

分类号 \_\_\_\_\_  
U D C \_\_\_\_\_

密级 \_\_\_\_\_  
编号 10741

**兰州财经大学**

LANZHOU UNIVERSITY OF FINANCE AND ECONOMICS

# 硕士学位论文

论文题目：混合高斯 Heston 随机波动模型  
下的欧式期权定价研究

研究生姓名：柴婧婧

指导教师姓名、职称：郭精军 教授

学科、专业名称：统计学 数理统计学

研究方向：金融统计与风险管理

提交日期：2020年6月8日

## 独创性声明

本人声明所呈交的论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果.尽我所知,除了文中特别加以标注和致谢的地方外,论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果.与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意.

学位论文作者签名: 柴婧婧 签字日期: 2020.6.5.

导师签名: 李和军 签字日期: 2020.6.5

## 关于论文使用授权的说明

本人完全了解学校关于保留、使用学位论文的各项规定, 同意 (选择“同意”/“不同意”) 以下事项:

1.学校有权保留本论文的复印件和磁盘,允许论文被查阅和借阅,可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文;

2.学校有权将本人的学位论文提交至清华大学“中国学术期刊(光盘版)电子杂志社”用于出版和编入 CNKI《中国知识资源总库》或其他同类数据库,传播本学位论文的全部或部分内容.

学位论文作者签名: 柴婧婧 签字日期: 2020.6.5.

导师签名: 李和军 签字日期: 2020.6.5

# **Research on European Option Pricing under Mixed Gaussian Heston Stochastic Volatility Model**

**Candidate : Jingjing Chai**

**Supervisor: Jingjun Guo**

## 摘 要

期权作为金融市场的衍生品发展越来越快,被众多投资者和风险管理者运用,尤其是波动率衍生品的不断壮大,对金融管理提出了更高要求。B-S 模型是应用最广泛的研究期权定价的模型之一,但通过历史数据和实证研究发现:其对数收益不遵循标准正态分布的假设条件,而且不能够很好地刻画资产自相似、长相依等特性。因此,为了更准确描述标的资产价格变化情况,学者们更多选择用随机波动模型来刻画金融资产标的价格。

本文研究了混合高斯 Heston 随机波动模型下的欧式期权定价及统计模拟分析。第一部分主要得到混合高斯 Heston 随机波动模型下的欧式期权定价。首先得到混合高斯 Heston 随机波动模型满足的偏微分方程,然后得到模型中波动率方程解的存在唯一性,接着讨论解的  $p$  阶矩的性质定理,最后结合偏微分方程满足的边界条件,得到混合高斯 Heston 随机波动模型的解析解。

第二部分是关于双混合分数 Heston 模型解的存在唯一性,主要适用于解决短期期权的拟合问题。得到双混合分数 Heston 随机波动模型资产价格方程解的存在唯一性,由于其解的复杂性,对模型中波动率和股票价格随机微分方程进行欧拉离散化。

第三部分选取上证 50ETF 期权进行统计模拟分析。对选取的数据进行描述性统计分析,验证了金融市场存在波动集聚、尖峰厚尾和非对称等特征,并对未知参数进行估计和敏感度分析,最后用 Monte Carlo 模拟法对混合高斯 Heston 随机波动模型进行有效性分析。研究表明,采用混合高斯 Heston 随机波动模型比 Heston 模型更加接近其真实值。研究结果可为期权定价的理论和实践提供更多新的依据。

**关键词:** Heston 模型 混合高斯过程 欧拉离散化 参数估计 Monte Carlo 模拟

## Abstract

With the development of financial markets, options have been used by many investors and risk managers as derivatives. In particular, the continuous growth of volatility derivatives has put forward higher requirements for financial management. The B-S model is one of the most widely used models to study option pricing. But through historical data and empirical research show: firstly, its logarithmic returns do not follow the assumption of a standard normal distribution; secondly, it cannot well describe the characteristics of self-similarity and long-term dependence of assets. Therefore, in order to more accurately describe the changes in the price of the underlying asset, scholars choose to use the stochastic fluctuation model to characterize the underlying price of financial assets.

The European option pricing and statistical simulation analysis are studied under the mixed Gaussian Heston stochastic volatility model. In the first part, mainly gets European option pricing under the mixed Gaussian Heston stochastic volatility model. First, the partial differential equation are obtains which satisfied the mixed Gaussian Heston stochastic stochastic model, then gets the existence and uniqueness of the solution of the volatility equation in the model, next discusses the theorem about the nature of the  $p$ -order moment of the solution, and the analytical solution of the mixed Gaussian Heston stochastic volatility

model is finally obtained by combining the boundary conditions satisfied by the partial differential equation.

In the second part, it is about the existence and uniqueness of the solution of the double mixed fractional Heston model, which is mainly applicable to the problem of fitting short-term options. The existence and uniqueness of the solution of the asset price equation of the double mixed-fraction Heston stochastic wave model are obtained, due to the complexity of its solution, Euler discretization is performed on the volatility and stochastic differential equations of stock prices in the model.

In the third part, the 50ETF options are selected for statistical simulation analysis. Perform descriptive statistical analysis on the selected data to verify characteristics such as the existence of agglomerations, thick tails, and asymmetry in the financial market, and estimate and sensitivity analysis of unknown parameters. Monte Carlo simulation method is used to analyze the effectiveness of the mixed Gaussian Heston stochastic volatility model. It shows that the mixed Gaussian Heston stochastic wave model is closer to its true value than the Heston model. The research results can provide more new basis for the theory and development of option pricing.

**Keywords:** Heston model; Mixed Gaussian process; Euler discretization;  
Parameter estimation; Monte Carlo simulation

# 目 录

<b>1 引言</b> .....	1
1.1 研究背景.....	1
1.2 研究意义.....	2
1.3 研究现状.....	2
1.4 研究内容及安排 .....	6
<b>2 预备知识</b> .....	8
2.1 经典 B-S 定价模型及其理论 .....	8
2.2 混合次分数模型及性质.....	9
2.3 经典 Heston 模型的基本形式及解.....	10
2.4 微分方程解的相关不等式及相关知识 .....	11
<b>3 混合高斯 Heston 模型下的欧式期权定价</b> .....	14
3.1 金融市场基本假设条件.....	14
3.2 混合高斯 Heston 模型的偏微分方程及解的性质 .....	14
3.3 混合高斯 Heston 模型下的定价公式 .....	23
<b>4 双混合分数 Heston 模型解的存在唯一性</b> .....	29
4.1 金融市场的基本假设 .....	29
4.2 解的存在唯一性 .....	30
4.3 欧拉离散化 .....	33
<b>5 模拟分析</b> .....	35
5.1 数据的统计特征分析 .....	35
5.2 参数估计 .....	38
5.3 模拟结果分析 .....	40
<b>6 研究总结与展望</b> .....	41
6.1 研究总结 .....	41



---

6.2 研究展望 .....	41
<b>参考文献</b> .....	42
<b>附 录</b> .....	47
<b>致 谢</b> .....	49

# 1 引言

## 1.1 研究背景

金融市场一直以来发展迅速, 期权作为一种衍生产品发展也越来越快, 并且受到许多投资者们的关注. 1973 年, Black 和 Scholes 提出了有名的 B-S 期权定价模型, 由于该模型的解析解易求出且具有很强的应用性, Black 和 Scholes 也因此获得第二十九届诺贝尔经济学奖. 然而大量实证数据已经表明, B-S 模型中的常数波动率和正态分布假设与实际市场中观察到的波动率微笑和有偏是不相符的, 即资产价格的收益呈现出“长相依性”和“尖峰厚尾”的分布特征.

针对上述经典 B-S 模型的不足, 之后的许多学者对其进行相应的改进. 一些学者引入了分数布朗运动, 遗憾的是, 当H的值不是1/2时, 这个分数布朗运动既不属于半鞅, 也不属于马尔可夫过程, 就意味着在此过程中存在套利机会的产生. 因此, 一些学者为了消除套利, 也得到了相应的结果, 例如 Sun(2013)提出了混合分数布朗运动, 肖炜麟(2014)等提出了次分数布朗运动等等.

由于金融衍生产品本身的复杂性, 为了更准确地刻画标的资产价格变化情况, 有学者提出用随机波动模型来定价期权. 例如, Cox 提出了不变方差弹性模型(即 CEV 模型), Merton 在 1976 年对 Cox 等人提出的纯粹跳过程进行修正, 得到了带跳的扩散模型, 还有著名的 Hull-White(1984)模型, 它假设随机波动率满足带随机项的一个函数, 且描述了标的资产价格与非常数波动率之间的变化关系, 为之后研究随机波动率模型提供了可靠依据. Heston(1993)等基于标的资产波动建立了随机波动率模型并得到其封闭形式下的解.

而随机波动模型中运用比较广泛的就是 Heston 模型. Heston 模型的引入, 使得市场的波动是随机的且具有比正态分布更厚的尾部, 相比恒定波动表现出更大的灵活度. 它假设波动服从一个均值回归平方根(CIR)过程, 考虑了资产价格与波动率的相关性以及价格收益满足“尖峰厚尾”的分布特点, 这能够很好地处理 B-S 模型中存在的“波动率微笑”(价外和价内期权的波动率相比在价期权的波动率较高, 使得整个波动率曲线表现出中间比两端低, 也就是类似于微笑的嘴的形状)问题, 而且能够得到 Heston 模型下欧式期权满足的解, 从而对期权定价具有很好的指导意义. 混合高斯 Heston 随机波动模型通过用混合次分数布朗运动来驱

动,使得该模型相比 Heston 模型更能够兼容真实市场,由此可见,对于混合高斯 Heston 随机波动模型的研究是有必要的.

## 1.2 研究意义

在金融市场迅猛发展的时代背景下, Heston 模型作为衍生品定价领域具有代表性的随机波动模型之一,不仅能够很好地解决 B-S 模型“波动率微笑”问题,而且利用该模型对衍生品定价,可以用来规避风险和套期保值.因此,对于更广泛的衍生品定价以及风险对冲的研究具有重要的理论意义和现实意义.

采用混合高斯 Heston 随机波动模型能够更准确地刻画金融资产价格长相依性和“尖峰厚尾”等分布特征,得到此模型满足的偏微分方程及讨论解的  $p$  阶矩性质,并得到了相应的欧式期权定价公式,使模型的适用范围更广,丰富了期权的相关理论知识,为以后的研究提供了思路.

通过模拟资产价格的随机过程对资产价格变化情况有了更精准地理解和认识,将此模型应用到金融市场中,结合期权市场相关数据,进行相应数值模拟和实证研究,有助于对模型进行校正且得到与实际市场数据更为接近的结果,能够给投资者提供相关投资依据,带来稳定的收益,并且提高投资者信心,对金融衍生品类型的丰富及市场的繁荣具有重要的现实意义.

## 1.3 研究现状

期权定价的研究最早是基于法国数学家 Bachelier 的博士论文,论文中用布朗运动描述股票价格的变化,从而衍生出其它种类的定价模型.

### (1) B-S 期权定价国内外相关研究现状

自 1973 年 Black 和 Scholes 提出经典的 B-S 期权定价模型以来,国内外学者对该模型进行了修正. Necula(2002)研究了分数布朗运动模型下的期权定价问题,同时给出了分数布朗模型下的定价公式.虽然分数型布朗运动能描述金融资产价格的分形特征,但由于套利机会的产生,故无法采用现有的随机积分理论对其进行分析.一些学者为了解决套利问题, Bender(2004)证明了当  $H \in (1/2, 1)$  时,由混合分数布朗运动驱动的市场是无套利的. Androschuk(2006)采用混合布朗-分数-布朗模型,并证明混合模型是无套利的.张卫国(2009)等人考虑了当标的资产满

足分数布朗运动时的欧式汇率定价问题. Sun L(2013)采用校正的分数布朗运动来研究期权定价问题, 分别得到混合分数布朗运动和次分数布朗运动下的定价公式. 肖炜麟(2014)等人研究次分数布朗运动, 并对带有交易费用的权证进行定价, 研究结果说明次分数布朗运动模型相比分数布朗运动模型和 B-S 模型较好, 其结果更加接近期权的真实值. El-Nouty (2015)得到混合次分数布朗运动能够更好地刻画金融资产价格的长记忆性, 且期权定价结果更加接近期权真实值. 郭精军(2017)等研究了次分数布朗运动下支付红利的欧式期权定价问题, 得到的结果更优于分形布朗运动模型和经典 B-S 模型. 郭精军(2018)等研究了混合高斯模型下带红利的永久美式期权定价, 发现混合高斯模型能更精确的表示美式期权标的资产价格的变化情况.

### (2) 随机波动率模型的研究

在随机波动模型中, 将采用不同的随机过程来刻画模型中标的资产的收益率的波动变化情况. Hull(1987)解决了带有随机波动的资产定价问题. Stein(1991)等人考虑当波动率参数由 O-U 过程驱动时, 股票价格遵循具有随机变化的扩散过程所满足的分布问题, 结果解决了随机波动中的期权定价问题和资产价格收益“尖峰厚尾”的分布特征. Heston(1993)提出一种新的思路, 得到带有随机波动率的资产的欧式看涨期权的封闭式解, 该模型也允许波动率和现货资产收益之间的相关性, 且封闭定价公式是基于特征函数得出的. Bates(1996)基于跳跃风险和波动风险是系统的且不可分散, 提供了美式期权在跳跃-扩散过程中定价的有效方法. Christoffersen(2009)等人提出使用双因素随机波动率模型进行建模, 除了产生波动率微笑之外, 还提供了更灵活的波动率期限结构建模.

### (3) Heston 模型国内外研究现状

Heston 模型自 1993 年提出以来, 一直被广泛应用于衍生品定价与风险管理. Atiya(2009)考虑 Heston 随机波动率模型, 并且提出了波动率似然函数的精确近似, 很好的解决了波动率估计在离散观测中的问题. Benhamou(2009)等人得到时间依赖的 Heston 模型的看涨看跌期权近似定价公式. Grzelak(2011)提出了带有随机利率的多因素混合模型. Fatone(2013)等人基于 Heston 模型, 考虑了多尺度随机波动率模型, 并在不同时间尺度上用辅助变量来描述资产价格动态, 通过滤波将定义的似然函数转化为最大似然来解决多尺度随机波动率的校准问题. 由于 Heston 模

型在描述隐含波动率的一些重要特征上存在困难,故 Nagashima(2014)等人研究了具有时间依赖参数的多因子 Heston 模型的渐近展开方法,是对 Benhamou(2009)等人结果的扩展. He Xingjiang(2016)提出了 Heston 模型的一种新的替代形式,在保留其分析易处理的同时,证明了确保以仿射形式存在解的必要和充分条件. Samimi(2017)等人研究了 Heston-Hull-White 随机波动率和随机利率模型下的美式期权定价问题,将模型数值结果与 Heston-CIR 模型相比较,表明算法在 Heston-Hull-White 模型下的定价效率更高. Mehrdoust(2017)等人得到由分数布朗运动( $H \in (1/2,1)$ )驱动的分数的 Heston 模型,与此同时证明了随机微分方程解的存在性和唯一性且分数 CIR 过程仍然是一个均值回归过程. 进而得到由混合分数布朗运动( $H \in (3/4,1)$ )所驱动的混合分数的 Heston 模型(2018)下方程解的存在性和唯一性,计算了美式期权的价格并做了相应的数值模拟. Mehrdoust(2017)等人考虑带跳的双 Heston 随机波动模型(DHJ)来模拟金融资产价格,在 DHJ 模型下应用快速傅立叶变换方法(FFT)和朴素蒙特卡罗模拟法(NMC)进行欧式期权定价. Fallah(2019)首先证明了双 Heston 模型下随机微分方程解的存在性和唯一性,其次基于三种不同的离散化方案去估计回望期权的价格,在数值上做了对比并得到验证. He Xingjiang(2018)得到具有随机利率的 Heston 随机波动模型下欧式期权的定价公式. Zeng Xiangchen(2019)在 Heston 随机波动模型下,提出一种新的基于树的数值方法去定价期权,并在此方法和 Heston 模型的显式有限差分之间建立等价关系.

