde{\sigma}_r(t) \frac{\partial P}{\partial r} + \tilde{\sigma}_r^2(t) \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right)^2 \right) = 0,$$

由引理 2 可知 $\frac{\partial P}{\partial r} = -P f_2(\tau)$, 且

$$f_2(\tau) = \frac{1 - e^{\theta(\tau-t)}}{\theta},$$

则上式可化简为

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \left(\tilde{\sigma}_s^2(t) + \tilde{\sigma}_r^2(t) f_2^2(\tau) + \rho \tilde{\sigma}_s(t) \tilde{\sigma}_r(t) f_2(\tau) \right) = 0. \quad (19)$$

记

$$\hat{\sigma}^2(t) = \tilde{\sigma}_s^2(t) + \tilde{\sigma}_r^2(t) f_2^2(\tau) + \rho \tilde{\sigma}_s(t) \tilde{\sigma}_r(t) f_2(\tau),$$

令

$$y = \ln x$$

则

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{\partial V}{x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \frac{1}{x^2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial V}{\partial y} \right), \end{aligned}$$

则(19)式变为如下形式

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2(t) \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial V}{\partial y} \right) = 0, \quad (20)$$

再令

$$V = u(\eta, \gamma), \eta = y + \alpha(t), \gamma = \beta(t).$$

其中,

$$\alpha(T) = 0, \beta(T) = 0.$$

则

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \alpha'(t) + \frac{\partial u}{\partial \gamma} \beta'(t), \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

将其代入(20)化简得

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} \alpha'(t) + \frac{\partial u}{\partial \gamma} \beta'(t) + \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2(t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0,$$

即

$$\left(\alpha'(t) - \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2(t) \right) \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \gamma} \beta'(t) + \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2(t) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0. \quad (21)$$

为消除风险令

$$\begin{cases} \alpha'(t) = \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2(t) \\ \beta'(t) = -\frac{1}{2} \hat{\sigma}^2(t) \end{cases},$$

对上式两边积分可得

$$\begin{cases} \alpha(t) = -\frac{1}{2} \int_t^T \hat{\sigma}^2(s) ds \\ \beta(t) = \frac{1}{2} \int_t^T \hat{\sigma}^2(s) ds \end{cases},$$

代入(21)整理得

$$-\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2(t)\frac{\partial u}{\partial \gamma} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2(t)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0,$$

解得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \frac{\partial u}{\partial \gamma'}$$

边界条件为

$$u(\eta, 0) = (e^\eta - K)^+,$$

则根据热传导方程理论得

$$u(\eta, \gamma) = e^{\eta+\gamma}N\left(\frac{y+2\gamma-\ln K}{\sqrt{2\gamma}}\right) - KN\left(\frac{\gamma-\ln K}{\sqrt{2\gamma}}\right),$$

因此

$$\begin{aligned} V &= e^{\eta+\gamma}N\left(\frac{y+2\gamma-\ln K}{\sqrt{2\gamma}}\right) - KN\left(\frac{\gamma-\ln K}{\sqrt{2\gamma}}\right) \\ &= e^y N\left(\frac{y+\frac{1}{2}\int_t^T \hat{\sigma}^2(s)ds - \ln K}{\sqrt{\int_t^T \hat{\sigma}^2(s)ds}}\right) - KN\left(\frac{y-\frac{1}{2}\int_t^T \hat{\sigma}^2(s)ds - \ln K}{\sqrt{\int_t^T \hat{\sigma}^2(s)ds}}\right) \\ &= yN(\hat{d}_1) - KN(\hat{d}_2). \end{aligned} \quad (22)$$

其中,

$$\hat{d}_1 = \frac{y + \frac{1}{2}\int_t^T \hat{\sigma}^2(s)ds - \ln K}{\sqrt{\int_t^T \hat{\sigma}^2(s)ds}}, \quad \hat{d}_2 = \frac{y - \frac{1}{2}\int_t^T \hat{\sigma}^2(s)ds - \ln K}{\sqrt{\int_t^T \hat{\sigma}^2(s)ds}},$$

再将

$$x = \frac{S_t}{P(r, t, T)}, V(x, t) = \frac{C(S_t, r, t)}{P(r, t, T)}$$

代入(22)式得

$$C(S_t, r_t, t) = S_t N(d_1) - KP(r_t, t, T)N(d_2),$$

其中,

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + \frac{1}{2}\int_t^T \hat{\sigma}^2(s)ds - \ln P}{\sqrt{\int_t^T \hat{\sigma}^2(s)ds}}, \quad d_2 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} - \frac{1}{2}\int_t^T \hat{\sigma}^2(s)ds - \ln P}{\sqrt{\int_t^T \hat{\sigma}^2(s)ds}}$$

$$\hat{\sigma}^2(t) = \tilde{\sigma}_s^2(t) + \tilde{\sigma}_r^2(t)f_2^2(\tau) + \rho\tilde{\sigma}_s(t)\tilde{\sigma}_r(t)f_2(\tau), \quad f_2(\tau) = \frac{1 - e^{\theta(T-t)}}{\theta}.$$

从而定理得证.

3.4 多分形随机利率下具有交易费用的定价公式

根据对随机利率模型以及交易费用对期权定价模型影响的研究, 现在在随机利率模型下考虑交易费用对定价模型的影响, 首先给出带有交易费用的随机利率模型下欧式期权价格所满足的偏微分方程, 然后在通过求解此方程得到该模型下的欧式期权定价公式.

引理 4 多分形随机利率模型下带有交易费用的欧式看涨期权的价格 $C_t = C(S_t, r_t, t)$ 在 $t(t \in [0, T])$ 时刻所满足的微分方程如下

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_s \sigma_r \rho S_t \frac{\partial^2 C}{\partial S_t \partial r} (\delta t)^{2H_t-1} + \frac{1}{2} \sigma_r^2 \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} (\delta t)^{2H_t-1} + \theta(u-r) \frac{\partial C}{\partial r} + r S_t \frac{\partial C}{\partial S_t} \\ \quad - \frac{1}{2} \hat{\sigma}_s^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} - rC = 0 \\ C(S_T, r_T, T) = (S_T - K)^+ \end{cases},$$

其中,

σ_s, σ_r, ρ 均为常数, $\hat{\sigma}_s^2 = \sigma_s^2((\delta t)^{2H_t-1} + Le(H_t) \text{sign}(\tau))$, $Le(H_t) = \frac{k}{\sigma_s(\delta t)^{1-H_t}} \sqrt{\frac{2}{\pi}}$, ρ 为两个多分形布朗运动的相关系数.

证明 假设由 1 份期权, Δ_{1t} 份股票和 Δ_{2t} 份零息票债券构成投资组合, 在 t 时刻投资组合的价格为

$$\Pi_t = C_t - \Delta_{1t} S_t - \Delta_{2t} P_t,$$

在 $[t, t + \delta t]$ 内投资组合的变化价格为

$$\delta \Pi_t = \delta C_t - \Delta_{1t} \delta S_t - \Delta_{2t} \delta P_t - \frac{k}{2} |\delta \Delta_{1t}| S_t,$$

根据 Vick-Itô 公式对其右边部分进行展开

$$\begin{aligned} \delta C_t(t, r_t, S_t) &= \frac{\partial C}{\partial t} (\delta t) + \frac{\partial C}{\partial S_t} (\delta S_t) + \frac{\partial C}{\partial r} (\delta r) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} (\delta S_t)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} (\delta t)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S_t \partial t} (\delta t) (\delta S_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} (\delta r)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S_t \partial r} (\delta r) (\delta S_t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial t \partial r} (\delta r) (\delta t), \\ \delta P_t &= \frac{\partial P}{\partial t} (\delta t) + \frac{\partial P}{\partial r} (\delta r) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} (\delta t)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} (\delta r)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial t} (\delta r) (\delta t), \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}
\delta\Pi_t = & \frac{\partial C}{\partial t}(\delta t) + \frac{\partial C}{\partial S_t}(\delta S_t) + \frac{\partial C}{\partial r}(\delta r) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2}(\delta S_t)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial t^2}(\delta t)^2 \\
& + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S_t \partial t}(\delta t)(\delta S_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial r^2}(\delta r)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S_t \partial r}(\delta r)(\delta S_t) \\
& + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial t \partial r}(\delta r)(\delta t) - \Delta_{1t}(\delta S_t) \\
& - \Delta_{2t}\left(\frac{\partial P}{\partial t}(\delta t) + \frac{\partial P}{\partial r}(\delta r) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}(\delta t)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}(\delta r)^2\right. \\
& \left. + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r \partial t}(\delta r)(\delta t)\right) - \frac{k}{2}|\delta\Delta_{1t}|S_t,
\end{aligned}$$

根据无风险对冲策略可知

$$E(\delta\Pi_t) = r_t\Pi_t\delta t, \quad (23)$$

故

$$\begin{aligned}
E(\delta\Pi_t) = & \frac{\partial C}{\partial t}(\delta t) + \frac{\partial C}{\partial S_t}(\delta S_t) + \frac{\partial C}{\partial r}(\delta r) + \frac{1}{2}\sigma_s^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2}(\delta t)^{2H_t} \\
& + \frac{1}{2}\sigma_r\sigma_s\rho S_t \frac{\partial^2 C}{\partial S_t \partial r}(\delta t)^{2H_t} + \frac{1}{2}\sigma_r^2 \frac{\partial^2 C}{\partial r^2}(\delta t)^{2H_t} - \Delta_{1t}(\delta S_t) \\
& - \Delta_{2t}\left(\frac{\partial P}{\partial t}(\delta t) + \frac{\partial P}{\partial r}(\delta r) + \frac{1}{2}\sigma_r^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2}(\delta t)^{2H_t}\right) - \frac{k}{2}|\delta\Delta_{1t}|S_t \\
= & \frac{\partial C}{\partial t}(\delta t) + \frac{1}{2}\left(\sigma_s^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} + \sigma_r\sigma_s\rho S_t \frac{\partial^2 C}{\partial S_t \partial r} + \sigma_r^2 \frac{\partial^2 C}{\partial r^2}\right)(\delta t)^{2H_t} \\
& + \left(\frac{\partial C}{\partial S_t} - \Delta_{1t}\right)(\delta S_t) + \left(\frac{\partial C}{\partial r} - \Delta_{2t}\frac{\partial P}{\partial r}\right)(\delta r) \\
& - \Delta_{2t}\left(\frac{\partial P}{\partial t}(\delta t) + \frac{1}{2}\sigma_r^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2}(\delta t)^{2H_t}\right) - \frac{k}{2}|\delta\Delta_{1t}|S_t = r_t\Pi_t\delta t, \quad (24)
\end{aligned}$$

又因为零息债券满足利率方程, 即

$$-\Delta_{2t}\left(\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_r^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2}(\delta t)^{2H_t-1}\right)(\delta t) = -\Delta_{2t}\left(rP - \theta(u - r_t)\frac{\partial P}{\partial r}\right)(\delta t),$$

由参考文献^[20]得

$$E(\delta\Delta_{1t}) = \sigma_s S_t \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left| \frac{\partial C}{\partial S_t} \right|,$$

令

$$\Delta_{1t} = \frac{\partial C}{\partial S_t}, \Delta_{2t} = \frac{\partial C}{\partial r} / \frac{\partial P}{\partial r}.$$

则(24)式变为

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t}(\delta t) + \frac{1}{2} \left(\sigma_s^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} + \sigma_r \sigma_s \rho S_t \frac{\partial^2 C}{\partial S_t \partial r} + \sigma_r^2 \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} \right) (\delta t)^{2H_t} \\ - \frac{\partial C}{\partial r} / \frac{\partial P}{\partial r} \left(rP - \theta(u-r) \frac{\partial P}{\partial r} \right) (\delta t) - \frac{\sigma_s k}{2} S_t^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left| \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \right| (\delta t)^{H_t} \\ = r \left(C - S_t \frac{\partial C}{\partial S_t} - \left(\frac{\partial C}{\partial r} / \frac{\partial P}{\partial r} \right) P \right) (\delta t), \end{aligned}$$