国内的学者们在这方面也做了大量的工作. 邓国和(2012)考虑当股票价格服从 Heston 随机波动模型的任选期权时,进一步应用 Girsanov 变换、特征函数以及傅里叶逆变换,得到任选期权的封闭式解. 王挺伟(2012)比较了五种期权定价模型,运用 Levenberg-Marquardt 算法,做避险有效性检验,结果证明在 Delta-Vega 中性对冲下的 Heston 模型最有效. 常浩(2013)采用随机最优控制理论去研究 Heston 随机波动模型下的动态投资组合问题,分别得到基于幂效用和指数效用下最优投资策略. 孙有发(2014)等将网格拉伸变换用于 Heston 随机波动模型中,为获得更高的精度,对变换后的模型设计了高阶紧差分格式. 张敏(2015)等人研究了 Heston 模型下欧式-篮子期权定价问题,得到篮子看涨期权定价公式. 肖建武(2015)应用最优控制论和对数效用函数建立 Heston 随机波动模型,用 Legendre 变

换求解随机微分 Bellman 方程并得到 Heston 模型的解析解. 白薇(2015)对 Heston 模型做了 Euler 离散和 Milstein 离散, 得到后者较前者能产生更小的方差, 并且表明无论选择哪种期权, 运用拟蒙特卡罗能产生更高精度. 周杰明(2016)等人研究了随机利率、随机波动率下鲁棒最优投资组合问题, 假设利率和股票价格分别遵循 CIR 模型和 Heston 模型, 求解随机控制问题并获得最优投资策略和相应函数解析表达式. 龚群子(2018)利用蒙特卡罗模拟计算期权的隐含波动率, 然后利用隐含波动率曲面对模型的几个参数进行敏感度分析.

#### (4) 参数估计方法

对 Heston 模型中的未知参数进行估计也是一大难题, 学者们也更加重视对模型中参数的求解. 王林(2011)使用模拟退火算法, 并利用最小化残差平方和进行估计, 该算法将以一定的概率跳出局部极小值, 从而以概率 1 约束到全局极小值, 可以有效得到 Heston 模型的待估参数. 李淑琦(2014)对几种代表性的离散化算法进行改进, 提出新的近似精确离散化算法, 即 ES-QE 和 QE-IG 方法, 接着将对美式期权定价的 MLSM 方法与神经网络技术结合, 得到 MLSM-NN 方法并对期权进行定价, 得到的精度均高于几种代表性的经典方法. 李斌(2015)利用遗传算法对群体进行搜索的特点, 解决了 Heston 模型参数估计的组合优化问题, 从而以概率 1 约束到全局极小值即最优解. 还有一些学者如 Wang Ximei(2017)等人采用伪极大似然估计和一致扩展的卡尔曼滤波算法对 Heston 模型中的未知参数进行同步估计. 其中, 对状态方程和测度方程进行伪极大似然估计(PMLE)计算, 而对于波动率, 引入了一致扩展卡尔曼滤波(CEKF)算法, 以保证波动率得到很好的评估. 此外, 对 PMLE-CEKF 算法和 PMLE-EKF 算法的估计结果进行比较. 由于在 PMLE-CEKF 算法中没有考虑噪声之间相关系数 $\rho$ 的估计, 随后(2018), 他们基于 Heston 模型的伊藤变换, 提出了正态最大似然估计(NMLE)算法, 在未知波动率的情况下, 组合 NMLE 算法和一致扩展卡尔曼滤波(CEKF)算法, 得到该算法较之前的伪极大似然估计算法更有效且可以更好地减少估计误差.

综上所述, 由 Bachelier 的博士论文开始, 到经典 B-S 定价模型, 再到各种随机波动模型的产生和发展, 为期权定价理论奠定了基础. 很明显, 选用一个简单随机过程并不能够完全描述期权标的变化情况, 因此采用混合高斯 Heston 模型, 即多个随机过程的线性组合去更精确地刻画期权标的变化.

## 1.4 研究内容及安排

### 1.4.1 研究内容

本文拟采用混合高斯 Heston 随机波动模型来刻画金融资产标的的价格变化情况,在该模型的基础上主要研究了以下内容:

(1) 主要得到混合高斯 Heston 随机波动模型下的欧式期权定价. 首先介绍混合高斯 Heston 随机波动模型的基本假设, 用混合次分数布朗运动来替代模型的随机部分, 考虑自融资交易策略, 一方面要对冲风险, 另一方面还要对冲波动率, 从而得到混合高斯 Heston 随机波动模型满足的偏微分方程, 随后得到波动率方程解的唯一性以及讨论相应  $p$  阶矩的性质定理. 其次在混合高斯 Heston 随机波动模型下, 通过求解偏微分方程, 运用 Radon-Nikodym 测度变换和 Fourier 逆变换的方法, 给出定价公式解的封闭形式.

(2) 考虑了双混合分数 Heston 模型解的存在唯一性. 为了很好地拟合短期期权, 在金融市场的假设条件下, 得到双混合分数 Heston 模型满足资产价格方程解的存在唯一性并对其进行欧拉离散化.

(3) 本文选取上证 50ETF 期权进行统计模拟分析. 先从 Wind 数据库选取所需要的数据, 接着对所选数据进行简单的描述统计分析, 得到数据的基本特征, 并对其中的未知参数进行估计和敏感度分析, 利用 Monte Carlo 模拟法, 从数值模拟的角度来说明定价方法的有效性.

### 1.4.2 研究安排

论文的结构安排如下:

第一部分为引言. 先介绍期权和随机波动模型的相关研究背景, 其次是阐述研究目的和研究意义, 从而找到研究本文的出发点, 再次对国内外相关参考文献做了整理和汇总, 最后是整篇文章的安排.

第二部分为预备知识. 首先介绍经典期权定价理论的定价公式和相关性质; 然后给出混合次分数模型及其性质内容; 接着是经典 Heston 模型的基本假设条件及其满足的封闭形式解; 最后指出微分方程解的相关不等式及一些主要知识.

第三部分为混合高斯 Heston 随机波动模型下的欧式期权定价问题. 主要是在基本假设条件下, 得到混合高斯 Heston 模型满足的偏微分方程, 通过求解偏微分方程得到其定价公式, 以及证明了波动率方程有唯一解及解的  $p$  阶矩性质.

第四部分为双混合分数 Heston 模型解的存在唯一性. 主要是对金融市场中的短期期权进行很好的拟合, 得到资产价格方程解的存在唯一性.

第五部分为数值模拟分析. 首先对所选数据进行描述性统计分析, 其次用敏感度分析对未知参数进行估计, 接着利用 Monte Carlo 模拟法, 对经典 Heston 模型和混合高斯 Heston 模型下股票价格路径进行模拟, 并与真实路径做了对比, 最后得到混合高斯 Heston 模型比经典 Heston 模型更加接近真实值, 更能够精确地描述股价的变化情况.

第六部分为整篇论文的总结及展望. 主要对论文的研究内容和研究过程做了简单讨论, 接着是对未来研究方向和内容做了简单展望.



## 2 预备知识

### 2.1 经典 B-S 定价模型及其理论

期权是一种买卖的权利, 在规定的时期或者时间内, 以当时确定好的价格, 赋予期权买方向期权卖方购买或发售一定数量的标的物的权利, 但不负有必须购买或售卖的义务.

模型的基本假设<sup>[38]</sup>:

(1) 期权标的资产价格遵循几何布朗运动, 即  $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$ , 其中  $\mu$  为期望回报率,  $\sigma$  为波动率, 且它们都是常数.

(2) 在交易机制中, 有价证券是允许卖空的.

(3) 市场不存在摩擦, 交易时也不用考虑交易费用和税收, 交易是自由进行的.

(4) 在金融资产的有效期内, 股票没有分红及其它相关收益.

(5) 在金融资产交易市场中, 不产生无风险套利机会.

(6) 证券的交易过程以及证券价格的更动都是连续的.

(7) 无风险利率  $r$  为常数.

B-S 模型满足的随机微分方程

$$\frac{\partial C_t}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2} + r S_t \frac{\partial C_t}{\partial S_t} - r C_t = 0,$$

通过求解上述微分方程, 得到经典 B-S 模型下的期权定价公式为

$$\begin{aligned} C(S_t, t) &= S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2), \\ P(S_t, t) &= K e^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t N(-d_1), \end{aligned}$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t},$$

$C(S_t, t)$  为看涨期权的价格,  $P(S_t, t)$  为看跌期权的价格,  $S_t$  为  $t$  时刻标的资产价格,  $N(\cdot)$  为标准正态分布的累积分布函数,  $K$  为期权的敲定价格,  $r$  为无风险利率,  $\sigma$  为股价波动率.

伊藤引理是日本数学家伊藤清最早于 1951 年发现的, 假设变量  $X_t$  服从下面这个扩散过程

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t,$$

其中  $\mu$  和  $\sigma$  分别是扩散过程的漂移率和波动率,  $dB_t$  是布朗运动. 伊藤引理对函数  $h(t, X_t)$  来说, 有

$$dH = \left( \frac{\partial H}{\partial X} \mu + \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial X^2} \sigma^2 \right) dt + \frac{\partial H}{\partial X} \sigma dB_t$$

成立, 其中  $\frac{\partial H}{\partial X} \mu + \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial X^2} \sigma^2$  此扩散过程的漂移率,  $\frac{\partial H}{\partial X} \sigma$  为此扩散过程的波动率,  $dB_t$  是布朗运动.

## 2.2 混合次分数模型及其性质

定义 2.1<sup>[37]</sup> 设  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  是一个完备的概率空间, 则由布朗运动和次分数布朗运动线性组合后, 可以得到如下的混合次分数模型

$$M_t^H = M_t^H(a, b) = aB_t + b\xi_t^H, (\forall t \in R_+),$$

其中,  $a, b$  是常数,  $H$  是赫斯特指数,  $B_t$  是布朗运动,  $\xi_t^H$  是次分数布朗运动, 且  $B_t$  和  $\xi_t^H$  是相互独立的.

混合次分数模型  $\{M_t^H(a, b)\}_{t \in R^+}$  满足以下性质:

(1)  $M_t^H$  是一个中心高斯过程, 当  $H = \frac{1}{2}$  时,  $a \in R$  且  $b \in R_+$  是一个马尔可夫过程;

(2) 对于  $\forall s \in R_+, \forall t \in R_+, M_t^H$  的协方差函数为

$$\begin{aligned} & \text{Cov}(M_t^H(a, b), M_s^H(a, b)) \\ &= a^2(t \wedge s) + b^2 \left( t^{2H} + s^{2H} - \frac{1}{2}((s+t)^{2H} + |t-s|^{2H}) \right). \end{aligned}$$

其中  $t \wedge s = \frac{1}{2}(t+s - |t-s|)$ .

(3) 对于  $\forall t \in R_+, M_t^H$  平方的期望函数和二阶增量函数为

$$E \left( (M_t^H(a, b))^2 \right) = a^2 t + b^2 ((2 - 2^{2H-1}) t^{2H}),$$

$$E(M_t^H(a, b) - M_s^H(a, b))^2 = a^2(t - s) + b^2(-2^{2H-1}(t^{2H} + s^{2H}) + (t + s)^{2H} + (t - s)^{2H}).$$

(4) 对于  $\forall h > 0$ ,  $M_t^H$  具有自相似性, 即

$$\{M_{ht}^H(a, b)\} \triangleq \{M_t^H(ah^{1/2}, b^{1/2})\},$$

其中,  $\triangleq$  表示具有相同的分布.

## 2.3 经典 Heston 模型的基本形式及其解

(1) 经典 Heston 随机波动模型的基本假设形式<sup>[12]</sup>

Heston(1993)提出了资产价格遵循下面的定价模型, 与此同时它的波动率遵循均值回复 Cox-Ingersoll-Ross(CIR)模型

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dB_{1,t}, \\ dV_t &= \kappa(\theta - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t}dB_{2,t}, \\ dB_{1,t}dB_{2,t} &= \rho(dt). \end{aligned}$$

其中  $S_t$  是股票价格,  $V_t$  是股票波动率,  $B_{1,t}$  和  $B_{2,t}$  是两个布朗运动过程,  $\rho$  是相关系数且  $\rho \in (-1, 1)$ , 参数  $\mu$  是资产价格的期望, 参数  $\kappa$  是均值回复速度, 参数  $\theta$  是波动率的长期均值, 参数  $\sigma$  是波动率的波动率.

大量的实证和数据分析研究已经表明, 金融资产的对数收益率呈现出“尖峰厚尾”的分布特征.  $\sigma$  主要影响分布的峰度, 当  $\sigma = 0$  时, 对数收益率表现为正态分布, 即 Heston 模型退化为经典 B-S 模型; 当  $\sigma$  的值增加时, 峰度也会随之增加, 从而尖峰表现的越明显, 与此同时两侧有明显的厚尾出现, 使得波动率微笑更明显.  $\rho$  主要反应对数收益率和波动之间的相关性, 即影响厚尾的程度. 当  $\rho > 0$  时, 波动随着收益的增加而增加, 表现出右边尾部更厚; 当  $\rho < 0$  时, 波动随着收益的增加而减少, 从而表现出左边尾部更厚.

(2) 经典 Heston 随机波动模型的解析解形式<sup>[12]</sup>

Heston 随机波动模型下欧式看涨期权价格的封闭解为

$$C(S_t, V_t, t) = S_t P_1 - K e^{-r\tau} P_2,$$

其中  $x = \ln S_t$ ,  $P_1$  和  $P_2$  是两个密度积分, 满足

$$P_j(x, V_t, T, K) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \operatorname{Re} \left( \frac{e^{-i\phi \ln K} f_j(x, V_t, T, \phi)}{i\phi} \right) d\phi,$$

$$f_j(x, V_t, T, \phi) = \exp\{C(T-t, \phi) + D(T-t, \phi)V_t + i\phi x\},$$

$$C(T-t, \phi) = ri\phi + \frac{a}{\sigma^2} \left[ (b_j - \rho\sigma\phi i + d)\tau - 2\ln \left( \frac{1 - ge^{dr}}{1 - g} \right) \right],$$

$$D(T-t, \phi) = \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d}{\sigma^2} \left( \frac{1 - ge^{dr}}{1 - g} \right),$$

$$g = \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d}{b_j - \rho\sigma\phi i - d'}$$

$$d = \sqrt{(b_j - \rho\sigma\phi i)^2 - \sigma^2(2u_j\phi i - \phi^2)},$$

$$u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = -\frac{1}{2}, a = \kappa V, b_1 = \kappa + \lambda - \rho\sigma, b_2 = \kappa + \lambda.$$

## 2.4 微分方程解的相关不等式及相关知识

**定义 2.2**<sup>[54]</sup> (风险中性定价) 对衍生证券进行定价时, 所有投资者都是风险中性的. 而所有证券的预期收益率等于无风险利率, 所有现金流都应该使用无风险利率贴现求得现值.

**定义 2.3**<sup>[54]</sup> (无套利市场) 不存在也不需要支付成本或承担风险就能获得额外收益机会的市场, 即“天下没有免费的午餐”.

**定义 2.4**<sup>[54]</sup> (完备市场) 如果在金融市场  $M$  中, 每个未定权益  $X$  在该市场中都可以被某一个交易策略所复制, 则称这个市场  $M$  为完备市场.

**定义 2.5**<sup>[27]</sup> 对于任何  $s < t$ , 假设  $C[s, t]$  表示连续函数的巴拿赫空间, 用  $\|f\|_{s,t}$ ,  $f \in C([s, t])$  表示它的上确界范数, 即满足

$$\|f\|_{s,t,\infty} = \sup\{|f(r)|, s \leq r \leq t\},$$

用  $C^\beta[s, t]$  表示阶  $\beta > 0$  的 Hölder 连续函数空间, 定义范数为

$$\|f\|_{s,t,\lambda} = \sup \left\{ \frac{|f(u) - f(v)|}{|u - v|^\beta}, s \leq v < u \leq t \right\}.$$

**定义 2.6**<sup>[27]</sup> 格朗沃尔不等式对于满足积分或微分方程的函数, 都有相应的积分或微分方程不等式成立, 可被用来证明初值问题解的唯一性. 设连续函数  $u, v: [0, T] \rightarrow [0, \infty]$  且  $M > 0$  满足

$$u(t) \leq M + \int_0^t v(s)u(s)ds, t \in [0, T].$$

对上式进行简单整理, 则有

$$u(t) \leq M \exp\left(\int_0^t v(s)ds\right), t \in [0, T].$$

**定义 2.7**<sup>[29]</sup> 局部 Lipschitz 条件: 存在常数  $C_1$  且  $C_1 > 0$  满足

$$\begin{aligned} & |f(t, x, y, z) - f(t, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})| + |g(t, x, y, z) - g(t, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})| \\ & \quad + |h(t, x, y, z) - h(t, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})| \\ & \leq C_1(|x - \bar{x}| + |y - \bar{y}| + |z - \bar{z}|), \end{aligned}$$

其中  $t \in [0, T], x, \bar{x}, y, \bar{y}, z, \bar{z} \in R^d$ .