整理得

$$\begin{aligned} rC = \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_s^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} (\delta t)^{2H_t-1} + \frac{1}{2} \sigma_r \sigma_s \rho S_t \frac{\partial^2 C}{\partial S_t \partial r} (\delta t)^{2H_t-1} + \frac{1}{2} \sigma_r^2 \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} (\delta t)^{2H_t-1} + \\ \theta(u-r) \frac{\partial C}{\partial r} + rS_t \frac{\partial C}{\partial S_t} - \frac{\sigma_s k}{2} S_t^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left| \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \right| (\delta t)^{H_t-1}, \end{aligned} \quad (25)$$

由引理 1 可得

$$\hat{\sigma}_s^2 = \sigma_s^2 \left((\delta t)^{2H_t-1} + Le(H_t) \text{sign}(\tau) \right), Le(H_t) = \frac{k}{\sigma_s (\delta t)^{1-H_t}} \sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

则化简(25)式

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_s \sigma_r \rho S_t \frac{\partial^2 C}{\partial S_t \partial r} (\delta t)^{2H_t-1} + \frac{1}{2} \sigma_r^2 \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} (\delta t)^{2H_t-1} + \theta(u-r) \frac{\partial C}{\partial r} + rS_t \frac{\partial C}{\partial S_t} \\ + \frac{1}{2} \hat{\sigma}_s^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} - rC = 0, \end{aligned} \quad (26)$$

引理得证.

根据引理 4 给出的多分形随机利率模型下带有交易费用的欧式看涨期权的价格所满足的偏微分方程, 可推理得出该模型下的欧式期权定价公式.

定理 4 多分形随机利率模型下, 到期日为 T , 执行价格为 K 的带有交易费用的欧式看涨期权在 $t (t \in [0, T])$ 时刻的价格 $C_t = C(S_t, r_t, t)$ 满足如下方程

$$C(S_t, r_t, t) = S_t N(d_1) - KP(r_t, t, T) N(d_2),$$

其中,

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + \frac{1}{2} \int_t^T \sigma^2(s) ds - \ln P}{\sqrt{\int_t^T \sigma^2(s) ds}}, \quad d_2 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} - \frac{1}{2} \int_t^T \sigma^2(s) ds - \ln P}{\sqrt{\int_t^T \sigma^2(s) ds}},$$

$$\begin{aligned}\sigma^2(t) &= \hat{\sigma}_s^2(t) + \tilde{\sigma}_r^2(t)f_2^2(\tau) + \rho\tilde{\sigma}_s(t)\tilde{\sigma}_r(t)f_2(\tau), & f_2(\tau) &= \frac{1 - e^{\theta(T-t)}}{\theta}, \\ \hat{\sigma}_s^2 &= \sigma_s^2((\delta t)^{2H_t-1} + Le(H_t)\text{sign}(\Gamma)), & \tilde{\sigma}_r^2(t) &= \sigma_r^2(\delta t)^{2H_t-1}, \\ \tilde{\sigma}_s^2(t) &= \sigma_s^2(\delta t)^{2H_t-1}.\end{aligned}$$

证明 根据定理 3 的证明可知, 偏微分方程(26)可化简整理为如下形式

$$\begin{aligned}P \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2P} x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \left(\hat{\sigma}_s^2 P^2 - \sigma_s \sigma_r \rho P \frac{\partial P}{\partial r} (\delta t)^{2H_t-1} + \sigma_r^2 \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right)^2 (\delta t)^{2H_t-1} \right) \\ + \left(V - x \frac{\partial V}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \theta(u-r) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma_r^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} (\delta t)^{2H_t-1} - rP \right) = 0,\end{aligned}\quad (27)$$

因为

$$\tilde{\sigma}_r^2(t) = \sigma_r^2(\delta t)^{2H_t-1}, \quad \tilde{\sigma}_s^2(t) = \sigma_s^2(\delta t)^{2H_t-1},$$

则(27)式化简为

$$\begin{aligned}P \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2P} x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \left(\hat{\sigma}_s^2 P^2 - \tilde{\sigma}_s \tilde{\sigma}_r \rho P \frac{\partial P}{\partial r} + \tilde{\sigma}_r^2 \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right)^2 \right) \\ + \left(V - x \frac{\partial V}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \theta(u-r) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_r^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP \right) = 0,\end{aligned}$$

根据(12)式可知

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \theta(u-r) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_r^2(t) \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0.$$

从而

$$P \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2P} x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \left(\hat{\sigma}_s^2 P^2 - P \rho \tilde{\sigma}_s(t) \tilde{\sigma}_r(t) \frac{\partial P}{\partial r} + \tilde{\sigma}_r^2(t) \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right)^2 \right) = 0, \quad (28)$$

由引理 2 可知

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -P f_2(\tau),$$

且

$$f_2(\tau) = \frac{1 - e^{\theta(T-t)}}{\theta},$$

则(28)式可化简为

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \left(\hat{\sigma}_s^2 + \tilde{\sigma}_r^2(t) f_2^2(\tau) + \rho \tilde{\sigma}_s(t) \tilde{\sigma}_r(t) f_2(\tau) \right) = 0, \quad (29)$$

记

$$\sigma^2(t) = \hat{\sigma}_s^2(t) + \tilde{\sigma}_r^2(t)f_2^2(\tau) + \rho\tilde{\sigma}_s(t)\tilde{\sigma}_r(t)f_2(\tau),$$

同定理 3 的证明过程, (29)式可整理为

$$-\frac{1}{2}\sigma^2(t)\frac{\partial u}{\partial \gamma} + \frac{1}{2}\sigma^2(t)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0,$$

解得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \frac{\partial u}{\partial \gamma},$$

边界条件为

$$u(\eta, 0) = (e^\eta - K)^+,$$

同样根据热传导方程理论得

$$u(\eta, \gamma) = e^{\eta+\gamma}N\left(\frac{y + 2\gamma - \ln K}{\sqrt{2\gamma}}\right) - KN\left(\frac{\gamma - \ln K}{\sqrt{2\gamma}}\right),$$

从而

$$\begin{aligned} V &= e^{\eta+\gamma}N\left(\frac{y + 2\gamma - \ln K}{\sqrt{2\gamma}}\right) - KN\left(\frac{\gamma - \ln K}{\sqrt{2\gamma}}\right) \\ &= e^y N\left(\frac{y + \frac{1}{2}\int_t^T \sigma^2(s)ds - \ln K}{\sqrt{\int_t^T \sigma^2(s)ds}}\right) - KN\left(\frac{y - \frac{1}{2}\int_t^T \sigma^2(s)ds - \ln K}{\sqrt{\int_t^T \sigma^2(s)ds}}\right) \\ &= xN(\hat{d}_1) - KN(\hat{d}_2), \end{aligned} \quad (30)$$

其中,

$$\hat{d}_1 = \frac{y + \frac{1}{2}\int_t^T \sigma^2(s)ds - \ln K}{\sqrt{\int_t^T \sigma^2(s)ds}}, \quad \hat{d}_2 = \frac{y - \frac{1}{2}\int_t^T \sigma^2(s)ds - \ln K}{\sqrt{\int_t^T \sigma^2(s)ds}}.$$

再将所令方程代入(30)式解得

$$C(S_t, r_t, t) = S_t N(d_1) - KP(r_t, t, T)N(d_2),$$

其中,

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + \frac{1}{2}\int_t^T \sigma^2(s)ds - \ln P}{\sqrt{\int_t^T \sigma^2(s)ds}}, \quad d_2 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} - \frac{1}{2}\int_t^T \sigma^2(s)ds - \ln P}{\sqrt{\int_t^T \sigma^2(s)ds}},$$

$$\sigma^2(t) = \hat{\sigma}_s^2(t) + \tilde{\sigma}_r^2(t)f_2^2(\tau) + \rho\tilde{\sigma}_s(t)\tilde{\sigma}_r(t)f_2(\tau), \quad f_2(\tau) = \frac{1 - e^{\theta(T-t)}}{\theta},$$

$$\hat{\sigma}_s^2 = \sigma_s^2((\delta t)^{2H_t-1} + Le(H_t)sign(\Gamma)), \quad \tilde{\sigma}_r^2(t) = \sigma_r^2(\delta t)^{2H_t-1},$$

$$\tilde{\sigma}_s^2(t) = \sigma_s^2(\delta t)^{2H_t-1}.$$

定理得证.

4 模拟分析

为了说明运用新模型刻画期权标的价格变化的有效性以及新模型下定价结果的可靠性,选取期权标的上证 50ETF 和 50ETF 期权在 2017 年 5 月 2 号到 2018 年 6 月 29 日的日收盘价格进行模拟分析(数据为 Wind 数据库数据).

4.1 数据的统计特征

首先,对所选数据的对数收益率的正态性进行检验,详细结果如下图所示.

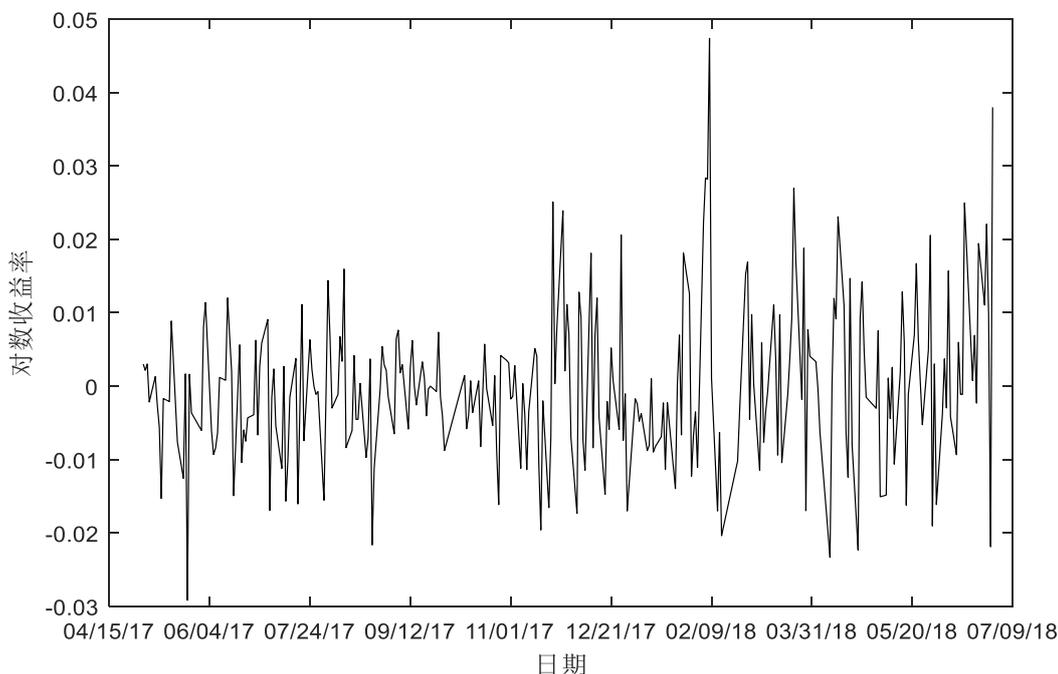


图 1 标的资产对数收益率

如上图 1 所示,期权标的对数收益率在零左右波动,并且从上图可以看出取值较大的点附近更容易出现取值较大的点,取值较小的点附近也更容易出现取值较小的点,即对数收益率呈现出了长记忆性的特点.