**定义 2.8**<sup>[29]</sup> 线性增长条件: 存在常数  $C_2$  且  $C_2 > 0$  满足

$$|f(t, x, y, z)| + |g(t, x, y, z)| + |h(t, x, y, z)| \leq C_2(1 + |x| + |y| + |z|),$$

其中  $(t, x, y, z) \in [0, T] \times R^d \times R^d \times R^d$ .

**定义 2.9**<sup>[38]</sup> (Radon-Nikodym 定理) 在概率空间  $(\Omega, \mathcal{F})$  上, 由满足  $E(Z) = 1$  的非负随机变量  $Z$  定义的一个新的概率测度  $\tilde{P}$

$$\tilde{P}(A) = \int Z(\omega)dP(\omega), \forall A \in \mathcal{F}.$$

对于任何随机变量都有两个期望值, 一个是原概率测度  $P$  下的期望值, 记为  $E(X)$ ; 另一个是新概率测度  $\tilde{P}$  下期望值  $\tilde{E}(X)$ .

如果  $P\{Z > 0\} = 1$ , 则  $P$  和  $\tilde{P}$  具有相同的零概率集, 有公式  $E(Z) = \tilde{E}\left(\frac{X}{Z}\right)$ , 我们称  $Z$  是  $\tilde{P}$  关于  $P$  的拉东-尼柯迪姆导数, 记为

$$Z = \frac{d\tilde{P}}{dP}.$$

对于分布函数求解比较困难的扩散过程, 可以对其分布的特征函数进行傅里叶逆变换得到.

**定义 2.10**<sup>[38]</sup> (傅里叶变换) 设函数  $f(t)$  满足狄利克雷条件且绝对连续, 定义  $f(t)$  的傅里叶变换为

$$\Phi[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jwx} f(t) dt.$$

(傅里叶逆变换) 设函数  $F(w)$  满足傅里叶逆变换的存在条件, 则定义  $F(w)$  的傅里叶逆变换为

$$\Phi^{-1}[F(w)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jwx} F(w) dw.$$

设函数  $f(x)$  是某个随机变量  $X$  的概率分布函数, 满足  $f(x) \geq 0$ ,  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ , 其经过傅里叶变换后称为特征函数, 即

$$\Phi[w] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jwx} f(x) dx = E(e^{jwx}).$$

对特征函数进行傅里叶逆变换得到其密度函数.

### 3 混合高斯 Heston 随机波动模型下的欧式期权定价

欧式期权与美式期权是期权的两种主要执行方式,它们之间的区别在于欧式期权只能在到期日才能执行,而美式期权可以在到期日之前的任意时间去执行.因此,美式期权相比欧式期权更为复杂. Merton 证明了美式期权的定价问题就是求解其抛物型的最优边界问题,然而美式期权没有显式表达式,从而无法求得其精确解,故将它转化为相应的线性偏微分方程,并结合数值方法求解相关问题.

#### 3.1 金融市场基本假设条件

Heston 随机波动模型的引入,使得随机波动比恒定波动具有更大的灵活度,在 Heston 随机波动模型中,用混合次分数布朗运动代替布朗运动能够表现出长相关性,从而得到此模型更适用于真实市场.因此,本节首先用混合次分数布朗运动来替代模型的随机部分,得到混合高斯 Heston 随机波动模型满足的偏微分方程;然后,考虑到股价波动率满足的随机微分方程解有唯一解;其次,讨论了解的  $p$  阶矩性质定理;最后,得到混合高斯 Heston 随机波动模型下的欧式期权定价公式.

混合高斯 Heston 随机波动模型下,资产价格动态遵循下面的定价模型

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dM_{1,t}^H, \quad (3.1)$$

$$dV_t = \kappa(\theta - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t}dM_{2,t}^H, \quad (3.2)$$

$$dM_{1,t}^H dM_{2,t}^H = \rho[a^2 dt + b^2(2 - 2^{2H-1})dt^{2H}]. \quad (3.3)$$

其中  $M_{1,t}^H$  和  $M_{2,t}^H$  是两个混合次分数布朗运动过程,其波动率遵循均值回复混合次 CIR 模型.

#### 3.2 混合高斯 Heston 模型的偏微分方程及解的性质

为了推导出混合高斯 Heston 随机波动模型下欧式期权满足的偏微分方程,首先以引理的形式给出混合高斯 Heston 模型假设下满足的方程.

**引理 1** 由混合高斯 Heston 模型的相应假设,可以得到方程

$$\frac{\partial U}{\partial t} + rS_t \frac{\partial U}{\partial S_t} + V_t S_t^2 (a^2 + b^2 H(2 - 2^{2H-1})t^{2H-1}) \frac{\partial^2 U}{\partial S_t^2}$$

$$\begin{aligned}
& +V_t\sigma^2(a^2 + b^2H(2 - 2^{2H-1})t^{2H-1})\frac{\partial^2 U}{\partial V_t^2} + [\kappa(\theta - V_t) - \lambda(t, S_t, V_t)]\frac{\partial U}{\partial V_t} \\
& +\sigma S_t V_t \rho [a^2 + 2b^2H(2 - 2^{2H-1})t^{2H-1}]\frac{\partial^2 U}{\partial V_t \partial S_t} - rU = 0.
\end{aligned}$$

**证明：**由金融市场的假设条件(3.1)-(3.3)可知, 在混合高斯 Heston 模型中, 除了要对冲风险外, 还要对冲波动率, 令

$$M_t = M(t, S_t, V_t), U_t = U(t, S_t, V_t).$$

考虑自融资策略 $\vartheta = (\psi, \delta)$ , 此时融资策略的总价值为

$$\Pi = M_t + \psi S_t + \delta U_t. \quad (3.4)$$

$\psi$ 是股票的份额,  $\delta$ 是 $U_t$ 所占的份额, 在时间间隔 $dt$ 内, 价值 $\Pi$ 的变化为

$$d\Pi = dM_t + \psi dS_t + \delta dU_t. \quad (3.5)$$

对 $M_t$ 和 $U_t$ 分别用Itô引理, 得到下面两个二阶展开式

$$\begin{aligned}
dM_t &= \frac{\partial M}{\partial t} dt + \frac{\partial M}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial M}{\partial V_t} dV_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 M}{\partial S_t^2} (dS_t)^2 + \frac{\partial^2 M}{\partial V_t^2} (dV_t)^2 \\
& \quad + \frac{\partial^2 M}{\partial V_t \partial S_t} (dS_t dV_t) \\
&= \frac{\partial M}{\partial t} dt + \frac{\partial M}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial M}{\partial V_t} dV_t + V_t S_t^2 (a^2 + b^2H(2 - 2^{2H-1})t^{2H-1}) \frac{\partial^2 M}{\partial S_t^2} dt \\
& \quad + V_t \sigma^2 (a^2 + b^2H(2 - 2^{2H-1})t^{2H-1}) \frac{\partial^2 M}{\partial V_t^2} dt \\
& \quad + \sigma V_t S_t \rho [a^2 + 2b^2H(2 - 2^{2H-1})t^{2H-1}] \frac{\partial^2 M}{\partial V_t \partial S_t} dt.
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
(dS_t)^2 &= dS_t \cdot dS_t = V_t S_t^2 (a^2 dt + b^2(2 - 2^{2H-1})dt^{2H}), \\
dS_t \cdot dV_t &= \rho \sigma V_t S_t (a^2 dt + b^2(2 - 2^{2H-1})dt^{2H}), \\
(dV_t)^2 &= dV_t \cdot dV_t = \sigma^2 V_t (a^2 dt + b^2(2 - 2^{2H-1})dt^{2H}),
\end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned}
dU_t &= \frac{\partial U}{\partial t} dt + \frac{\partial U}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial U}{\partial V_t} dV_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial S_t^2} (dS_t)^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial V_t^2} (dV_t)^2 \\
& \quad + \frac{\partial^2 U}{\partial V_t \partial S_t} (dS_t dV_t)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial U}{\partial t} dt + \frac{\partial U}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial U}{\partial V_t} dV_t + V_t S_t^2 (a^2 + b^2 H(2 - 2^{2H-1}) t^{2H-1}) \frac{\partial^2 U}{\partial S_t^2} dt \\
&\quad + V_t \sigma^2 (a^2 + b^2 H(2 - 2^{2H-1}) t^{2H-1}) \frac{\partial^2 U}{\partial V_t^2} dt \\
&\quad + \sigma V_t S_t \rho [a^2 + 2b^2 H(2 - 2^{2H-1}) t^{2H-1}] \frac{\partial^2 U}{\partial V_t \partial S_t} dt.
\end{aligned}$$

将上述两个式子带入(3.5), 可得

$$d\Pi = A dt + \delta B dt + \left( \frac{\partial M}{\partial S_t} + \delta \frac{\partial U}{\partial S_t} + \psi \right) dS_t + \left( \frac{\partial M}{\partial V_t} + \delta \frac{\partial U}{\partial V_t} \right) dV_t. \quad (3.6)$$

其中

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\partial M}{\partial t} + V_t S_t^2 (a^2 + b^2 H(2 - 2^{2H-1}) t^{2H-1}) \frac{\partial^2 M}{\partial S_t^2} \\
&\quad + V_t \sigma^2 (a^2 + b^2 H(2 - 2^{2H-1}) t^{2H-1}) \frac{\partial^2 M}{\partial V_t^2} \\
&\quad + \sigma V_t S_t \rho [a^2 + b^2 \cdot 2H(2 - 2^{2H-1}) t^{2H-1}] \frac{\partial^2 M}{\partial V_t \partial S_t}, \\
B &= \frac{\partial U}{\partial t} + V_t S_t^2 (a^2 + b^2 H(2 - 2^{2H-1}) t^{2H-1}) \frac{\partial^2 U}{\partial S_t^2} \\
&\quad + V_t \sigma^2 (a^2 + b^2 H(2 - 2^{2H-1}) t^{2H-1}) \frac{\partial^2 U}{\partial V_t^2} \\
&\quad + \sigma V_t S_t \rho [a^2 + b^2 \cdot 2H(2 - 2^{2H-1}) t^{2H-1}] \frac{\partial^2 U}{\partial V_t \partial S_t}.
\end{aligned}$$

在这个交易策略中, 为了对冲掉股票价格和波动率风险, 必须得保证

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M}{\partial S_t} + \delta \frac{\partial U}{\partial S_t} + \psi &= 0, \\
\frac{\partial M}{\partial V_t} + \delta \frac{\partial U}{\partial V_t} &= 0.
\end{aligned}$$

于是解得

$$\psi = \frac{\partial M}{\partial V_t} / \frac{\partial U}{\partial V_t} \cdot \frac{\partial U}{\partial S_t} - \frac{\partial M}{\partial S_t}, \quad (3.7)$$

$$\delta = -\frac{\partial M}{\partial V_t} / \frac{\partial U}{\partial V_t}. \quad (3.8)$$

$$d\Pi = A dt + \delta B dt. \quad (3.9)$$

又由基本假设条件可知, 组合的收益为无风险收益  $r$ , 满足

$$d\Pi = r\Pi dt = r(M_t + \psi S_t + \delta U_t) dt. \quad (3.10)$$

由(3.9)和(3.10)式整理可得到

$$rM_t + r\psi S_t + r\delta U_t = A + \delta B \quad (3.11)$$

将(3.7)和(3.8)式代入(3.11)式,得

$$rM_t + rS_t \left( \frac{\partial M}{\partial V_t} / \frac{\partial U}{\partial V_t} \cdot \frac{\partial U}{\partial S_t} - \frac{\partial M}{\partial S_t} \right) + r \left( \frac{\partial M}{\partial V_t} / \frac{\partial U}{\partial V_t} \right) U_t = A + \left( -\frac{\partial M}{\partial V_t} / \frac{\partial U}{\partial V_t} \right) B, \quad (3.12)$$

接着在(3.12)式的左右两边同时乘以  $\frac{\partial U}{\partial V_t}$

$$\frac{A - rM_t + rS_t \frac{\partial M}{\partial S_t}}{\frac{\partial M}{\partial V_t}} = \frac{B - rU_t + rS_t \frac{\partial U}{\partial S_t}}{\frac{\partial U}{\partial V_t}} \quad (3.13)$$

成立. 借鉴 Heston<sup>[12]</sup>的思想, 假设函数  $h$  满足如下表达式

$$h(t, S_t, V_t) = -\kappa(\theta - V_t) + \lambda(t, S_t, V_t). \quad (3.14)$$

$\lambda(t, S_t, V_t)$  是市场波动率的风险价格, 然后将(3.14)式代入(3.13)式的左侧, 得到

$$[-\kappa(\theta - V_t) + \lambda(t, S_t, V_t)] \frac{\partial U}{\partial V_t} = B - rU_t + rS_t, \quad (3.15)$$

将  $B$  代入(3.15)式, 整理可得

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U}{\partial t} + rS_t \frac{\partial U}{\partial S_t} + V_t S_t^2 (a^2 + b^2 H(2 - 2^{2H-1}) t^{2H-1}) \frac{\partial^2 U}{\partial S_t^2} \\ & + V_t \sigma^2 (a^2 + b^2 H(2 - 2^{2H-1}) t^{2H-1}) \frac{\partial^2 U}{\partial V_t^2} + [\kappa(\theta - V_t) - \lambda(t, S_t, V_t)] \frac{\partial U}{\partial V_t} \\ & + \sigma S_t V_t \rho [a^2 + 2b^2 H(2 - 2^{2H-1}) t^{2H-1}] \frac{\partial^2 U}{\partial V_t \partial S_t} - rU = 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

当到期日为  $T$ , 敲定价格为  $K$  时, 欧式看涨期权满足偏微分方程(3.16)且遵循下面的边界条件

$$\left\{ \begin{array}{l} U(S_t, V_t, T) = \max(S_t - K, 0), \\ U(0, V_t, t) = 0, \\ U(S_t, \infty, t) = S_t, \\ \frac{\partial U}{\partial S_t}(\infty, V_t, t) = 1, \\ \frac{\partial U}{\partial t}(S_t, 0, t) + rS_t \frac{\partial U}{\partial S_t}(S_t, 0, t) + \kappa\theta \frac{\partial U}{\partial V_t}(S_t, 0, t) - rU(S_t, 0, t) = 0, \end{array} \right. \quad (3.17)$$

令  $x = \ln S$ , 对(3.16)式利用进行简单变形, 可得

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial U}{\partial t} + [r - V_t(a^2 + b^2H(2 - 2^{2H-1})t^{2H-1})] \frac{\partial U}{\partial x} \\
& \quad + V_t(a^2 + b^2H(2 - 2^{2H-1})t^{2H-1}) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \\
& \quad + V_t\sigma^2(a^2 + b^2H(2 - 2^{2H-1})t^{2H-1}) \frac{\partial^2 U}{\partial V_t^2} + [\kappa(\theta - V_t) - \lambda V_t] \frac{\partial U}{\partial V_t} \\
& \quad + \sigma V_t\rho[a^2 + b^2H(2 - 2^{2H-1})t^{2H-1}] \frac{\partial^2 U}{\partial V_t \partial x} - rU = 0. \quad (3.18)
\end{aligned}$$

引理 1 得到了混合高斯 Heston 随机波动模型的偏微分方程. 混合高斯 Heston 模型股票价格满足的随机微分方程有唯一解, 同样, 股价波动率满足的随机微分方程也有唯一解.