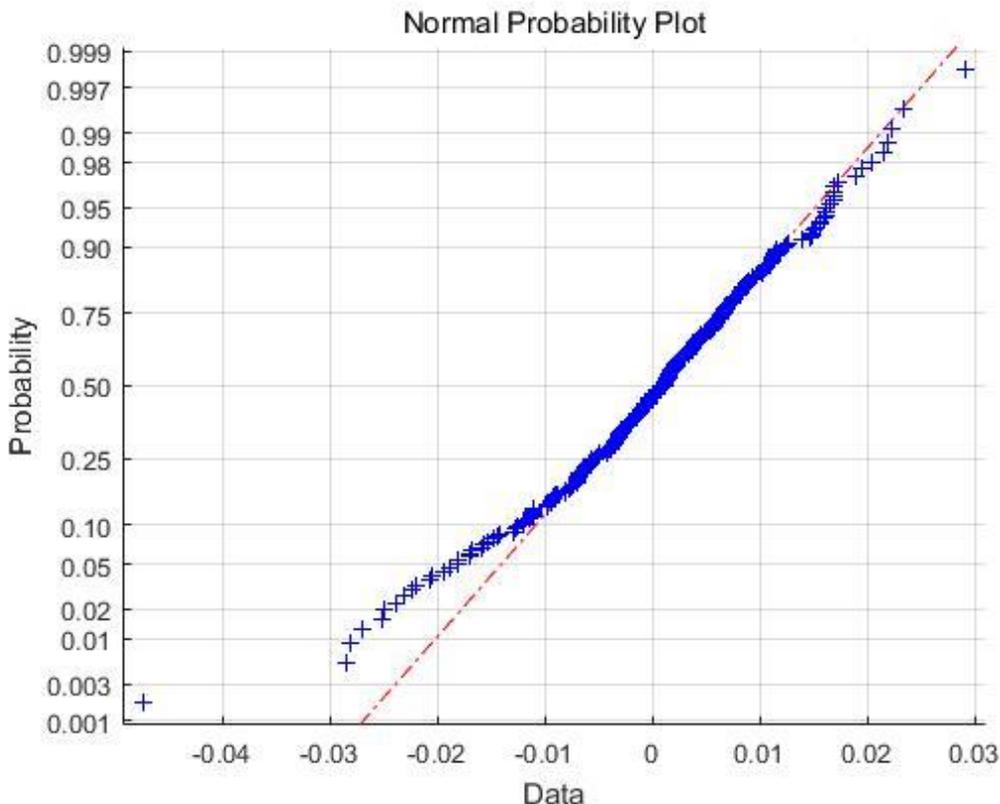


图 2 标的资产对数收益率正态概率图

从图 2 标的资产对数收益率正态概率图可以看出, 数据点并没有完全落在直线上, 这说明期权标的资产对数收益率数据和正态分布有一定的差异, 其呈现出了较为明显的厚尾的特点.

综合上述检验结果可知, 期权标的对数收益率并不是服从标准正态分布, 而是呈现出长记忆性的特点.

其次对所选数据的对数收益率进行简单的描述性统计分析, 得到如表 1 所示的结果.

表 1 上证 50ETF 对数收益率统计指标 (N=286)

最大值	最小值	均值	方差	偏度	峰度	JB 统计量
0.047379	-0.02917	-0.00014	0.000125	0.670003	4.796233	44.327

由上表所示结果可知, 期权标的峰度值大于 3, 因此其分布呈尖峰形态, 其偏度值大于 0, 因此其分布向右偏. 在 95%置信水平下, 将对数收益率的 JB 统计量进

行检验,其检验的 p 值为 $1.0000e-03$ 拒绝对数收益率服从正态分布的假设,这说明期权标的对数收益率并不服从正态分布.采用重标极差估计方法得到期权标的对数收益率的分形指数 $H > 0.5$,因此可知期权标的对数收益率具有长记忆的分形特征.综上所述,期权的标的对数收益率服从尖峰后尾分布,即数据符合新模型所需要满足的条件,因此,采用多分形随机利率模型刻画期权标的价格变化符合实际情况.

4.2 参数估计

期权定价模型的理论研究,最终是为了能够运用到实际中,因此,下面将对定价模型中的参数进行估计.首先,对经典 B-S 模型中的参数进行估计,具体估计方法同参考文献^[42],即将时间间隔为 Δt 的 $x + 1$ 个数据记为如下形式

$$\{S_{-i\Delta t}, i = 1, 2, \dots, x, x + 1\},$$

根据经典 B-S 方程可得,收益率 R_t 满足如下表达式

$$R_t = \frac{S_{t+\Delta t} - S_t}{S_t} = u\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon \sim N(u\Delta t, \sigma^2\Delta t).$$

由以上表达式可得标的收益率的 X 个样本值 $R_i, i = 1, 2, \dots, X$,根据矩估计得到 u 和 σ 的估计量

$$\hat{u} = \frac{\bar{R}}{\Delta t}, \quad \hat{\sigma} = \left(\frac{1}{(X-1)\Delta t} \sum_{i=1}^X (R_t - \bar{R})^2 \right)^{1/2}.$$

然后,将历史数据代入以上估计量中即可得到参数 u 和 σ 的估计值分别为 $\hat{u} = 0.0016, \hat{\sigma} = 0.0186385$.

其次,对多分形模型中的参数进行估计,对此模型中赫斯特指数本文运用移动窗口法进行计算,首先要对时间序列数据进行分段,在实际操作过程中分段函数的段数和每一段的长度都不宜过小,这是为了避免因分段不合理对计算结果产生影响,其次对赫斯特指数进行计算,假设要计算 n 个交易日的赫斯特指数,则需要 $[t - (n - 1), t]$ 个交易日的价格数据,具体计算在 Matlab 软件里完成,为了直观的呈现其计算结果,本文将其最终计算结果表示如图 3 所示:

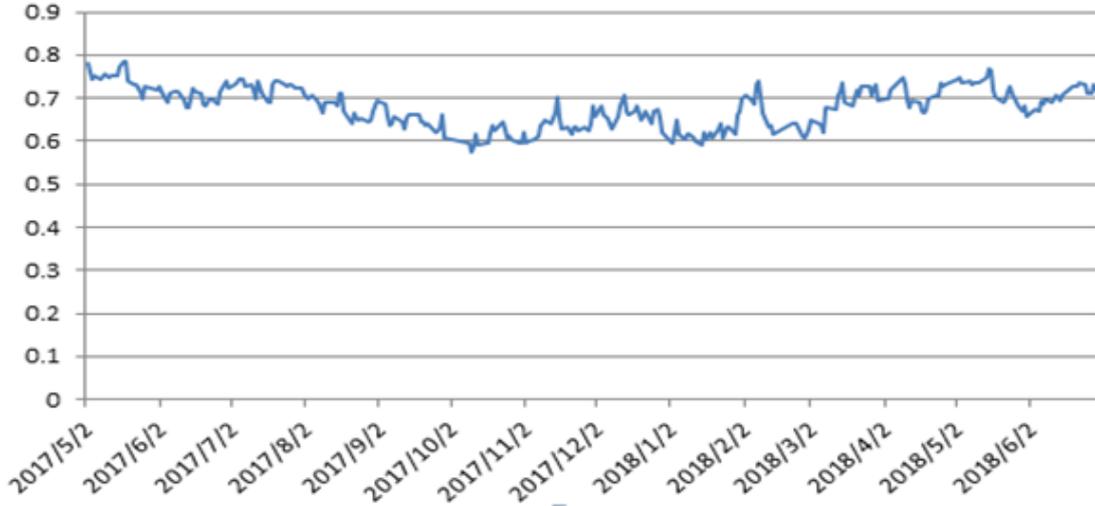


图3 赫斯特指数估计值趋势图

对于分形随机利率模型中的其他参数采用以下方法^[49]进行估计,

假设在区间 $[0, T]$ 内有 $(t_1, t_2, \dots, t_N) = (h, 2h, \dots, Nh)$ 个观察点, 则对于 σ_r^2 的估计采用如下方法,

$$\hat{\sigma}_r^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} (r_{t_{i+1}}^H - r_{t_i}^H)^2}{\sum_{i=1}^{N-1} (r_{t_i}^H)^2 (t_{i+1} - t_i)^{2H}}$$

对于漂移系数的估计, 采用最小二乘估计法, 其最小二乘估计量表示如下,

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^N (r_{(i-1)h}^H)^2 \sum_{i=1}^N \Delta r_{ih}^H - \sum_{i=1}^N r_{(i-1)h}^H \sum_{i=1}^N r_{(i-1)h}^H \Delta r_{ih}^H}{h \left[N \sum_{i=1}^N (r_{(i-1)h}^H)^2 - \left(\sum_{i=1}^N r_{(i-1)h}^H \right)^2 \right]}$$

$$\hat{\theta} = \frac{N \sum_{i=1}^N r_{(i-1)h}^H \Delta r_{ih}^H - \sum_{i=1}^N r_{(i-1)h}^H \sum_{i=1}^N \Delta r_{ih}^H}{h \left[N \sum_{i=1}^N (r_{(i-1)h}^H)^2 - \left(\sum_{i=1}^N r_{(i-1)h}^H \right)^2 \right]}$$

然后利用

$$\hat{\theta}_r = \hat{\theta}, \quad \text{和} \quad \hat{\mu}_r = \hat{\mu} / \hat{\theta},$$

即可得到均值回复系数和漂移系数的值.

最后, 运用同样的方法对多分形随机利率模型中的相关参数进行估计, 即可得到相关参数的估计值.

4.3 模拟结果分析

运用蒙特卡洛模拟法分别对经典 B-S 模型, 多分形随机利率模型下标的资产价格进行模拟, 将不同模型的积分形式带入到相应布朗运动满足的方程中, 并进行离散化处理得到标的资产价格, 得到相应模型模拟值与真实值的价格走势如图 4 所示.

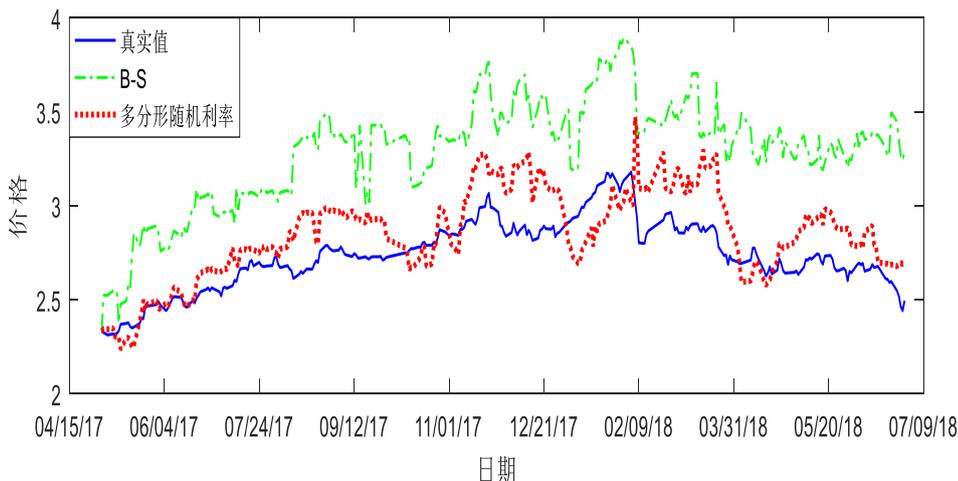


图 4 模型模拟的标的资产价格与真实值价格走势比较图

根据图 4 可以看出, 运用多分形随机利率模型模拟的标的资产价格走势比经典模型模拟的价格走势更加接近真实值, 这也说明了多分形随机利率模型的有效性.

根据不同的定价模型计算不同期权在 2018 年 8 月 31 日的价格, 与其真实价格进行比较, 结果如下表 2 所示.

表 2 模型估计出的期权价格与真实的期权价格

期权名称	执行价格	定价模型		真实值
		B-S 模型	多分形随机利率模型	
上证 50ETF 购 10 月 2300	2.30	0.2264	0.2398	0.2407
上证 50ETF 购 10 月 2350	2.35	0.1697	0.1979	0.1982
上证 50ETF 购 10 月 2400	2.40	0.1432	0.1604	0.1616
上证 50ETF 购 10 月 2450	2.40	0.1013	0.1187	0.1261

根据表 2 可以看出,不同模型的定价结果均低于真实值,但相对而言多分形随机利率模型的估计值更接近真实值,因此,可得出多分形随机利率模型的定价结果较好.

为了更清楚的说明定价结果的效果,下面将会对以上定价结果进行简单的误差分析,结果如下表所示.