**定理 2** 满足混合高斯 Heston 模型的波动率方程有唯一解  $V_t$  且  $V_t > 0$ , 其中  $t \in [0, T]$ .

**证明:** 首先, 证明满足方程(3.2)解的唯一性. 假设  $W(t, \omega)$  和  $O(t, \omega)$  满足方程(3.2), 得到

$$W(t, \omega) = O(t, \omega), t \in [0, T].$$

又  $W(0, \omega) = W, O(t, \omega) = O$ , 因此

$$\begin{aligned}
& E[|W(t, \omega) - O(t, \omega)|^2] \\
& = E \left[ \left| W - O + \int_0^t (-\kappa(W_s - O_s)) ds + \int_0^t \sigma(\sqrt{W_s} - \sqrt{O_s}) dM_s^H \right|^2 \right] \\
& \leq 3E[|W - O|^2] + 3E \left[ \left( \int_0^t (\kappa(W_s - O_s)) ds \right)^2 \right] \\
& \quad + 6a^2 E \left[ \left( \int_0^t \sigma \left( \frac{W_s - O_s}{\sqrt{W_s} + \sqrt{O_s}} \right) dB_s \right)^2 \right] + 6b^2 E \left[ \left( \int_0^t \sigma \left( \frac{W_s - O_s}{\sqrt{W_s} + \sqrt{O_s}} \right) dM_s^H \right)^2 \right] \\
& \leq 3E[|W - O|^2] + 3\kappa^2 t E \left[ \int_0^t (W_s - O_s)^2 ds \right] + 6a^2 \sigma^2 E \left[ \int_0^t \left( \frac{W_s - O_s}{\sqrt{W_s} + \sqrt{O_s}} \right)^2 ds \right] \\
& \quad + 6b^2 \cdot 2H(2 - 2^{2H-1})t^{2H-1} \sigma^2 E \left[ \int_0^t \left( \frac{W_s - O_s}{\sqrt{W_s} + \sqrt{O_s}} \right)^2 ds \right] \\
& \leq 3E[|W - O|^2] + 3\kappa^2 t E \left[ \int_0^t (W_s - O_s)^2 ds \right] \\
& \quad + [6a^2 + 6b^2 \cdot 2H(2 - 2^{2H-1})t^{2H-1}] \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} E \left[ \int_0^t (W_s - O_s)^2 ds \right]
\end{aligned}$$

$$\leq 3E[|W - O|^2] + \left\{ 3\kappa^2 t + [6a^2 + 6b^2 \cdot 2H(2 - 2^{2H-1})t^{2H-1}] \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \right\}.$$

$$\int_0^t E[|W(s, \omega) - O(s, \omega)|^2] ds.$$

其中  $\varepsilon = \min\{\sqrt{W_t} + \sqrt{O_t} | t \in [0, T]\}$ .

令

$$C_t = E[|W(t, \omega) - O(t, \omega)|^2],$$

$$D = 3E[|W - O|^2],$$

$$F = 3\kappa^2 t + [6a^2 + 6b^2 \cdot 2H(2 - 2^{2H-1})t^{2H-1}] \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2},$$

由定义 2.6(格朗沃尔不等式)有

$$C_t = D + F \int_0^t C_s ds \leq D e^{At}$$

成立, 当  $t = 0$  时, 就有  $W = W(0, \omega) = O(0, \omega) = O$ , 因此解的唯一性证毕.

其次, 证明满足方程(3.2)解的存在性. 定义  $W_t^0 = Z_0$  和  $W_t^{(k)} = W_t^{(k)}(\omega)$ , 由归纳法得

$$W_t^{(k+1)} = Z_0 + \int_0^t \kappa(\theta - W_s^{(k)}) ds + \int_0^t \sigma \sqrt{W_s^{(k)}} dM_s^H.$$

则有

$$\begin{aligned} L_1 &= E \left[ |W_t^{(1)} - W_t^{(0)}|^2 \right] \\ &= E \left[ \left| \int_0^t \kappa(\theta - Z_0) ds + \int_0^t \sigma \sqrt{Z_0} dM_s^H \right|^2 \right] \\ &\leq 2E \left( \int_0^t \kappa(\theta - Z_0) ds \right)^2 + 2E \left( \int_0^t \sigma \sqrt{Z_0} dM_s^H \right)^2 \\ &\leq 2\kappa^2 t E \left[ \int_0^t (\theta - Z_0)^2 ds \right] + 2E \left[ a^2 \left( \int_0^t \sigma \sqrt{Z_0} dB_s \right)^2 + b^2 \left( \int_0^t \sigma \sqrt{Z_0} d\xi_s^H \right)^2 \right] \\ &\leq 4\kappa^2 t^2 (\theta^2 + E(|Z_0|)^2) + 2\sigma^2 [a^2 t + b^2 \cdot 2H(2 - 2^{2H-1})t^{2H-1}] E[|Z_0|] \\ &\leq G_1 t. \end{aligned}$$

其中  $G_1$  取决于  $T, E[|Z_0|], E(|Z_0|)^2$ . 通过上述归纳可得

$$L_{k+1} = E \left[ \left| W_t^{(k+1)} - W_t^{(k)} \right|^2 \right] \leq \frac{G_m^{k+1} t^{k+1}}{(k+1)!}, k \geq 0, t \in [0, T],$$

其中  $G_m$  也取决于  $T, E[|Z_0|], E(|Z_0|)^2$ .

因此, 序列  $L_{k+1} = L_1 + \sum_{i=1}^k (L_{i+1} - L_i)$  是绝对收敛于  $L^2$  范数, 可得解的存在性. 证毕.

定理 2 给出了混合高斯 Heston 模型波动率方程有唯一解, 下一结果提供了估计解的上确界范数, 即讨论解的  $p$  阶矩性质.

**定理 3** 假设  $S_t$  满足混合高斯 Heston 模型(3.1)的股票价格时, 对于所有的  $P > 0$  对任意一个  $\gamma > 2, T > 0$ , 都有  $E(|S_t|^P) < \infty$  成立.

**证明:** 借鉴了定理 2.3<sup>[13]</sup> 的证明思想. 假设  $V_t$  是方程(3.2)的一个解, 设  $X_t = V_t^\gamma$ , 可得

$$\begin{aligned} X_t &= V_0^\gamma + \gamma \int_0^t \kappa \left( \theta - X_u^{\frac{1}{\gamma}} \right) X_u^{1-\frac{1}{\gamma}} du + \gamma \int_0^t \sigma \sqrt{X_u^{\frac{1}{\gamma}} X_u^{1-\frac{1}{\gamma}}} dM_u^H \\ &= V_0^\gamma + \gamma \kappa \theta \int_0^t X_u^{1-\frac{1}{\gamma}} du - \gamma \kappa \int_0^t X_u du + \gamma \sigma \int_0^t X_u^{1-\frac{1}{2\gamma}} dM_u^H. \end{aligned}$$

设  $s < t$  有

$$|X_t - X_s| \leq \gamma \kappa \theta \left| \int_s^t X_u^{1-\frac{1}{\gamma}} du \right| + \gamma \kappa \left| \int_s^t X_u du \right| + \gamma \sigma \left| \int_s^t X_u^{1-\frac{1}{2\gamma}} dM_u^H \right|.$$

由定义 2.6 可得

$$\int_s^t X_u^{1-\frac{1}{\gamma}} du \leq \left( \|X\|_{s,t,\infty}^{1-\frac{1}{\gamma}} \right) (t-s),$$

$$\int_s^t X_u du \leq (\|X\|_{s,t,\infty}) (t-s).$$

由区间上分数积分计算产生了

$$\int_s^t X_u^{1-\frac{1}{2\gamma}} dM^H(u) = (-1)^\alpha \int_s^t D_{s^+}^\alpha X_u^{1-\frac{1}{2\gamma}} D_t^{1-\alpha} M_t^H(u) du.$$

其中  $\alpha \in (0,1), M_t^H(u) = M^H(u) - M^H(t), D_{s^+}^\alpha$  和  $D_t^{1-\alpha}$  分别表示阶  $\alpha$  和  $1-\alpha$  的左、右分数阶导数, 定义如下

$$D_{s^+}^\alpha X_u^{1-\frac{1}{2\gamma}} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left( \frac{X_u^{1-\frac{1}{2\gamma}}}{(u-s)^\alpha} + \alpha \int_s^u \frac{X_u^{1-\frac{1}{2\gamma}} - X_r^{1-\frac{1}{2\gamma}}}{(u-r)^{\alpha+1}} dr \right),$$

$$D_t^{1-\alpha} M_t^H(u) = \frac{(-1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \left( \frac{M^H(u) - M^H(t)}{(t-u)^{1-\alpha}} + (1-\alpha) \int_u^t \frac{M^H(u) - M^H(r)}{(r-u)^{2-\alpha}} dr \right).$$

$$\begin{aligned} \left| D_{s^+}^\alpha X_u^{1-\frac{1}{2\gamma}} \right| &\leq C_1 \left( \|X\|_{s,t,\infty}^{1-\frac{1}{2\gamma}} (u-s)^{-\alpha} + \int_s^u \frac{X_u^{1-\frac{1}{2\gamma}} - X_r^{1-\frac{1}{2\gamma}}}{(u-r)^{\alpha+1}} dr \right) \\ &\leq C_1 \left( \|X\|_{s,t,\infty}^{1-\frac{1}{2\gamma}} (u-s)^{-\alpha} + \frac{2}{\alpha} \|X\|_{s,t,\beta}^{1-\frac{1}{2\gamma}} (u-s)^{\beta(1-\frac{1}{2\gamma})-\alpha} \right). \end{aligned}$$

$$|D_t^{1-\alpha} M_t^H(u)| \leq C_2 (\|M^H\|_{s,t,\infty} (t-u)^{\alpha-1} + \|M^H\|_{0,T,\beta} (t-u)^{\alpha+\beta-1}).$$

其中  $C_1$ 、 $C_2$  是取决于  $\alpha, \beta, t$  的常数. 因此, 有

$$\begin{aligned} &\left| \int_s^t X_u^{1-\frac{1}{2\gamma}} dM^H(u) \right| \\ &\leq C \int_s^t \left( \|X\|_{s,t,\infty}^{1-\frac{1}{2\gamma}} (u-s)^{-\alpha} + \|X\|_{s,t,\beta}^{1-\frac{1}{2\gamma}} (u-s)^{\beta(1-\frac{1}{2\gamma})-\alpha} \right) (\|M^H\|_{s,t,\infty} (t-u)^{\alpha-1} \\ &\quad + \|M^H\|_{0,T,\beta} (t-u)^{\alpha+\beta-1}) du \\ &\leq C \left( \|X\|_{s,t,\infty}^{1-\frac{1}{2\gamma}} (t-s)^\beta + \|X\|_{s,t,\beta}^{1-\frac{1}{2\gamma}} (t-s)^{\beta(2-\frac{1}{2\gamma})} \right) (\|M^H\|_{s,t,\infty} + \|M^H\|_{0,T,\beta}). \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned} |X_t - X_s| &\leq \gamma \kappa \left( \theta \|X\|_{s,t,\infty}^{1-\frac{1}{\gamma}} + \|X\|_{s,t,\infty} \right) (t-s) + C \gamma \sigma (\|M^H\|_{0,T,\beta} + \|M^H\|_{s,t,\infty}) \\ &\quad \times \left( \|X\|_{s,t,\infty}^{1-\frac{1}{2\gamma}} (t-s)^\beta + \|X\|_{s,t,\beta}^{1-\frac{1}{2\gamma}} (t-s)^{\beta(2-\frac{1}{2\gamma})} \right). \end{aligned}$$

对所有的  $X > 0$  和  $\alpha \in (0,1)$ , 有不等式  $x^\alpha \leq 1 + x$  成立, 进一步可以改写为

$$\|X\|_{s,t,\beta} = \frac{|X_t - X_s|}{(t-s)^\beta}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \gamma\kappa \left( \|X\|_{s,t,\infty}^{1-\frac{1}{\gamma}} + \|X\|_{s,t,\infty} \right) (t-s)^{1-\beta} + C\gamma\sigma (\|M^H\|_{0,T,\beta} + \|M^H\|_{s,t,\infty}) \\
&\quad \times \left( \|X\|_{s,t,\infty}^{1-\frac{1}{2\gamma}} + \|X\|_{s,t,\beta}^{1-\frac{1}{2\gamma}} (t-s)^{\beta(1-\frac{1}{2\gamma})} \right) \\
&\leq \gamma\kappa (\theta(1 + \|X\|_{s,t,\infty}) + \|X\|_{s,t,\infty}) (t-s)^{1-\beta} + C\gamma\sigma (\|M^H\|_{0,T,\beta} + \|M^H\|_{s,t,\infty}) \\
&\quad \times \left( (1 + \|X\|_{s,t,\infty}) + (1 + \|X\|_{s,t,\beta}) (t-s)^{\beta(1-\frac{1}{2\gamma})} \right).
\end{aligned}$$

即意味着

$$\begin{aligned}
&\left[ 1 - C\gamma\sigma (\|M^H\|_{0,T,\beta} + \|M^H\|_{s,t,\infty}) (t-s)^{\beta(1-\frac{1}{2\gamma})} \right] \|X\|_{s,t,\beta} \\
&\leq \gamma\kappa (\theta(1 + \|X\|_{s,t,\infty}) + \|X\|_{s,t,\infty}) (t-s)^{1-\beta} + C\gamma\sigma (\|M^H\|_{0,T,\beta} + \|M^H\|_{s,t,\infty}) \times \\
&\quad \left( (1 + \|X\|_{s,t,\infty}) + (t-s)^{\beta(1-\frac{1}{2\gamma})} \right).
\end{aligned}$$

假设 $\Delta_1$ 满足

$$\Delta_1 = \left( \frac{1}{2C\gamma\sigma (\|M^H\|_{0,T,\beta} + \|M^H\|_{s,t,\infty})} \right)^{\frac{2\gamma}{\beta(2\gamma-1)}},$$

对于所有的 $s, t \in [0, T], s \leq t$ , 使得 $t-s \leq \Delta_1$ , 有

$$\begin{aligned}
&\|X\|_{s,t,\beta} \leq 2\gamma\kappa (\theta(1 + \|X\|_{s,t,\infty}) + \|X\|_{s,t,\infty}) (t-s)^{1-\beta} + 2C\gamma\sigma (1 + \|X\|_{s,t,\infty}) + 1. \\
&\|X\|_{s,t,\infty} \leq |X_s| + \|X\|_{s,t,\beta} (t-s)^\beta \\
&\leq |X_s| + 2\gamma\kappa (\theta(1 + \|X\|_{s,t,\infty}) + \|X\|_{s,t,\infty}) (t-s) + 2C\gamma\sigma (1 + \|X\|_{s,t,\infty}) (t-s)^\beta \\
&\quad + (t-s)^\beta,
\end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}
&\|X\|_{s,t,\infty} \left[ 1 - 2\gamma\kappa (t-s)(\theta + 1) - 2C\gamma\sigma (t-s)^\beta \right] \\
&\leq |X_s| + 2\gamma\kappa \theta (t-s) + 2C\gamma\sigma (t-s)^\beta + (t-s)^\beta.
\end{aligned}$$

假设 $\Delta_2$ 满足

$$\Delta_2 = \Delta_1 \wedge \left( \frac{1}{8\gamma\kappa(\theta + 1)} \right) \wedge \left( \frac{1}{8C\gamma\sigma} \right)^{\frac{1}{\beta}},$$

对于所有的 $t \in [0, T], s < t$ , 使得 $t-s \leq \Delta_2$ , 意味着

$$\|X\|_{s,t,\infty} \leq 2|X_s| + C_{\gamma,\beta,\theta,T}.$$

其中,  $C_{\gamma,\beta,\theta,T} = 4\gamma\beta\theta T + 1/2 + 2T^\beta$ .

设  $n = \left\lceil \frac{T}{\Delta_2} \right\rceil + 1$ , 并且将区间  $[0, T]$  分割成  $n$  个子区间, 当  $s = 0, t = \Delta_2$ , 对所有的  $t \in [0, \Delta_2]$ , 上式变为

$$\|X\|_{0,t,\infty} \leq 2|X_0| + C_{\gamma,\beta,\theta,T}.$$

由递归可以得到

$$\|X\|_{0,T,\infty} \leq 2^n |X_0| + 2^{n-1} C_{\gamma,\beta,\theta,T}$$

$$\leq 2^T \left( 2C_{\gamma,\theta} (\|M^H\|_{0,T,\beta} + \|M^H\|_{s,t,\infty}) \right)^{\frac{2\lambda}{\beta(2\gamma-1)}} \sqrt[8\gamma\kappa(\theta-1)]{V(8C_{\gamma,\theta})^{\frac{1}{\beta}+1}} (|X_0| + C_{\gamma,\beta,\theta,T}).$$

因此可以得到

$$\|V\|_{0,T,\infty} \leq C_{1,\gamma,\beta,\theta,T} (|V_0| + 1) \exp \left\{ C_{2,\gamma,\beta,\theta,T} \left( 1 + (\|M^H\|_{0,T,\beta} + \|M^H\|_{s,t,\infty}) \right) \right\}.$$

对所有的  $P \geq 0$ , 对任意一个  $\gamma > 2, T > 0$ , 有  $E(|V_t|^P) < \infty$ . 当  $S_t$  满足混合高斯 Heston 模型时, 对于所有的  $P > 0$ , 都有  $E(|S_t|^P) < \infty$  成立. 证毕.

### 3.3 混合高斯 Heston 模型下的定价公式

引理 1 给出了混合高斯 Heston 随机波动模型下欧式看涨期权的价格所满足的偏微分方程, 通过求解该偏微分方程, 从而得到相应的定价公式.

**定理 4** 在混合高斯 Heston 模型下, 到期日为  $T$ , 敲定价格为  $K$ , 股票价格和波动率满足(3.1)-(3.3)式的欧式看涨期权在  $t(t \in [0, T])$  时刻的价格  $C(S_t, t)$  满足如下方程

$$C(S_t, t) = S_t P_1 - K e^{-r(T-t)} P_2,$$

其中

$$P_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\varphi \ln K h(\varphi-i)}}{i\varphi h(-i)} d\varphi.$$

$$P_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\varphi) \frac{e^{-i\varphi \ln K}}{i\varphi} d\varphi.$$



证明：根据 Heston<sup>[12]</sup>的证明过程, 首先假设该模型和经典 B-S 模型有近似的解:

$$C(S_t, V_t, t) = S_t P_1 - K e^{-r\tau} P_2, \quad (3.19)$$

其中,  $\tau = T - t$ ,  $r$ 代表无风险利率,  $P_1, P_2$ 表示概率分布函数.

根据欧式看涨期权的定价公式:

$$\begin{aligned} C(S_T, K) &= e^{-r\tau} E^Q[(S_T - K)^+] \\ &= e^{-r\tau} E^Q[(S_T - K)1_{S_T > K}] \\ &= e^{-r\tau} E^Q[S_T 1_{S_T > K}] - K e^{-r\tau} E^Q[1_{S_T > K}] \end{aligned} \quad (3.20)$$

其中,  $1_{S_T > K}$ 表示示性函数,  $E^Q[1_{S_T > K}]$ 表示在风险中性测度 $Q$ 下 $S_T > K$ 的概率并且有下式成立

$$E^Q[1_{S_T > K}] = Q(S_T > K) = Q(\ln S_T > \ln K) = P_2.$$

为了计算(3.20)式的第一项 $E^Q[S_T 1_{S_T > K}]$ ,要进行相应的测度变换, 由定义 2.9 可知, 测度 $Q$ 和测度 $Q^S$ 满足关系

$$\frac{dQ}{dQ^S} = \frac{B_T/B_t}{S_T/S_t} = \frac{E^Q[e^{xT}]}{e^{xT}} \quad (3.21)$$

其中,  $Q$ 指的是风险中性测度,  $Q^S$ 表示由 Radon-Nikondym 测度变换得到的另一个新的测度,  $B_t = \exp\left(\int_0^t r du\right) = e^{rt}$ .

对(3.21)式进行简单整理, 有

$$\frac{e^{rT}/e^{rt}}{S_T/S_t} = \frac{e^{-r(T-t)}S_t}{S_T} = \frac{e^{-r\tau}S_t}{S_T} = \frac{E^Q[e^{xT}]}{e^{xT}} = \frac{E^Q[e^{xT}]}{S_T} \quad (3.22)$$

继续整理上式得到

$$e^{r\tau}S_t = E^Q[e^{xT}].$$

在(3.20)中, 式子

$$\begin{aligned} e^{-r\tau} E^Q[S_T 1_{S_T > K}] &= e^{-r\tau} E^Q[e^{xT} 1_{S_T > K}] \\ &= e^{-r\tau} E^Q\left[E^Q(e^{xT}) \frac{S_T/S_t}{B_T/B_t} 1_{S_T > K}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-r\tau} E^Q \left[ e^{r\tau} S_t \frac{S_T/S_t}{B_T/B_t} 1_{S_T > K} \right] \\
&= S_t E^Q \left[ \frac{dQ^S}{dQ} 1_{S_T > K} \right] \\
&= S_t E^{Q^S} [1_{S_T > K}]
\end{aligned}$$

从而  $P_1 = E^{Q^S} [1_{S_T > K}] = Q^S(S_T > K)$ , 指的是经过 Radon-Nikodym 测度变换得到新的测度  $Q^S$  下  $S_T > K$  的概率。

为方便计算, 令  $S_t = e^x$  此时欧式看涨期权的价格为

$$C(K, \tau) = e^x P_1 - K e^{-r\tau} P_2. \quad (3.23)$$

对(3.23)式关于  $t, x, V_t$  分别求其一阶、二阶偏导数, 展开有

$$\frac{\partial C}{\partial t} = e^x \frac{\partial P_1}{\partial t} - K e^{-r\tau} \left( \frac{\partial P_2}{\partial t} + r P_2 \right), \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial C}{\partial x} = e^x \left( \frac{\partial P_1}{\partial x} + P_1 \right) - K e^{-r\tau} \left( \frac{\partial P_2}{\partial x} \right), \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = e^x \left( \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial P_1}{\partial x} + P_1 \right) - K e^{-r\tau} \left( \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} \right), \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial C}{\partial V_t} = e^x \frac{\partial P_1}{\partial V_t} - K e^{-r\tau} \left( \frac{\partial P_2}{\partial V_t} \right), \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial V_t^2} = e^x \frac{\partial^2 P_1}{\partial V_t^2} - K e^{-r\tau} \frac{\partial^2 P_2}{\partial V_t^2}, \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x \partial V_t} = e^x \left( \frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial V_t} + \frac{\partial P_1}{\partial V_t} \right) - K e^{-r\tau} \frac{\partial^2 P_2}{\partial x \partial V_t}. \quad (3.29)$$

将(3.24)-(3.29)式代入(3.18)式, 整理得到偏微分方程

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial P_i}{\partial t} + (r + c_i V_t) \frac{\partial P_i}{\partial x} + V_t [a^2 + b^2 \cdot H(2 - 2^{2H-1}) t^{2H-1}] \frac{\partial^2 P_i}{\partial x^2} + (\kappa \theta - f_i V_t) \frac{\partial P_i}{\partial V_t} \\
&\quad + \sigma^2 V_t [a^2 + b^2 \cdot H(2 - 2^{2H-1}) t^{2H-1}] \frac{\partial^2 P_i}{\partial V_t^2} \\
&\quad + \sigma \rho V_t [a^2 + b^2 \cdot 2H(2 - 2^{2H-1}) t^{2H-1}] \frac{\partial^2 P_i}{\partial x \partial V_t} = 0. \quad (3.30)
\end{aligned}$$

其中,  $i = 1, 2$ ,

$$\begin{aligned}
c_1 &= a^2 + b^2 \cdot H(2 - 2^{2H-1}) t^{2H-1}, \\
c_2 &= -[a^2 + b^2 \cdot H(2 - 2^{2H-1}) t^{2H-1}],
\end{aligned}$$

$$f_1 = \kappa + \lambda - \sigma\rho[a^2 + b^2 \cdot 2H(2 - 2^{2H-1})t^{2H-1}],$$

$$f_2 = \kappa + \lambda.$$

然而 $P_1, P_2$ 的求解很困难, 因此我们需要借助特征函数, 假设用 $g(\varphi)$ 来表示 $P_2$ 的特征函数, 用 $q(x)$ 来表示 $P_2$ 的密度函数, 则

$$q(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\varphi x} g(\varphi) d\varphi, \quad (3.31)$$

$$g(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\varphi x} q(x) dx, \quad (3.32)$$

根据

$$P_2 = E^Q[1_{S_T > K}] = Q(S_T > K) = Q(\ln S_T > \ln K) = Q(x_T > \ln K),$$

可得

$$\begin{aligned} P_2 &= \int_{\ln K}^{+\infty} q(x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\ln K}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\varphi x} g(\varphi) d\varphi \right) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\ln K}^{+\infty} g(\varphi) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\varphi x} dx \right) d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\varphi) \frac{e^{-i\varphi \ln K}}{i\varphi} d\varphi - \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\varphi) \frac{e^{-i\varphi R}}{i\varphi} d\varphi \end{aligned} \quad (3.33)$$

现在对(3.33)式中的第二项进行整理, 将(3.32)式代入得

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\varphi) \frac{e^{-i\varphi R}}{i\varphi} d\varphi &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\varphi x} q(x) dx \right) \frac{e^{-i\varphi R}}{i\varphi} d\varphi \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} q(x) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\varphi(x-R)}}{i\varphi} d\varphi \right) dx \end{aligned} \quad (3.34)$$

根据欧拉公式 $e^{-i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ 展开有

$$e^{i\varphi(x-R)} = \cos(\varphi(x-R)) + i\sin(\varphi(x-R)), \quad (3.35)$$

将(3.35)式代入(3.34)式, 同时由其奇偶性得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\varphi(x-R)}}{i\varphi} d\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\varphi(x-R)) + i\sin(\varphi(x-R))}{i\varphi} d\varphi$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\varphi(x-R))}{\varphi} d\varphi, \quad (3.36)$$

即(3.34)式变成了

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\varphi) \frac{e^{-i\varphi R}}{i\varphi} d\varphi \\ = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} q(x) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\varphi(x-R))}{\varphi} d\varphi \right) dx, \end{aligned} \quad (3.37)$$

由符号函数  $\text{sgn}(y) = \begin{cases} 1, y > 0 \\ 0, y = 0 \\ -1, y < 0 \end{cases}$  得到其积分表达式

$$\text{sgn}(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin yx}{x} dx,$$

代入可将(3.37)式变成

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\varphi) \frac{e^{-i\varphi R}}{i\varphi} d\varphi = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} q(x) \pi \text{sgn}(x-R) dx, \quad (3.38)$$

由文献[20]可得

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sgn}(x-y) q(x) dx &= \int_{-\infty}^y (-1 \cdot q(x)) dx + \int_y^{+\infty} 1 \cdot q(x) dx \\ &= -\int_{-\infty}^y q(x) dx + \int_{-\infty}^y q(x) dx \\ &= -Q(y) + 1 - Q(y) \\ &= 1 - 2Q(y). \end{aligned} \quad (3.39)$$

将(3.39)式代入(3.38)式, 整理得

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\varphi) \frac{e^{-i\varphi R}}{i\varphi} d\varphi = \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow +\infty} [1 - 2Q(R)] = -\frac{1}{2}, \quad (3.40)$$

最终

$$P_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\varphi) \frac{e^{-i\varphi \ln K}}{i\varphi} d\varphi.$$

由 Radon-Nikodym 定理可得

$$q^s(x) = \frac{e^x}{S_T} q(x),$$

且用它来表示  $P_1$  的密度函数, 用  $h(\varphi)$  表示  $P_1$  的特征函数, 则

$$q^s(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\varphi x} h(\varphi) d\varphi, \quad (3.41)$$

$$h(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\varphi x} q^s(x) dx = \frac{1}{S_T} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\varphi x} e^x q(x) dx, \quad (3.42)$$

而由(3.21)式有

$$S_T = E^Q[e^{xT}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^x q(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix(-i)} q(x) dx = h(-i), \quad (3.43)$$

将(3.43)式代入(3.42)式, 整理得到

$$\begin{aligned} h(\varphi) &= \frac{1}{h(-i)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\varphi x} e^x q(x) dx \\ &= \frac{1}{h(-i)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\varphi x + x} q(x) dx \\ &= \frac{1}{h(-i)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix(\varphi - i)} q(x) dx \\ &= \frac{h(\varphi - i)}{h(-i)}. \end{aligned}$$

从而可得

$$P_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\varphi \ln K} h(\varphi - i)}{i\varphi h(-i)} d\varphi. \quad (3.44)$$

将得到的两个式子 $P_1$ 和 $P_2$ 代入(3.30)式, 通过求解偏微分方程, 最终计算得到混合高斯 Heston 随机波动模型下的欧式看涨期权定价公式.

由期权看涨-看跌平价公式

$$C(S_t, t) + Ke^{-r(T-t)} = P(S_t, t) + S_t.$$

同样可得混合高斯 Heston 随机波动模型下的欧式看跌期权定价公式.

如果在市场交易过程中, 存在红利率 $q$ , 看涨期权的式子相应变为

$$C(S_t, t) = S_t e^{-q(T-t)} P_1 - Ke^{-r(T-t)} P_2.$$

证毕.

## 4 双混合分数 Heston 模型解的存在唯一性

在随机波动模型中, 市场的波动是随机的且风险资产收益具有比正态分布更厚的尾部, 然而实证研究和历史数据表明, 对于到期日较短的期权来说, 单因素随机波动率模型虽然可以捕捉微笑的斜率, 但它无法解释其水平和坡度随时间变化的独立波动问题, 所以为了更好的拟合短期期权, 我们使用双因素随机波动率模型进行建模, 即双 Heston 随机波动模型. 这些因素与市场收益具有明显的相关性, 并且因子的权重随时间变化, 使得该模型在波动率和股票收益之间产生随机相关性, 此模型是能够表现出“波动率微笑”的简单且有用的模型之一, 它比 Heston 模型更能够兼容真实市场. 因此, 下面用带有两因子波动的双混合分数 Heston 模型来建模, 从而得到双混合分数 Heston 模型下解的存在性和唯一性.

### 4.1 金融市场的基本假设

在风险中性假设下, 双混合分数 Heston 模型的资产价格遵循如下:

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_t dt + \sqrt{V_t^1} S_t dM_t^{1,H} + \sqrt{V_t^2} S_t dM_t^{2,H}, \\ dV_t^1 &= \kappa_1(\theta_1 - V_t^1)dt + \sigma_1 \sqrt{V_t^1} dM_t^{3,H}, V_0^1 > 0, \\ dV_t^2 &= \kappa_2(\theta_2 - V_t^2)dt + \sigma_2 \sqrt{V_t^2} dM_t^{4,H}, V_0^2 > 0, \\ dM_t^{1,H} dM_t^{3,H} &= \rho_1, \\ dM_t^{2,H} dM_t^{4,H} &= \rho_2, \\ dM_t^{1,H} dM_t^{4,H} &= 0, \\ dM_t^{2,H} dM_t^{3,H} &= 0. \end{aligned}$$

其中,  $S_t$  是标的资产价格,  $r$  是利率,  $V_t^i, i = 1, 2$  是标的资产波动率,  $M_t^{1,H}, M_t^{3,H}$  是相关系数为  $\rho_1$  的混合分数布朗运动,  $M_t^{2,H}, M_t^{4,H}$  是相关系数为  $\rho_2$  的混合分数布朗运动, 参数  $\kappa_i, i = 1, 2$  是均值回复速率,  $\theta_i, i = 1, 2$  是波动率的长期均值,  $\sigma_i, i = 1, 2$  是波动率的波动率.

## 4.2 解的存在唯一性

尽管 Heston 模型比经典 B-S 模型更适应真实市场,但是它没有长相依性,这一部分用混合分数布朗运动过程代替布朗运动过程并且表明方程有唯一解.

**定理5** 假设  $T > 0$ , 系数  $f, g, h$  满足定义 2.7 (局部 Lipschitz 条件) 和定义 2.8 (线性增长条件), 随机微分方程

$$dS_t = f(t, S_t, V_t^1, V_t^2)dt + g(t, S_t, V_t^1, V_t^2)dM_t^{1,H} + h(t, S_t, V_t^1, V_t^2)dM_t^{2,H},$$

有唯一解  $S$ , 且  $V_t^1, V_t^2 > 0$ , 其中  $t \in [0, T]$ .