表 3 定价模型的误差分析

定价模型	定价误差			
	上证 50ETF 购	上证 50ETF 购	上证 50ETF 购	上证 50ETF 购
	10 月 2300	10 月 2350	10 月 2400	10 月 2450
B-S 模型	0.0594	0.1437	0.1139	0.1967
多分形随机利率模型	0.0037	0.0015	0.0074	0.0587

从表 3 中可以看出,本文中多分形随机利率模型计算出来的期权的误差比经典模型计算出来的期权价格的误差相对较小,更进一步的说明了本文中提出模型的有效性和合理性.

5 研究结论与展望

5.1 研究结论

本文主要探讨了多分形布朗运动模型下的欧式期权定价问题, 研究的主要内容有理论研究和模拟研究两部分. 理论部分首先, 对多分形布朗运动下带有交易费用和随机利率的欧式期权分别进行了研究, 然后, 在考虑随机利率的同时又考虑了交易费用对期权定价的影响, 最后, 推理得到了多分形随机利率模型下的欧式期权定价公式.

模拟部分首先, 对文章所选数据进行描述性统计分析检验所选数据是否符合模型要求, 最终数据通过检验并说明所选数据符合模型要求, 然后, 对模型中的参数进行估计, 将不同模型的积分形式带入到相应布朗运动满足的方程中, 并进行离散化处理得到标的资产价格, 最后, 将其数值代入相应的期权定价模型中得到相应期权的值, 并通过误差分析的方法得到多分形随机利率模型下带有交易费用的定价模型的定价结果优于经典 B-S 定价模型的定价结果, 从而说明论文给出模型的有效性和实用性.

5.2 研究展望

目前, 对于期权定价的研究大多还是在分形布朗运动模型的假设下进行的, 而多分形模型下的研究相对较少, 本文仅对多分形随机利率模型下带有交易费用的情况进行了研究, 因此, 以后可以考虑用不同方法对模型中的参数进行估计, 也可以考虑在模型中引入其他对期权价格有影响的因素进行研究.

参考文献

- [1] Black F, Scholes M S. The Pricing of Options and Corporate Liabilities [J]. Journal of Political Economy, 1973, 81(3):637-654.
- [2] Peters E. Fractal market analysis: applying chaos theory to investment and economics [J]. Chaos Theory, 1994, 34(2):343-345.
- [3] Necula C. Option Pricing in a Fractional Brownian Motion Environment [J]. Advances in Economic and Financial Research - DOFIN Working Paper Series, 2008, 2(3):259-273.
- [4] Cheridito P. Mixed fractional Brownian motion [J]. Bernoulli, 2001, 7(6):913-934.
- [5] Cheridito P. Arbitrage in fractional Brownian motion models [J]. Finance and Stochastics, 2003, 7(4):533-553.
- [6] Bender C, Elliott R J. Arbitrage in discrete version of the Wick-fractional Black-Scholes market [J]. Mathematics of Operations Research, 2004, 29(4):935-945.
- [7] Caldana R, Fusai G. A general closed-form spread option pricing formula [J]. Journal of Banking & Finance, 2013, 37(12):4893-4906.
- [8] Gao L, Wang X. Option Pricing Under Knight Uncertainty Based on Fractional Brownian Motion [J]. Journal of Shandong University of Science & Technology, 2018, 37(02):53-58.
- [9] Ayache A, Vêhel J L. Generalized Multifractional Brownian Motion: Definition and Preliminary Results [J]. HAL - INRIA, 1999, 16(16):17-32.
- [10] Cont, R. Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical Issues [J]. Quantitative Finance, 2001, 1(2):223-236.
- [11] Leippold M, Schrer S. Discrete-time option pricing with stochastic liquidity [J]. Journal of Banking & Finance, 2016, 75:1-16.
- [12] Sottinen T. Fractional Brownian motion, random walks and binary market models [J]. Finance & Stochastics, 2001, 5(3):343-355.

- [13] Torres S, Tudor C A. The Multifractal Random Walk as Pathwise Stochastic Integral: Construction and Simulation [J]. *Journal of Theoretical Probability*, 2016, 31(8):1-21.
- [14] d'Halluin Y, Forsyth P, Labahn G. A penalty method for American options with jump diffusion processes [J]. *Numerische Mathematik*, 2004, 97(2):321-352.
- [15] Bakshi G, Cao C, Chen Z. Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models [J]. *Journal of Finance*, 2012, 52(5):2003-2049.
- [16] Ayache A, Esser C, Hamonier J. A new Multifractional Process with Random Exponent [J]. *Risk & Decision Analysis*, 2018, 7(1-2):5-29.
- [17] Leland H. Option pricing and replication with transactions costs [J]. *Journal of Finance*, 1985, 40(5):1283-1301.
- [18] Amster P, Averbuj C, Mariani M, et al. A Black-Scholes option pricing model with transaction costs [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2005, 303(2):688- 695.
- [19] Mastinsek M. Discrete-time delta hedging and the Black-Scholes model with Transaction costs [J]. *Mathematical Methods of Operations Research*, 2006, 64(5): 227- 236.
- [20] Wang X T. Scaling and long range dependence in option pricing, IV: Pricing European options with transaction costs under the multifractional Black–Scholes model [J]. *Physica A Statistical Mechanics & Its Applications*, 2012, 389(3):438-444.
- [21] Gu, H, Liang, J. R., & Zhang, Y. X. Time-changed geometric fractional brownian motion and option pricing with transaction costs [J]. *Physica A Statistical Mechanics & Its Applications*, 2012, 391(15):3971-3977.
- [22] Li W, Wang S. Pricing European options with proportional transaction costs and stochastic volatility using a penalty approach and a finite volume scheme [J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2017, 73(11):2454-2469.
- [23] Najafi, A R, Mehrdoust F, Shirinpour S. Pricing American put option on zero-coupon bond under fractional CIR model with transaction cost [J]. *Communication in Statistics-Simulation and Computation*, 2017 (3):0-0.

- [24] Bouchard B, Fukasawa M, Herdegen M, et al. Equilibrium returns with transaction costs [J]. *Finance & Stochastics*, 2018,22(3):569-601.
- [25] Radulescu M, Radulescu CZ. A Multi-objective Approach to Multi-period: Portfolio Optimization with Transaction Costs [M]. *Financial Decision Aid Using Multiple Criteria*: 2018.
- [26] Harrison J M, Kreps D M. Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets [J]. *Journal of Economic Theory*, 1979, 20(3):381-408.
- [27] Merton R C. Theory of rational option pricing [J]. *Bell Journal of Economics*, 1973, 4(1):141-183.
- [28] Duffie D. An extension of the Black-Scholes model of security valuation [J]. *Journal of Economic Theory*, 1988, 46(1):194-204.
- [29] Zhang X, Shu H, Kan X, et al. The Call Option Pricing Based on Investment Strategy with Stochastic Interest Rate[J]. *Journal of Mathematical Finance*, 2018, 08(1):43-57.
- [30] He X J, Zhu S P. A closed-form pricing formula for European options under the Heston model with stochastic interest rate [J]. *Journal of Computational & Applied Mathematics*, 2018, 335:323-333.
- [31] Guo Z. Option pricing under the Merton model of the short rate in subdiffusive Brownian motion regime[J]. *Journal of Statistical Computation & Simulation*, 2016, 87(3):519-529.
- [32] 徐龙炳, 陆蓉. R/S 分析探索中国股票市场的非线性 [J]. *预测*, 1999, (2) : 59-62.
- [33] 史永东. 上海证券市场的分形结构 [J]. *预测*, 2000, 19 (5) : 78-80.
- [34] 刘目楼. 分形布朗运动下的欧式外汇期权定价 [D]. 华南理工大学, 2007.
- [35] 赵旭. 基于分形 B-S 定价模型的认购权证价格行为实证分析 [J]. *数理统计与管理*, 2008, 27 (6) : 1039-1046.
- [36] 张卫国, 肖炜麟. 分形布朗运动下股本权证定价研究—模型与参数估计 [M]. 北京: 科学出版社, 2013.

- [37]张卫国,肖炜麟和徐维军等. 跳跃分形过程下欧式汇率期权的定价[J]. 中国管理科学, 2008, 16(3):57-61.
- [38]张陶. 混合分形布朗运动模型期权在定价中的应用[D]. 华中师范大学, 2016.
- [39]郭精军,程志勇. 混合高斯模型下带红利的永久美式期权定价[J]. 应用数学, 2018, 31(02):250-256.
- [40]程志勇,郭精军和张亚芳. 次分数布朗运动下支付红利的欧式期权定价[J]. 应用概率统计, 2018, 34(01):37-48.
- [41]史永东,程航和王光涛. 时变分数布朗运动下的 GARCH 族欧式期权定价研究[J]. 系统工程理论与实践, 2017, 37(10):2527-2538.
- [42]李楚矾. 多分形波动率预测及其在 B-S 模型中的应用[D]. 浙江工商大学, 2017.
- [43]肖炜麟,张卫国和徐维军. 次分形布朗运动下带交易费用的备兑权证定价[J]. 中国管理科学, 2014, 22(5):1-7.
- [44]孙娇娇,基于体制转换模型带交易费的期权定价[D]. 中国矿业大学, 2015.
- [45]郭志东. 次扩散机制下带有交易成本的 Merton 期权定价模型[J]. 南华大学学报(自然科学版), 2017, 31(02):38-41.
- [46]夏雪丽. 随机利率下基于分数 Brown 运动的几何平均亚式期权定价[D]. 华中师范大学, 2014.
- [47]韩松. 随机利率下基于分数布朗运动的亚式期权定价问题相关研究[D]. 南京财经大学, 2016.
- [48]郭志东. Merton 随机利率模型下的欧式期权定价[J]. 邵阳学院学报(自然科学版), 2017, 14(3):23-27.
- [49]郭精军,张亚芳. 次分数 Vasicek 随机利率模型下的欧式期权定价[J]. 应用数学, 2017, 30(3):503-511.
- [50]曹雯雯,王向荣. Hull-White 利率下有红利支付的 O-U 过程的幂型期权定价[J]. 数学的实践与认识, 2017, 47(21):122-127.
- [51]郑志勇. 金融数量分析:基于 MATLAB 编程[M]. 北京:北京航空航天大学出版社, 2009.

致 谢

光阴似箭,转眼间三年的硕士研究生生涯即将结束.回想这三年的学习和生活,心中无限感慨.兰州财经大学为我提供了良好的学习和生活环境,让我收获了许多也成长了许多,老师们的谆谆教导和同学们的关怀鼓励给了我克服困难和努力前进的勇气.

论文是在恩师郭精军教授的耐心指导下完成的,从论文的选题、撰写到最后的完成,郭老师都给了我很多的意见和指导,当我完成这篇毕业论文时,心中感慨万千.回想起在研究生期间,我所学的每一点知识和每一次进步都凝结着恩师的心血和汗水.郭精军老师为人谦和,教学严谨,学问广博,经常给我们推荐优秀的专业书籍让我们打下了坚实的理论基础.在此向郭精军老师致以真诚的感谢和崇高的敬意.

其次,感谢统计学院全体领导和老师们,感谢研究生期间给我们传授知识的老师们,是你们用简单易懂的语言给我讲解生涩难懂的统计学知识,是你们的无条件付出让我对统计学和金融学产生了浓厚的兴趣.感谢所有老师长期以来给予的热情指导和无私的帮助,我将永远铭记于心.

同时,我还要特别感谢我的师姐宋彦玲、师兄程志勇,感谢你们在生活和学习上对我的照顾.感谢同门刘恒、范晓倩、师弟汪育斌、师妹柴婧婧们对我有求必应的帮助.感谢陪伴我三年的同学和舍友,是你们陪伴我走过了三年的研究生生涯,带给我无限的温暖和欢乐.

最后,要特别感谢我的父母家人,感谢父母对我的付出,你们无条件的支持和付出让我在求学道路上越走越远.这份爱与信任,将鼓励我继续勇往直前,感谢你们对我不计回报的付出.

马爱琴

2019年6月10日