**证明:** 首先, 证明方程解的唯一性. 假设  $S^1(t, \omega)$  和  $S^2(t, \omega)$  是满足方程的两个解且  $S^1(0, \omega) = z_1, S^2(0, \omega) = z_2$ , 因此有

$$\begin{aligned} E[|S_t^1 - S_t^2|^2] &= E \left[ \left| z_1 - z_2 + \int_0^t (f(u, S_u^1, V_u^1, V_u^2) - f(u, S_u^2, V_u^1, V_u^2)) du \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_0^t (g(u, S_u^1, V_u^1, V_u^2) - g(u, S_u^2, V_u^1, V_u^2)) dM_u^{1,H} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_0^t (h(u, S_u^1, V_u^1, V_u^2) - h(u, S_u^2, V_u^1, V_u^2)) dM_u^{2,H} \right|^2 \right] \\ &\leq E \left[ 4|z_1 - z_2|^2 + 4 \left| \int_0^t (f(u, S_u^1, V_u^1, V_u^2) - f(u, S_u^2, V_u^1, V_u^2)) du \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + 4 \left| \int_0^t (g(u, S_u^1, V_u^1, V_u^2) - g(u, S_u^2, V_u^1, V_u^2)) dM_u^{1,H} \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + 4 \left| \int_0^t (h(u, S_u^1, V_u^1, V_u^2) - h(u, S_u^2, V_u^1, V_u^2)) dM_u^{2,H} \right|^2 \right] \end{aligned}$$

对上式用詹森不等式和 Itô 等距公式, 有

$$\begin{aligned}
E[|S_t^1 - S_t^2|^2] &\leq 4E[|z_1 - z_2|^2] + 4tE \left[ \int_0^t (f(u, S_u^1, V_u^1, V_u^2) - f(u, S_u^2, V_u^1, V_u^2))^2 du \right] \\
&\quad + 4(\alpha^2 + \beta^2 \cdot 2Ht^{2H-1}) \\
&\quad \cdot E \left[ \int_0^t (g(u, S_u^1, V_u^1, V_u^2) - g(u, S_u^2, V_u^1, V_u^2))^2 du \right] \\
&\quad + 4(\alpha^2 + \beta^2 \cdot 2Ht^{2H-1}) \\
&\quad \cdot E \left[ \int_0^t (h(u, S_u^1, V_u^1, V_u^2) - h(u, S_u^2, V_u^1, V_u^2))^2 du \right] \\
&\leq 4E[|z_1 - z_2|^2] + 4t \cdot C \int_0^t E[|S_u^1 - S_u^2|^2] du + 4(\alpha^2 + \beta^2 \cdot 2Ht^{2H-1}) \\
&\quad \cdot C \int_0^t E[|S_u^1 - S_u^2|^2] du + 4(\alpha^2 + \beta^2 \cdot 2Ht^{2H-1}) \\
&\quad \cdot C \int_0^t E[|S_u^1 - S_u^2|^2] du
\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}
G_t &= E[|S_t^1 - S_t^2|^2], \\
D &= 4E[|z_1 - z_2|^2], \\
F &= 4C(t + \alpha^2 + 2\beta^2 + 2Ht^{2H-1}),
\end{aligned}$$

由定义 2.6 有

$$G_t \leq D + F \int_0^t G_u du \leq De^{Ft}$$

成立, 可得方程解的唯一性. 证毕.

其次, 证明方程解的存在性. 定义  $S_t^{(0)} = S_0$  和  $S_t^{(k)} = S_t^{(k)}(\omega)$ , 由归纳法得:

$$\begin{aligned}
S_t^{(k+1)} &= S_0 + \int_0^t f(u, S_u^{(k)}, V_u^1, V_u^2) du \\
&\quad + \int_0^t g(u, S_u^{(k)}, V_u^1, V_u^2) dM_u^{1,H} + \int_0^t h(u, S_u^{(k)}, V_u^1, V_u^2) dM_u^{2,H}.
\end{aligned}$$

类似于得到唯一性的计算, 有

$$L_1 = E \left[ |S_t^{(1)} - S_t^{(0)}|^2 \right]$$



$$\begin{aligned}
&= E \left[ \left| S_0 + \int_0^t f(u, S_u^{(0)}, V_u^1, V_u^2) du + \int_0^t g(u, S_u^{(0)}, V_u^1, V_u^2) dM_u^{1,H} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_0^t h(u, S_u^{(0)}, V_u^1, V_u^2) dM_u^{2,H} - S_0 \right|^2 \right] \\
&= E \left[ \left| \int_0^t f(u, S_u^{(0)}, V_u^1, V_u^2) du + \int_0^t g(u, S_u^{(0)}, V_u^1, V_u^2) dM_u^{1,H} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_0^t h(u, S_u^{(0)}, V_u^1, V_u^2) dM_u^{2,H} \right|^2 \right] \\
&\leq 3tE \left[ \int_0^t \left( f(u, S_u^{(0)}, V_u^1, V_u^2) \right)^2 du \right] \\
&\quad + 3(\alpha^2 + \beta^2 \cdot 2Ht^{2H-1})E \left[ \int_0^t \left( g(u, S_u^{(0)}, V_u^1, V_u^2) \right)^2 du \right] \\
&\quad + 3(\alpha^2 + \beta^2 \cdot 2Ht^{2H-1})E \left[ \int_0^t \left( h(u, S_u^{(0)}, V_u^1, V_u^2) \right)^2 du \right] \\
&\leq 3t^2C(1 + E[|S_0|^2 + |V_0^1|^2 + |V_0^2|^2]) + 3 \\
&\quad \times 2C(\alpha^2 + \beta^2 \cdot 2Ht^{2H-1})(1 + E[|S_0|^2 + |V_0^1|^2 + |V_0^2|^2]) \\
&\leq A_1 t,
\end{aligned}$$

其中 $A_1$ 取决于 $C, T, E[|S_0|^2 + |V_0^1|^2 + |V_0^2|^2]$ ,通过上述归纳可得:

$$L_{k+1} = E \left[ \left| S_t^{(k+1)} - S_t^{(k)} \right|^2 \right] \leq \frac{A_m^{k+1} t^{k+1}}{(k+1)!}, \quad k \geq 0, t \in [0, T],$$

其中 $A_m$ 也取决于 $C, T, E[|S_0|^2 + |V_0^1|^2 + |V_0^2|^2]$ ,因此, 序列 $L_{k+1} = L_1 + \sum_{i=1}^k (L_{i+1} - L_i)$ 是绝对收敛于 $L^2$ 范数, 方程解的存在性证毕.

下面用局部 Lipschitz 条件和线性增长条件来验证波动率方程解的存在性和唯一性, 波动方程满足均值回复混合 CIR 过程

$$dV_t^i = \kappa_i(\theta_i - V_t^i)dt + \sigma_i \sqrt{V_t^i} dM_t^{j,H}, j = 1, 2.$$

**推论 6** 假设波动率过程遵循 Feller 条件

$$\kappa_i \theta_i > \frac{\sigma_i^2}{2}, i = 1, 2,$$

则满足双混合分数 Heston 模型的波动率方程有唯一解 $V_t^i$ 且 $V_t^i > 0, i = 1, 2$ , 其中 $t \in [0, T]$ . 证明过程的思想类似定理 5 的证明, 故不做详细证明.

### 4.3 欧拉离散化

假设到期日  $T > 0$ , 在时间区间  $[0, T]$  上模拟双混合分数 Heston 模型满足的随机微分方程, 给定区间  $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$ , 时间增量为  $dt$ , 波动率过程为

$$dV_t^i = \kappa_i(\theta_i - V_t^i)dt + \sigma_i \sqrt{V_t^i} dM_t^{j,H}, j = 1, 2.$$

对上式左右两边积分如下

$$V_{t+dt}^i = V_t^i + \int_t^{t+dt} \kappa_i(\theta_i - V_u^i)du + \int_t^{t+dt} \sigma_i \sqrt{V_u^i} dM_u^{j,H}.$$

则波动方程离散化结果为

$$V_{t+dt}^i = V_t^i + \kappa_i(\theta_i - V_t^i)\Delta t + \sigma_i \sqrt{V_t^i} \Delta M_t^{j,H}.$$

其中  $\Delta M_t^{j,H} = M_{t+dt}^{j,H} - M_t^{j,H}, j = 1, 2$ , 由于 Feller 条件对连续时间过程是有效的, 而模拟在离散时间过程下进行, 仅仅是对连续时间过程的近似, 因此用完全截断方案保证波动过程是正的.

同理对资产价格过程离散化, 价格方程

$$dS_t = rS_t dt + \sqrt{V_t^1} S_t dM_t^{1,H} + \sqrt{V_t^2} S_t dM_t^{2,H},$$

设  $g(t, x) \in C^2([0, \infty) \times R), Y_t = g(t, X_t) = \ln S_t$  是伊藤过程, 选取  $X_t = S_t, g(t, x) = \ln x$ , 则

$$Y_t = g(t, X_t) = \ln S_t,$$

$$\begin{aligned} dY_t &= d\ln S_t = \left(0 + rS_t \cdot \frac{1}{S_t} dt + \frac{V_t^1 S_t^2}{2} \left(-\frac{1}{S_t^2}\right) dt + \frac{V_t^2 S_t^2}{2} \left(-\frac{1}{S_t^2}\right) dt\right) + V_t^1 S_t \\ &\quad \cdot \frac{1}{S_t} dM_t^{1,H} + V_t^2 S_t \cdot \frac{1}{S_t} dM_t^{2,H} \\ &= \left(rdt - \frac{V_t^1}{2} dt - \frac{V_t^2}{2} dt\right) + V_t^1 dM_t^{1,H} + V_t^2 dM_t^{2,H} \\ &= \left(r - \frac{V_t^1 + V_t^2}{2}\right) dt + V_t^1 dM_t^{1,H} + V_t^2 dM_t^{2,H}. \end{aligned}$$

对上式左右两边取积分如下

$$\ln S_{t+dt} = \ln S_t + \int_t^{t+dt} \left(r - \frac{V_u^1 + V_u^2}{2}\right) du + \int_t^{t+dt} V_u^1 dM_u^{1,H} + \int_t^{t+dt} V_u^2 dM_u^{2,H}.$$

则价格方程离散化结果为

$$S_{t+dt} = S_t \exp \left( \left( r - \frac{V_t^1 + V_t^2}{2} \right) dt + \sqrt{V_t^1} \Delta M_t^{1,H} + \sqrt{V_t^2} \Delta M_t^{2,H} \right).$$

其中  $\Delta M_t^{1,H} = M_{t+dt}^{1,H} - M_t^{1,H}$ ,  $\Delta M_t^{2,H} = M_{t+dt}^{2,H} - M_t^{2,H}$ .

我们可以基于欧拉离散去估计在双分数 Heston 模型下奇异期权的值以及验证其参数结果的有效性.

## 5 模拟分析

为了更进一步说明混合高斯 Heston 模型刻画期权标的价格变化的有效性,文章选取的是上证 50ETF,数据是 2017 年 7 月 3 号到 2018 年 12 月 29 日的日收盘价格(数据为 Wind 数据库数据)。

### 5.1 数据的统计特征

首先,对所选区间上的数据计算其对数收益率,接着对对数收益率的正态性进行检验,得到的结果如下图。

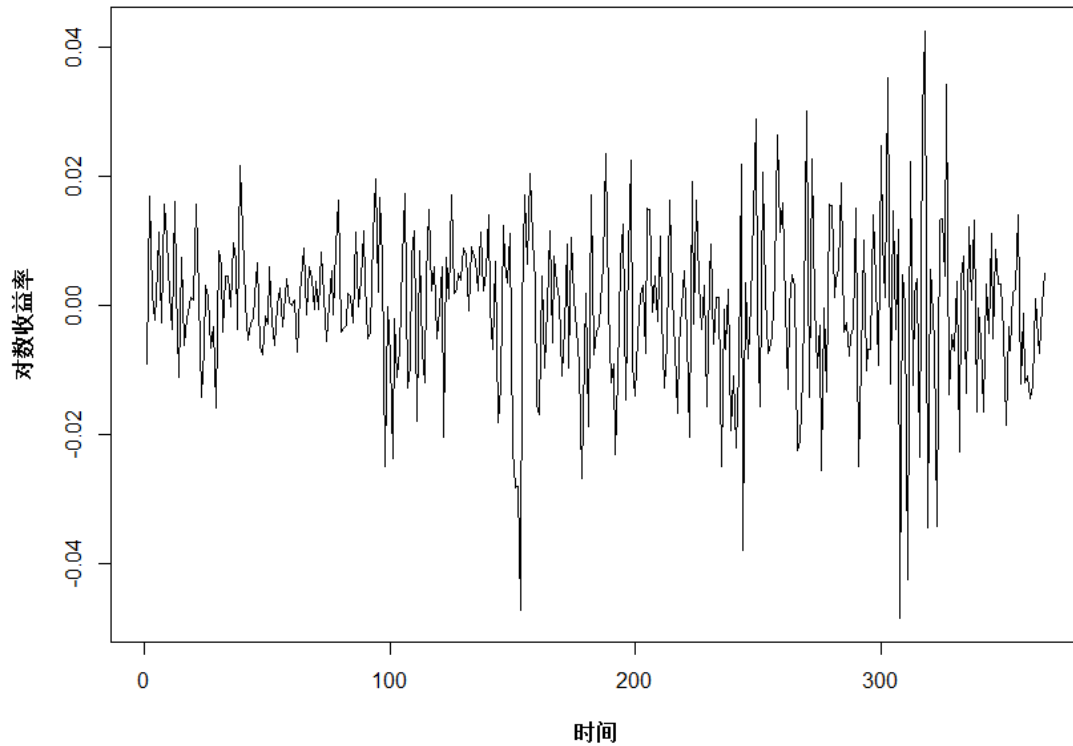


图 5.1 标的资产对数收益率

从图 5.1 可以看出,处于不同的时间段,波动率的大小不相同,说明收益率时间序列具有异方差性.很明显收益率的波动程度之间存在差异性,同时较大的波动率点相互作用在一起,说明具有波动集聚性。

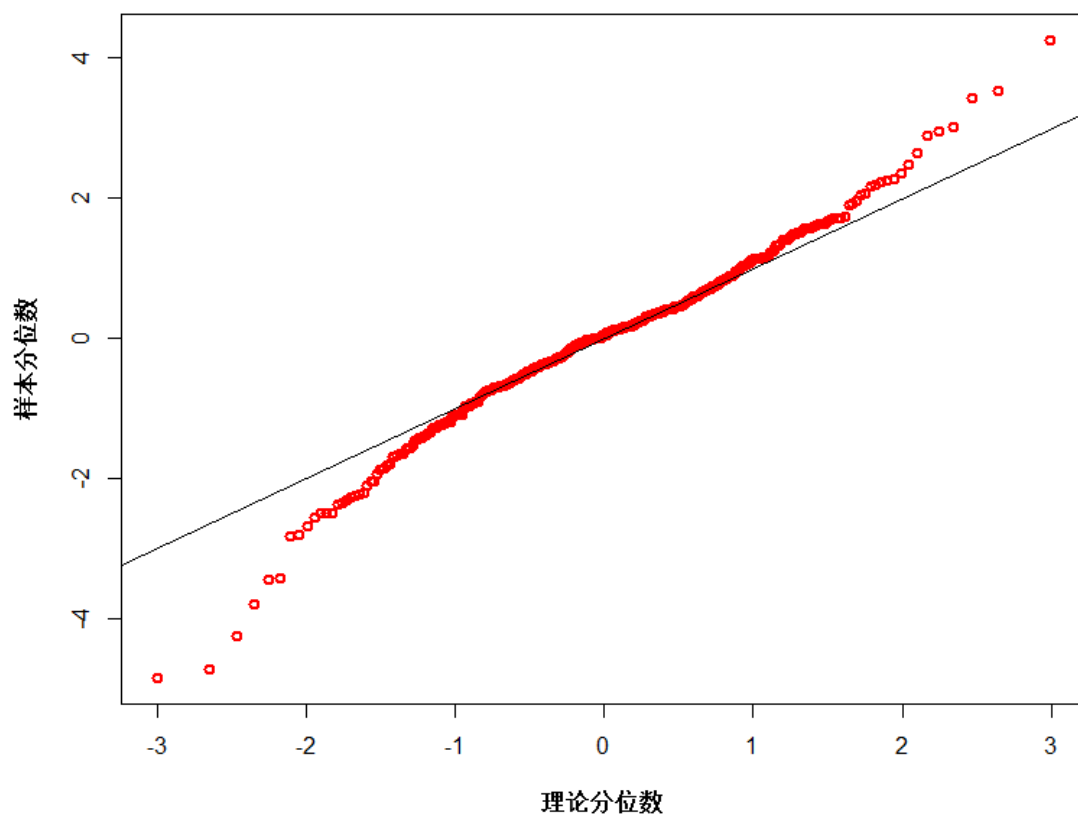


图 5.2 上证 50ETF 收益率 Q-Q 图

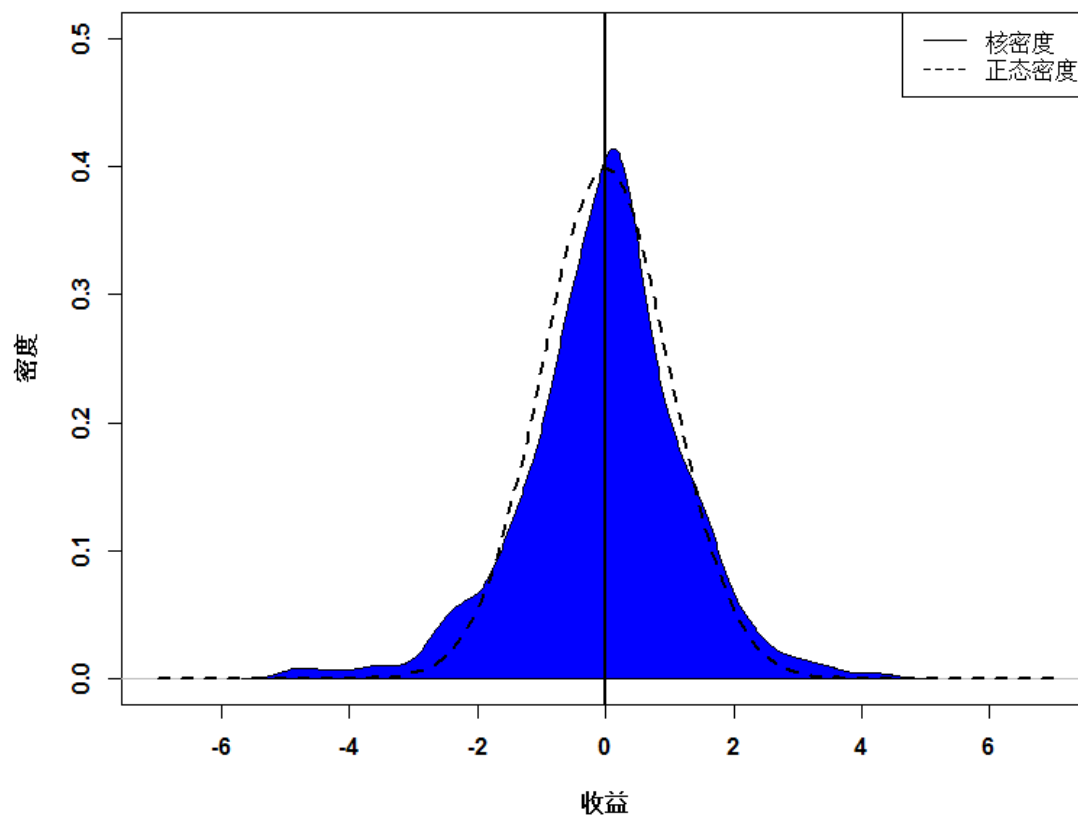


图 5.3 上证 50ETF 核密度曲线图

根据收益率的 Q-Q 图可得,除了中间的点与直线重合外,其余的点都偏离直线一定程度,故收益率序列不服从正态分布.从图 5.3 得到收益率的核密度曲线相比正态密度曲线具有尖峰、厚尾特性,且稍微向右偏.

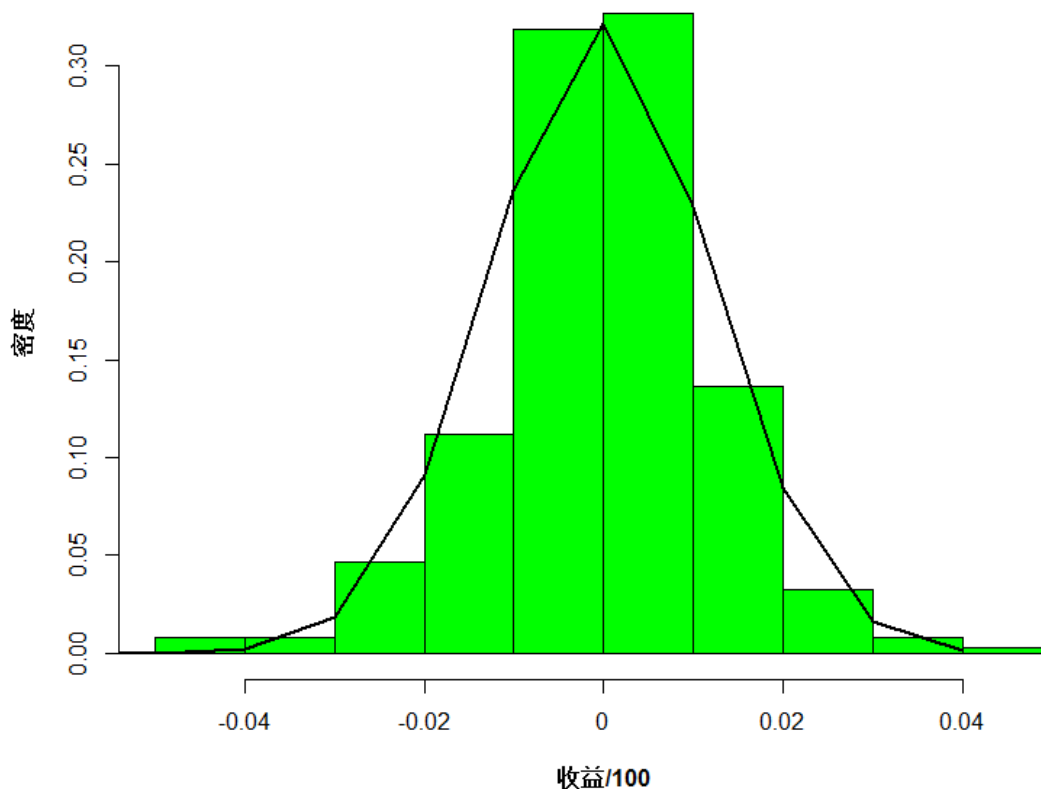


图 5.4 上证 50ETF 收益率直方图

数据对数收益率的基本统计分析结果如表 5.5 所示.

表 5.1 上证 50ETF 对数收益率的统计特征

均值	方差	最大值	最小值	偏度	峰度	JB 统计量
-0.00029	0.00015	0.04244	-0.03854	0.35882	3.59662	48.1595

由图 5.4 和表 5.1 可知,偏度大于零,则分布为正偏离,表现出右边尾部比左边尾部更长,即金融资产收益上升的可能性大于下降的可能性.峰度大于 3,明显高于正态分布的峰度,则具有过甚的峰度,就意味着存在尖峰厚尾,表明金融资产存在极端收益的可能性很大.因此,金融市场明显存在波动聚集、厚尾、非对称等特征,表现出与金融市场中常数波动率和正态分布的假设完全不符.

## 5.2 参数估计

为了让模型更好的应用到实际中,需要对模型中的未知参数进行估计.首先对经典 Heston 模型进行参数估计,其中未知参数为资产价格均值 $\mu$ ,模型未知参数 $\Omega = \{\kappa, \theta, \sigma, \rho\}$ .其次,对混合高斯 Heston 模型和双混合分数 Heston 模型中的未知参数进行估计,其中未知参数为资产期望回报率 $\mu$ 、赫斯特指数 $H$ 和模型未知参数 $\Omega = \{\kappa, \theta, \sigma, \rho\}$ .

对未知参数 $\mu$ 用矩估计法,获取到 $X + 1$ 个标的资产的历史数据为 $\{S_{-i\Delta t}: i = 1, 2, \dots, X, X + 1\}$ ,对标的资产的价格方程和波动方程进行离散化,取时间间隔为 $\Delta t$ ,得到

$$\begin{aligned} S_{t+(i+1)\Delta t} - S_{t+i\Delta t} &= \mu S_{t+i\Delta t} \Delta t + \sqrt{V_t} \varepsilon_1 \sqrt{\Delta t} + \sqrt{V_t} S_{t+i\Delta t} \varepsilon_2 \sqrt{2Ht^{2H-1}(2 - 2^{2H-1})\sqrt{\Delta t}}, \\ V_{t+(i+1)\Delta t} - V_{t+i\Delta t} &= \kappa(\theta - V_{t+i\Delta t})\Delta t \\ &\quad + \sigma \left( \varepsilon_1 \sqrt{\Delta t} + \sqrt{V_{t+i\Delta t}} \varepsilon_2 \sqrt{2Ht^{2H-1}(2 - 2^{2H-1})\sqrt{\Delta t}} \right), \end{aligned}$$

标的资产的收益率 $R_t$ 满足

$$R_t = \frac{S_{t+(i+1)\Delta t} - S_{t+i\Delta t}}{S_{t+i\Delta t}} = \mu \Delta t + \sqrt{V_t} \varepsilon_1 \sqrt{\Delta t} + \sqrt{V_t} S_{t+i\Delta t} \varepsilon_2 \sqrt{2Ht^{2H-1}(2 - 2^{2H-1})\sqrt{\Delta t}},$$

故由标的资产的历史数据得到 $R_t$ 的 $X$ 个样本

$$R_i = \frac{S_{-i\Delta t} - S_{-(i+1)\Delta t}}{S_{-(i+1)\Delta t}}, i = 1, 2, \dots, X.$$

从而得到期望回报率 $\mu$ 的估计量为 $\hat{\mu} = \frac{\bar{R}}{\Delta t}$ ,其中, $\bar{R} = \frac{1}{X} \sum_{i=1}^X R_i$ 是 $R_i$ 的样本均值.

接着用 R/S 算法对未知参数 $H$ 进行估计,估计结果如下表所示

表 5.2 参数估计结果

名称	期望收益率 $\mu$	赫斯特指数 $H$
上证 50ETF	-0.00235	0.6143

对模型中其它未知参数的估计,将采用敏感性分析,即单独考虑某一因子变化带来的股票价格影响效果,如图 5.5 所示.考虑到模型本身的合理性,参数 $\kappa$ 、 $\theta$ 和 $\sigma$ 均取大于零的数.

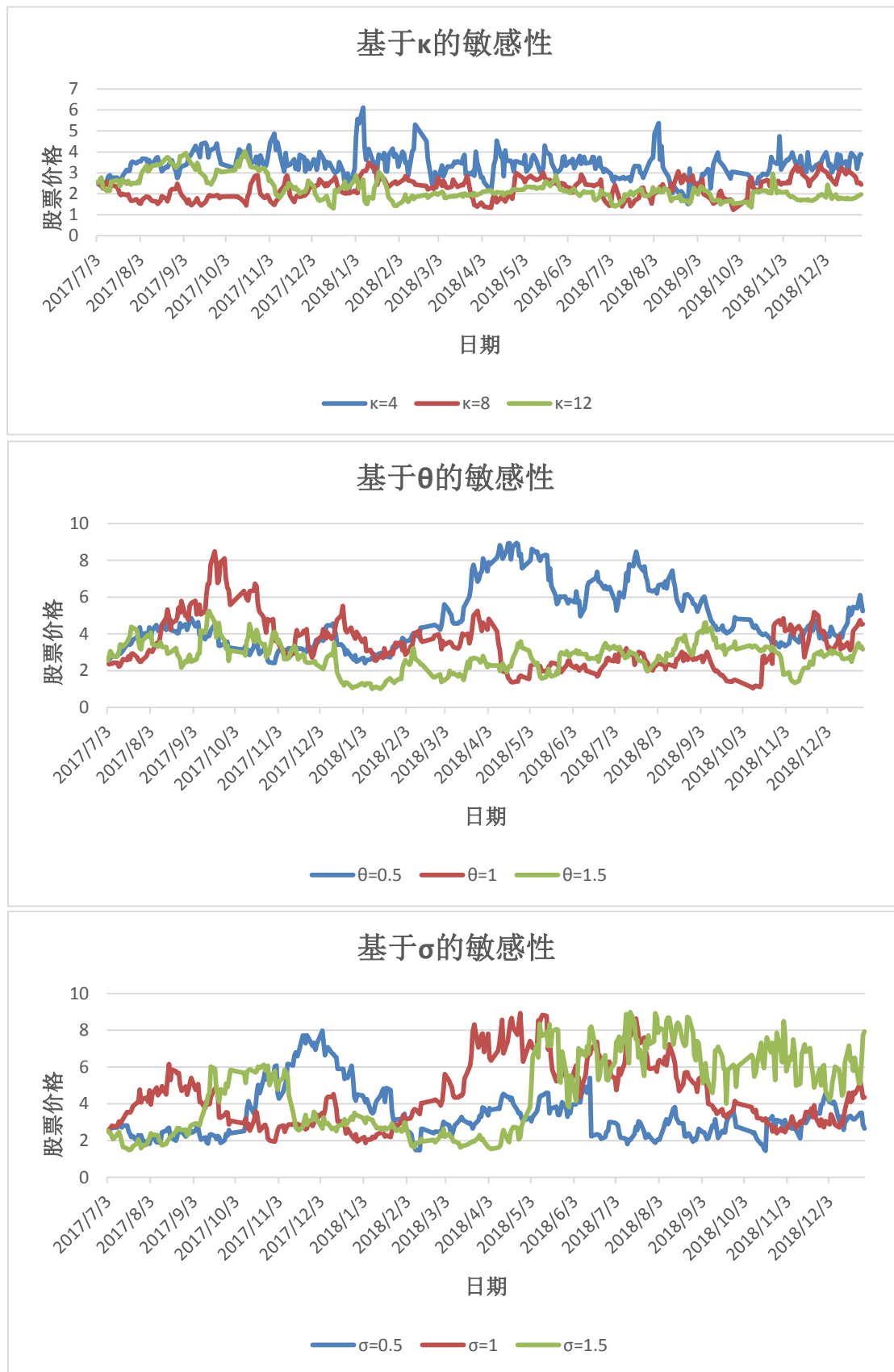


图 5.5 各参数的敏感性分析图



当固定其它参数不变, 随着 $\kappa$ 值的增大, 均值回复次数显然增加, 这也与 $\kappa$ 本身代表均值回复速度有关, 增大到一定程度时, 其隐含波动率微笑不再明显; 波动率长期均值 $\theta$ 越小, 波动率方差 $\sigma$ 越大, 其隐含波动率微笑越明显; 相关系数 $\rho = 0$ 时, 隐含波动率呈现对称性,  $\rho$ 取正数时的隐含波动率微笑相对于 $\rho$ 取负数时的隐含波动率微笑更明显.

### 5.3 模拟结果分析

为了更准确刻画标的价格变化, 下面用 Monte Carlo 模拟法对经典 Heston 模型和混合高斯 Heston 模型下股票价格路径进行模拟, 并与真实路径做了对比, 对模型中参数 $\Omega = \{\kappa, \theta, \sigma, \rho\}$ 做相应的假设, 得到 $\Omega = \{4, 0.5, 0.5, 0.5\}$ . 结果如图 5.6 所示

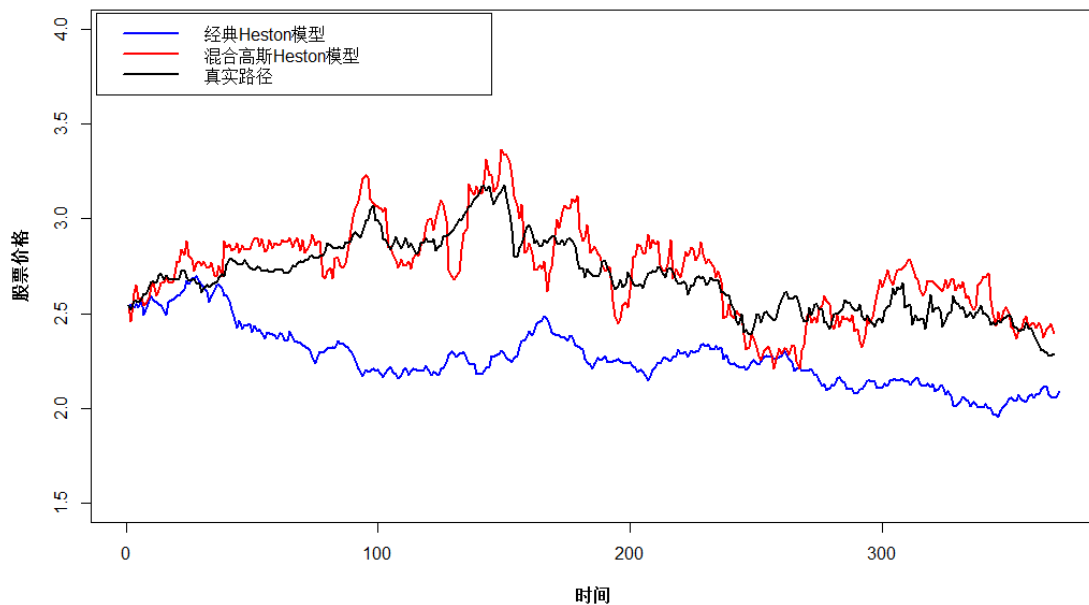


图 5.6 模拟标的资产价格与真实值价格趋势图

图 5.6 分别画了经典 Heston 模型下股票价格路径、混合高斯 Heston 模型下股票价格路径和金融市场中股票价格的真实路径. 从图中可以清楚地看出, 采用混合高斯 Heston 模型比经典 Heston 模型更加接近其真实值, 即能够更精确地描述股价的变化情况.

## 6 研究结论与展望

### 6.1 研究结论

论文研究的主要内容包括理论和模拟两部分. 对于理论部分, 首先介绍混合高斯 Heston 随机波动模型, 用混合次分数布朗运动代替布朗运动, 通过对冲掉波动率和风险, 得到混合高斯 Heston 模型满足的偏微分方程, 接着得到波动率方程解的存在唯一性, 并讨论了解的  $p$  阶矩定理, 其次基于混合高斯 Heston 随机波动模型, 通过用 Radon-Nikodym 测度变换和 Fourier 逆变换方法去求解其偏微分方程, 得到解的封闭形式. 而为了更好地拟合短期期权, 得到双混合分数 Heston 模型满足的资产价格方程解的存在唯一性, 并对其进行欧拉离散化.

对于模拟部分, 首先对选取的数据进行简单的描述性统计分析, 通过 Q-Q 图、核密度曲线图和收益直方图, 表明了金融市场存在波动聚集、厚尾以及非对称等特点, 其次对参数  $H$  用 R/S 算法进行估计, 其余参数做了简单的灵敏度分析, 最后用蒙特卡罗模拟法, 得到采用混合高斯 Heston 模型比经典 Heston 模型更加接近真实值, 从而验证了模型的有效性.

### 6.2 研究展望

本文是基于混合高斯 Heston 随机波动模型进行了相关理论研究. 由于模型中含有较多参数, 因此, 后续可以结合不同算法对 Heston 模型中众多的未知参数估计问题做延伸性突破; 或者可以考虑将 Heston 模型与保险精算、养老金投资组合等其它内容相结合进行深入研究.

## 参考文献

- [1] Black F, Scholes M S. The pricing of options and corporate liabilities [J]. Journal of Political Economy, 1973, 81(3):637-654.
- [2] Merton R C. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous[J]. Working papers,1975,3(1):125-144.
- [3] Necula C. Option pricing in a fractional Brownian motion environment[J]. Mathematical Reports, 2002,2(3):259-273.
- [4] Cheridito P. Arbitrage in fractional Brownian motion models[J]. Finance and Stochastics, 2003,7(4):533-553.
- [5] Bender C, Elliott R J. Arbitrage in discrete version of the wick-fractional Black Scholes market[J]. Mathematics of Operations Research, 2004,29(4):935-945.
- [6] Androshchuk T, Mishura Y. Mixed Brownian-fractional Brownian model: absence of arbitrage and related topics[J]. Stochastics An International Journal of Probability and Stochastic Processes,2006,78(5):281-300.
- [7] Sun L. Pricing currency options in the mixed fractional Brownian motion[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2013, 392(16):3441-3458.
- [8] El-Nouty C, Zili M. On the sub-fractional Brownian motion[J]. Applied Mathematics:A Journal of Chinese Universities(Series B), 2015,30(01):27-43.
- [9] Cox J C, Ross S A. The valuation of options for alternative stochastic processes[J]. Journal of Financial Economics, 1976,3(1):145-166.
- [10] Hull J, White A. The pricing of options on assets with stochastic volatilities[J]. Journal of Finance, 1987,42(2):281-300.
- [11] Stein E M, Stein J C. Stock price distributions with stochastic volatility:an analytic approach[J]. Review of Financial Studies, 1991,4(4):727-752.
- [12] Heston S L. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options[J]. Review of Financial Studies, 1993,6(2):327-343.
- [13] Bates D S. Jumps and stochastic volatility: exchange rate processes implicit in deutsche mark options[J]. Review of Financial Studies, 1996,9(1):69-107.

- [14] Christoffersen P, Jacobs H K. The shape and term structure of the index option smirk: why multifactor stochastic volatility models work so well[J]. *Management Science*, 2009, 55(12):1914-1932.
- [15] Atiya A F, Wall S. An analytic approximation of the likelihood function for the Heston model volatility estimation problem[J]. *Quantitative Finance*, 2009, 9(3): 289-296.
- [16] Benhamou E, Gobet E, Miri M. Time dependent Heston model[J]. *Social Science Electronic Publishing*, 2009,1(1):289-325.
- [17] Grzelak L A, Oosterlee C W, Van Weeren S. The affine Heston model with correlated Gaussian interest rates for pricing hybrid derivatives[J]. *Quantitative Finance*, 2011,11(11): 1647-1663.
- [18] Fatone L, Mariani F, Recchioni M C, et al. The analysis of real data using a multiscale stochastic volatility model[J]. *European Financial Management*, 2013, 19(1):153-179.
- [19] Nagashima K, Chung T K, Tanaka K. Asymptotic expansion formula of option price under multifactor Heston model[J]. *Asia-Pacific Financial Markets*, 2014, 21(4):351-396.
- [20] He X J, Zhu S P. An alternative form used to calibrate the Heston option pricing model[J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2016,71(9):1831-1842.
- [21] Mao X. *Stochastic differential equations and applications (Second Edition)*[M]. Horwood Publishing Limited, 2006.
- [22] Hu Y, Nualart D, Song X. A singular stochastic differential equation driven by fractional Brownian motion[J]. *Statistics Probability Letters*, 2007, 78(14):2075-2085.
- [23] Biagini F, Hu Y, Oksendal B, Zhang T. *Stochastic calculus for fractional Brownian motion and applications*[M]. Probability and Its Applications, 2008.
- [24] Barczy M, Pap G. Asymptotic properties of maximum likelihood estimators for Heston models based on continuous time observations[J]. *Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics*, 2013,50(2):389-417.

- [25] Mehrdoust F, Lépinette E. A fractional version of the Heston model with Hurst parameter  $H \in (1/2, 1)$ [J]. *Dynamic Systems And Applications*, 2017,26:535-548.
- [26] Samimi O, Mardani Z, Sharafpour S. LSM algorithm for pricing American option under Heston-Hull-White's stochastic volatility model[J]. *Computational Economics*, 2017,50(2):173-187.
- [27] Mehrdoust F, Najafi A R, Fallah S, Samimi O. Mixed fractional Heston model and the pricing of American options[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2018,330(1):141-154.
- [28] Mehrdoust F, Saber N, Najafi A R. Modeling asset price under two-factor Heston model with jumps[J]. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 2017,3(4):3783-3794.
- [29] Fallah S, Mehrdoust F. On the existence and uniqueness of the solution to the double Heston model equation and valuing lookback option[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2019,350:412-422.
- [30] He X J, Zhu S P. A closed-form pricing formula for European options under the Heston model with stochastic interest rate[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2018,335:323-333.
- [31] Zeng X C, Zhu S P. A new simple tree approach for the Heston's stochastic volatility model[J]. *Computers and Mathematics with Applications*, 2019,78(6): 1993-2010.
- [32] Barczy M átyás, Mohamed B A, Ahmed K. Asymptotic behavior of maximum likelihood estimators for a jump-type Heston model[J]. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 2019,198:139-164.
- [33] Wang X, He X, Zhao Y, Zuo Y. Parameter estimations of Heston model based on Consistent Extended Kalman Filter[J]. *IFAC Papers Online*, 2017,50(1): 14100-14105.
- [34] Wang X, He X, Bao Y, et al. Parameter estimates of Heston stochastic volatility model with MLE and consistent EKF algorithm[J]. *Science China Information Sciences*, 2018,61(4): 042202.

- [35] 张卫国, 肖炜麟, 徐维军等. 分数布朗运动下欧式汇率期权的定价[J]. 系统工程理论与实践, 2009, 29(6): 68-76.
- [36] 肖炜麟, 张卫国, 徐维军. 次分数布朗运动下带交易费用的备兑权证定价[J]. 中国管理科学, 2014, 22(05): 1-7.
- [37] 程志勇, 郭精军, 张亚芳. 次分数布朗运动下支付红利的欧式期权定价[J]. 应用概率统计, 2018, 34(01): 37-48.
- [38] 郭精军, 程志勇. 混合高斯模型下带红利的永久美式期权定价[J]. 应用数学, 2018, 31(02): 250-256.
- [39] 施里夫. 金融随机分析[M]. 上海财经大学出版社, 2008.
- [40] 李延军, 索吾林, 李翠香, 刘丽霞. Heston 模型下的方差互换定价研究[J]. 经济数学, 2012, 29(3): 90-95.
- [41] 王挺伟. 期权定价模型校准及奇异期权避险有效性的实证比较[D]. 上海交通大学, 2012.
- [42] 常浩. Heston 随机波动率模型下的动态投资组合[J]. 经济数学, 2013, 30(2): 48-54.
- [43] 邓国和. Heston 模型的欧式任选期权定价与对冲策略[J]. 广西师范大学学报(自然科学版), 2012, 30(03): 36-43.
- [44] 孙有发, 张国亚, 丁露涛. 基于 Stretching 和高阶紧的 Heston 随机波动模型下美式期权有限差分定价格式[C]. 中国系统工程学会第十八届学术年会论文集—A10 系统工程方法在金融、投资、保险业等领域的研究. 中国系统工程学会: 中国系统工程学会, 2014: 60-64.
- [45] 白薇. 拟蒙特卡洛方法下 Heston 模型的离散化[D]. 清华大学, 2015.
- [46] 肖建武, 尹希明. 待遇预定制养老金资产组合与缴费计划最优决策——基于随机波动率 Heston 模型及 Legendre 对偶变换法[J]. 中国管理科学, 2015, 23(3): 42-46.
- [47] 张敏, 朱晖, 蔡秋娥. Heston 模型下的欧式一篮子期权定价[J]. 南华大学学报(自然科学版), 2015, 29(02): 81-83.
- [48] 周杰明, 郑箫箫, 张鑫, 黄娅. 随机利率和随机波动率框架下的鲁棒最优投资组合(英文)[J]. 南开大学学报(自然科学版), 2016, 49(05): 102-111.

- [49] 邱虹. 基于 Heston 模型的能源商品定价机制研究[J]. 南华大学学报: 社会科学版, 2018, 19(01): 82-87.
- [50] 龚群子, 熊风. 基于 Heston 模型的期权隐含波动率研究[J]. 五邑大学学报 (自然科学版), 2018, 32(03): 76-82.
- [51] 王林, 张蕾, 张连峰. 用模拟退火算法寻找 Heston 期权定价模型参数[J]. 数量经济技术研究, 2011, 28(09): 131-139+153.
- [52] 李淑琦. 基于 Heston 随机波动模型的近似精确仿真技术研究[D]. 广东工业大学, 2014.
- [53] 李斌, 何万里. 一种寻找 Heston 期权定价模型参数的新方法[J]. 数量经济技术经济研究, 2015, 32(03): 129-146.
- [54] 孙玉东, 师义民. 混合分数布朗运动下亚式期权定价[J]. 经济数学, 2007, 24(2): 49-51.

## 附录

### 附录 1: 描述性统计分析程序

```
x= read.csv("E:\\50ETF.csv",header = TRUE)
head(x)
r=x[,-1]
head(r)
sum(is.na(r))
r.stocks <- diff(log(r))*100
r.stocks
summary(r.stocks)
qqnorm(r.stocks,xlab='理论分位数',ylab='样本分位数',col="red",border="black",font.lab=2,
lwd=2)
qqline(r.stocks)
D<-density(r.stocks)
plot(D,xlab='收益',ylab='密度',font.axis=2,font.lab=2,xlim=c(-7,7),ylim=c(0,0.5))
polygon(D,col="blue",border="black")
curve(dnorm,lty=2,lwd=2,add=TRUE)
abline(v=0,lty=1,lwd=2)
legend("topright",legend=c("核密度","正态密度"),lty=c(1,2,3))
hist(r.stocks,xaxt='n',freq=F,xlab='收益/100',ylab='密度',font.lab=2,col="green",border="black")
x1<-c(-6:4)
lines(x1,dnorm(x1,mean(r.stocks),sd(r.stocks)),lwd=2)
axis(1,at=axTicks(1),labels=as.integer(axTicks(1))/100)
```

### 附录 2: 模拟股价变化程序

```
x= read.csv("E:\\50ETF.csv",header = TRUE)
head(x)                                     ##查看数据
x = na.omit(x)
x1 = x[,2]
T = 1
Nsteps =
#mu=100*mean(diff(x)/x[1:(length(x)-1)])
v = matrix(NA,1,Nsteps)
SPaths = matrix(NA,1,Nsteps)
sigma = 0.5
t=T/Nsteps
mu =
K = 4
SPaths[,1]= x[1]
v[,1] = 0.5
```



```
theta = 0.5
H =
for (i in 1:(Nsteps-1))
{
  v[,i+1]=
v[,i]*(1-K*0.01)+K*theta*0.01+sqrt(v[i])*0.1*sigma*(rnorm(1)+rnorm(1)*0.1*sqrt(2*H*t^(2*H-1)*2-2^(2*H-1))))
}
xx=seq(1:Nsteps)
plot(xx,v,type = "l")
for (j in 1:(Nsteps-1))
{
  SPaths[,j+1]=
SPaths[,j]*(1+mu*0.01+sqrt(v[j])*rnorm(1)*0.1+rnorm(1)*0.1*sqrt(v[j])*sqrt(2*H*t^(2*H-1)*(2-2^(2*H-1))))
}
plot(xx,SPaths,type = "l",col='2')
lines(x,type = 'l',ylim=c(1,5))
```

## 致谢

三年的研究生生活即将结束,三年来,我学到了很多,也接触了不少人,更加感受到学校生活带给我的充实感和满足感,感谢校园营造给我的学习氛围,我会珍惜所有值得留恋的时光,忘却不开心,带走欢乐.

首先,感谢郭精军老师对我论文的悉心指导,在我研一研二的学习中,您给予我们的帮助以及学术中的高标准,严要求,这时时刻刻提醒我,要不断提高自己,就得付出比别人多百分之百的努力,感谢您一直以来的耐心和细心,也让我顺利完成了我的学位论文.

其次,感谢师门这个大家庭中的每一位成员,研一,有师兄师姐带我们学习,带我们玩,享受着开心时光;研二,由我们带领研一的师弟师妹,一起努力,一起前进;研三,我们的大家庭又多了几员猛将,博士的两位师姐个个很优秀,研一研二的师弟师妹个个很认真,看到她们学习的劲头,真是很惭愧,应该多向他们学习.

接着,我很感激我的父母,谢谢他们做出的决定,选择带我和哥哥勇敢走出大山沟,创造了现在幸福完整的家,都说每个人把最坏的脾气留给最亲近的人,我想对他们说声抱歉,谢谢他们二十四年的包容和体谅,我希望自己更懂事一点,将来更努力一点,这样才能回报他们多一点.

最后,我要感谢我自己,感谢所有的付出,感谢不断的收获,也感谢一直以来的坚持.“宝剑锋从磨砺出,梅花香自苦寒来”,在我身上从来都没有幸运的生活,我也不是千千万万幸运儿中的一个,好的生活都来之不易,我只有用自己的双手去奋斗,才能给未来的自己更好地保障.

柴婧婧

2020年5月20日